This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

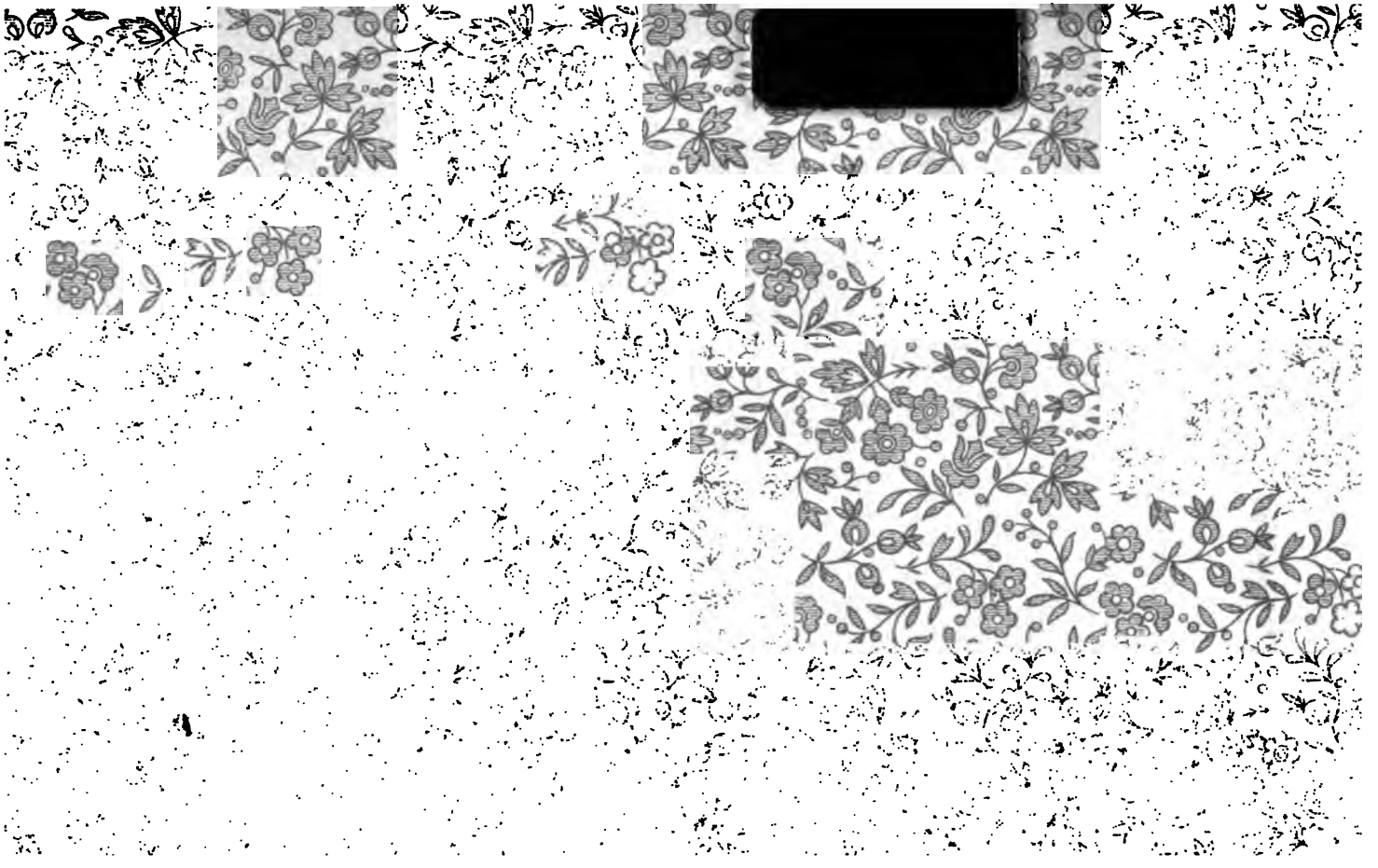
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

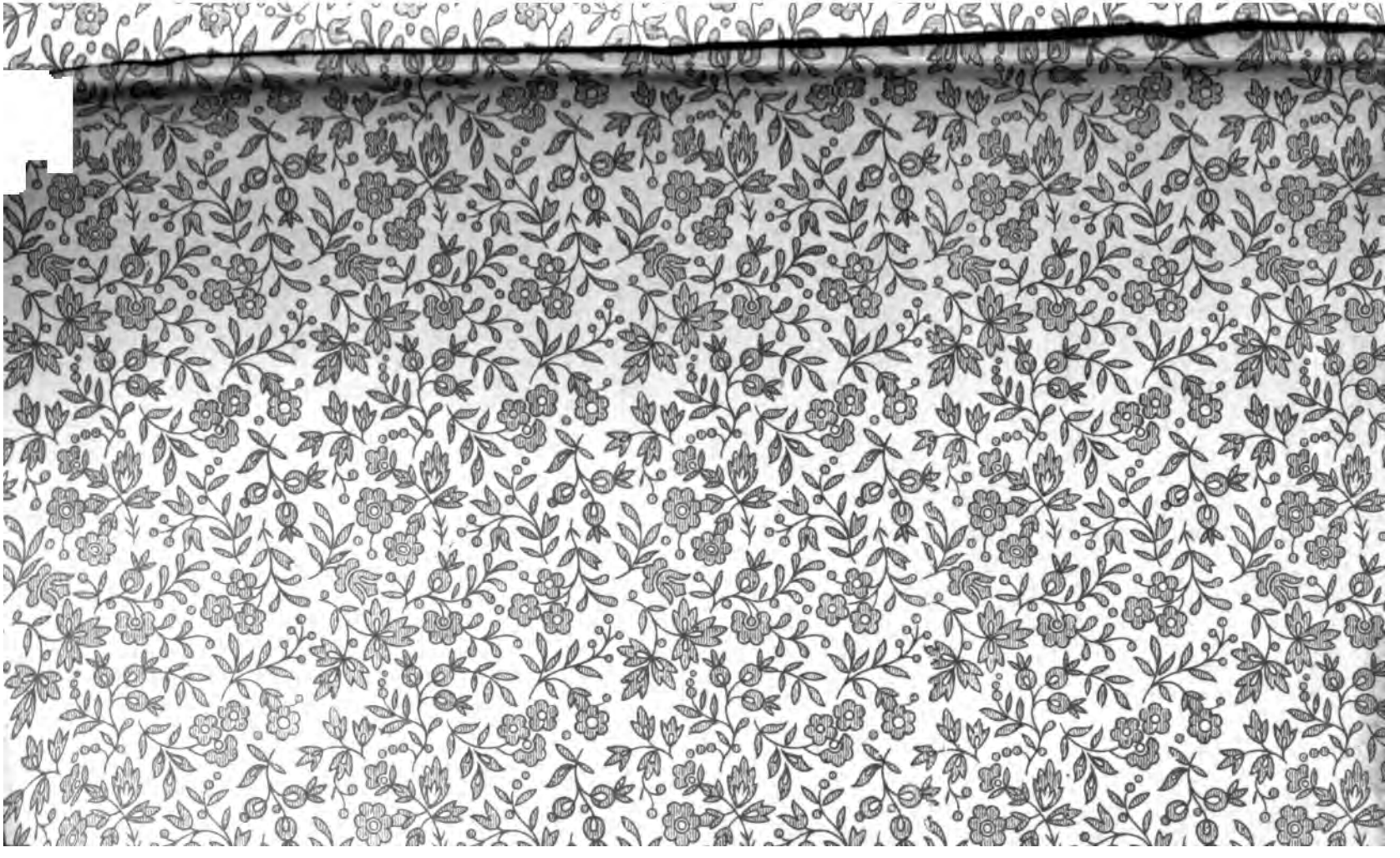
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries
3 6105 001 021 554





510.5
M426

# MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

## RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

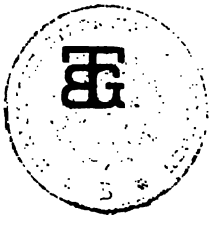
von

Prof. **Felix Klein** zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck** zu München.

Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXXI. Band.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1888.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
Q 28326

# Inhalt des einunddreissigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)


Seite

**Beneke**'sche philosophische Preisaufgabe . . . . . 605

**Brill**, in Tübingen. Ueber algebraische Correspondenzen . . . . . 374

**Busche**, in Bergedorf bei Hamburg. Ueber die Euler'sche $\varphi$-Function . . 70

**Dingeldey**, in Darmstadt. Die Concomitanten der ternären cubischen Formen, insbesondere der Form $x_1 x_2^2 - 4x_3^3 + g_3 x_1^2 x_3 + g_3 x_1^3$. . . . . 157

—— Ueber die Transformation der Gleichung der ebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf die Normalform . . . . . 177

**Fricke**, in Braunschweig. Ueber ausgezeichnete Untergruppen in der Gruppe der elliptischen Modulfunctionen . . . . . 227

**v. Gall**, in Oppenheim. Das vollständige Formensystem der binären Form $7^{ter}$ Ordnung . . . . . 318

—— Die irreducibeln Syzyganten zweier simultanen cubischen Formen . . 424

**Gordan**, in Erlangen. Die Discriminante der Form 7. Grades $f = a_x^7$. . . 566

**Heun**, in München. Ueber Euler's homogenen linearen Multiplicator zur Integration der regulären linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung 363

**Hilbert**, in Königsberg. Ueber binäre Formen mit vorgeschriebener Discriminante . . . . . 482

**Isenkrahe**, in Bonn. Ueber die Anwendung iterirter Functionen zur Darstellung der Wurzeln algebraischer und transcendenter Gleichungen . . 309

**Kneser**, in Breslau. Synthetische Untersuchungen über die Schmiegungsebenen beliebiger Raumcurven und die Realitätsverhältnisse specieller Kegelschnittsysteme . . . . . 507

**Killing**, in Braunsberg in Ostpr. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen . . . . . 252

**Koenigsberger**, in Heidelberg. Ueber algebraische Beziehungen zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen für eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung . . . . . 75

—— Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen linearer Differentialgleichungen. . . . . 220

—— Ueber die Erniedrigung der Ordnung algebraischer Differentialgleichungen mit Hülfe bekannter Integrale . . . . . 302

**König**, in Budapest. Ueber eine neue Interpretation der Fundamentalgleichungen der Dynamik . . . . . 1

**Küpper**, in Prag. Ueber die auf einer Curve $m^{ter}$ Ordnung $C_p^m$ vom Geschlecht $p$ von den $\infty^2$ Geraden $G$ der Ebene ausgeschnittene lineare Schaar $g_m^{(2)}$ . . . . . 291

Seite

**Lilienthal**, in Bonn. Ueber eine besondere Art von Strahlensystemen . . 85

**Maisano**, in Messina. Die Steiner'sche Covariante der binären Form 6. Ordnung . . . . . 493

**Meyer**, in Tübingen. Zur algebraischen Erzeugung sämmtlicher, auch der zerfallenden ebenen rationalen Curven vierter Ordnung . . . . . 96

**Nekrassoff**, in Moskau. Der Modul des Maximum Maximorum einer Function $\psi(re^{\varphi i})$ in Bezug auf $\psi$ und die Anwendung seiner Eigenschaften auf die Reihe von Lagrange . . . . . 337

**Neovius**, in Helsingfors. Ueber eine specielle geometrische Aufgabe des Minimums . . . . . 359

**Pringsheim**, in München. Zur Theorie der Gamma-Functionen . . . . . 455

**Schafheitlin**, in Berlin. Ueber eine Integraldarstellung der hypergeometrischen Reihe . . . . . 156

**Schlesinger**, in Basel. Ueber die Verwerthung der $\vartheta$-Functionen für die Curven dritter Ordnung nebst einer Anwendung auf die zu einer Curve dritter Ordnung apolaren Curven . . . . . 183

**Schönflies**, in Göttingen. Ueber die regelmässigen Configurationen $n_3$ . . 43

**Simony**, in Wien. Ueber einige mit der dyadischen Schreibweise der ganzen Zahlen zusammenhängende arithmetische Sätze . . . . . 549

**Stolz**, in Innsbruck. Ueber zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen . . . . . 601

**Stroh**, in München. Ueber einen Satz der Formentheorie . . . . . 441

—— Ueber die asyzygetischen Covarianten dritten Grades einer binären Form 444

**Wiltheiss**, in Halle a./S. Partielle Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen und der Perioden derselben. . . . . 134

—— Ueber die Potenzreihen der hyperelliptischen Thetafunctionen . . . . 410

**Zeuthen**, in Kopenhagen. Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés . . . . . 235

# Ueber eine neue Interpretation der Fundamentalgleichungen der Dynamik.*)

Von

Julius König in Budapest.

Die Fundamentalgleichungen der Dynamik sind ihrem Wesen nach Erfahrungssätze, oder eigentlich — da ihr Inhalt durch die Erfahrung nie erschöpft werden kann — Axiome. Sie enthalten die Definitionen der Kraft und des Zwanges. Die Kraft ist aber nichts anderes, als ein behufs Beschreibung und Ordnung der Erscheinungen eingeführter naturwissenschaftlicher oder erkenntnisstheoretischer Hülfsbegriff; auch der Zwang hat, wenn diess auch gewöhnlich weniger betont wird, nur diese Bedeutung. Durch welche Vorrichtung immer auch jene Modification der Bewegung hervorgerufen wird, die wir unter Zwang verstehen, — es treten nicht bloss die Zwangskräfte der Theorie auf, sondern es ist auch noch die Annahme anderer *hindernd* wirkender Kräfte (Reibung u. s. w.) zur genauen Beschreibung der Bewegung nothwendig. Die Trennung der Zwangskräfte und der hindernden Kräfte ist also auch nur ein Hülfsmittel der Theorie.

Die wissenschaftliche Mechanik strebt seit langer Zeit danach, den Inhalt der dynamischen Fundamentalgleichungen durch andere einfachere Gesetze, die sogenannten Principe der Mechanik zu ersetzen, die eine nicht nur rein mathematische, sondern auch physikalische oder erkenntnisstheoretische Interpretation gestatten. Allerdings sind auch die Lagrange'schen Gleichungen selbst in ihrer Gesammtheit als ein solches Gesetz oder Princip zu betrachten. Während jedoch diese im Allgemeinen $3n$ von einander unabhängige Behauptungen in sich vereinigen, ist — auch a priori — die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, ihre Stelle durch ein Princip zu ersetzen, das weniger von einander unabhängige Behauptungen in sich schliesst und daher — wenigstens

*) Der ung. Akademie der Wissenschaften vorgelegt in der Sitzung vom 18. April 1887.

in gewisser Beziehung — die Bewegung des zu untersuchenden Punktsystems in einfacherer Weise charakterisirt. Natürlicherweise müsse aus diesem Principe die Fundamentalgleichungen der Dynamik selbst abgeleitet werden können. Als Methode zur Verminderung der Anzahl der von einander unabhängigen Behauptungen steht uns die Einführung von Maximum-Minimumsbedingungen zu Gebote. Die gesammten Gleichungen können natürlich auch aus einer einzigen solchen Bedingung hergeleitet werden, wenn wir z. B. eine solche Bestimmung der Functionen $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ fordern, dass die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \left( (m_i x_i'' - X_i)^2 + (m_i y_i'' - Y_i)^2 + (m_i z_i'' - Z_i)^2 \right)$$

ein Minimum werde. Wenn man von den Lagrange'schen Gleichungen als durch die Erfahrung gegebenen Thatsachen ausgeht, ist diese Minimumsforderung — grade so wie das d'Alembert'sche Princip, oder dessen von Gibbs*) angegebene modificirte Form — in erster Reihe nur als eine formale Vereinigung der gegebenen Gleichungen anzusehn.

Wenn man aber auch die erwähnten Sätze zuerst als rein analytische Transformationen der Bewegungsgleichungen auffasst, so geben sie doch zugleich jedesmal — um mich eines in der Geometrie üblichen Ausdrucks zu bedienen — eine neue Erzeugung jener Gleichungen an, die zugleich ihren Inhalt in einer der gewohnten physikalischen Auffassung näher stehenden Interpretation wiedergiebt. So gelangt man grade zu der früher erwähnten Minimumsforderung, wenn man die Gesetze der freien Bewegung eines Punktes mit dem Gauss'schen Principe des kleinsten Zwanges zusammenstellt, das in seiner ursprünglichen Form die Modification der Bewegung angiebt, die in Folge irgend welcher dem Systeme auferlegten Beschränkungen entsteht. (Es wird darum auch vielfach jener Minimumssatz als analytischer Ausdruck des Gauss'schen Princips bezeichnet, wenngleich dieselben sich begrifflich nicht vollständig decken. Denn einerseits enthält die Minimumsforderung auch die Gesetze der freien Bewegung; andrerseits würde das Gauss'sche Princip auch dann anwendbar bleiben, wenn die Gesetze der freien Bewegung andere als die gewöhnlich angenommenen wären.) Aehnlich werden auch beim d'Alembert'schen Principe zuerst den Gesetzen der freien Bewegung entsprechende Festsetzungen eingeführt und dann erst durch eine neue Behauptung der Schlusssatz erhalten. (Reactionskräfte, Uebergang zum Gleichgewichtsproblem, u. s. w.).

Dem gegenüber kann die Aufgabe, die ich mir eigentlich in den folgenden Untersuchungen gestellt habe, folgendermassen charakterisirt werden.

---

*) American Journal of Mathematics, Vol. II, pag. 49.

Für die einfachste aller Bewegungserscheinungen, die freie Bewegung eines einzelnen Punktes von der Masse $m$ unter der Einwirkung einer Kraft $P$ hat man die folgenden beiden Sätze:

1) Die Grösse der Beschleunigung (oder auch der in die Richtung der Kraft fallenden Beschleunigungscomponente) ist $\frac{P}{m}$.

2) Beschleunigung und Kraft sind gleichgerichtet.

Wenn es nun auch im Allgemeinen mehr oder minder Geschmackssache bleibt, ob man einer bestimmten Formulirung eine unmittelbarere physikalische Bedeutung beimessen will, dürfte eine solche Bedeutung grade diesen beiden Sätzen ohne Widerspruch zuerkannt werden.

Es hat daher ein unbestreitbares Interesse ein solches allgemeines Grundgesetz der Mechanik aufzustellen, das für die Bewegung eines unter dem Einfluss ganz beliebiger Kräfte stehenden Punktsystems bei der Annahme irgend welcher auch die Zeit und die Geschwindigkeiten enthaltenden Bedingungsgleichungen gültig ist, diese Bewegung vollständig bestimmt und dabei nur aus der Verallgemeinerung jener beiden früher angeführten Sätze besteht. Da der erste jener Sätze eine Gleichung, der zweite ein System von gleichberechtigten Gleichungen vertritt, die wieder in einem Maximums- oder Minimumssatze vereinigt werden können, wird dieses Grundgesetz sich dementsprechend aus zwei Theilen zusammensetzen.

Wie nun die folgenden Untersuchungen darlegen, existirt in der That ein solches Grundgesetz und zwar in zwei von einander unabhängigen, aber formell gleichberechtigten Formen, die dem Wesen der Sache nach, den zwei verschiedenen Formen des im einfachsten Falle für die Grösse der Beschleunigung gültigen Satzes entsprechen. Das eine dieser Grundgesetze ist in Art. 15—17 ausführlich entwickelt; auch das andere in Art. 18 angedeutet. Aus den dort angegebenen Gründen beschränke ich mich bezüglich dieser zweiten Form auf eine kürzere Fassung und behandle (Art. 19) genauer nur den zweiten Theil dieses Gesetzes, der sich hier als Maximumsforderung darstellt, *allein* aber nur eine nothwendige Eigenschaft jeder Bewegung darstellt, die für sich zur Ableitung der Bewegungsgleichungen nicht genügt.

Die formale Begriffsbildung, die der Darlegung der erwähnten Gesetze vorangehn muss, entfernt sich eigentlich nirgends von den gewohnten Anschauungen der Dynamik. Der ausführlichen Darlegung voraneilend, sollen hier jedoch nur „Beschleunigungsenergie“ und „Beschleunigungsarbeit“ als neu einzuführende Begriffe erwähnt werden, die aus den gewöhnlichen Ausdrücken für Energie und Arbeit dadurch entstehn, dass in diesen an Stelle der Geschwindigkeiten die Beschleunigungen treten. Die Einführung dieser Ausdrücke giebt nämlich den zu entwickelnden Grundgesetzen eine merkwürdige, naturphilo-

sophische Färbung, auf die hinzuweisen mir an dieser Stelle gestattet sei.

Das erste jener Gesetze bestimmt dann in seinem ersten Theile die Beschleunigungsarbeit, welche das Kräftesystem in irgend einem Zeitintervall leistet, während der zweite die Bewegung weiter durch die Forderung vollständig bestimmt, dass die zu jener Arbeitsleistung verwendete Beschleunigungsenergie in jedem Zeitpunkte ein Minimum sei.

Bei der zweiten Form des mitzutheilenden Grundgesetzes vertauschen sich die Rollen der Beschleunigungsarbeit und Beschleunigungsenergie. Der erste Theil dieses Gesetzes bestimmt die Beschleunigungsenergie des Systems für jeden Zeitpunkt, während der zweite Theil dann wieder die Bewegung durch die Forderung vollständig bestimmt, dass die mit jener Energie geleistete Beschleunigungsarbeit in jedem Zeitintervall ein Maximum sei.*)

## I.

## Einleitende Festsetzungen.

1. Wir charakterisiren den *Bewegungszustand* eines aus $n$ Massenpunkten bestehenden Systems, wenn wir dem Werthe der Zeitcoordinate ($t$) entsprechend, die Werthe der Coordinaten der Punkte**) ($x_i$, $y_i$, $z_i$), ihrer Geschwindigkeitscomponenten ($x_i'$, $y_i'$, $z_i'$), sowie endlich ihrer Massen ($m_i$) angeben. Sind die Massen constant, so ist ihre Aufzählung unter den Charakteristiken des Bewegungszustandes überflüssig; es ist jedoch, wenn auch die bisher beobachteten Erscheinungen eine solche Annahme nicht fordern, durchaus die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die Massen sich nach einem bestimmten Gesetz mit der Zeit, oder noch allgemeiner mit dem Bewegungszustande des Systems ändern. Es sei daher — ohne besonderes Gewicht darauf zu legen — sogleich hier ein für allemal bemerkt, dass die folgenden Untersuchungen sich ohne jede Aenderung auch auf jene allgemeine Hypothese beziehen, nach welcher die Massen ($m_i$) beliebige, aber bestimmte (positivwerthige) Functionen der Grössen $\ldots, x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', \ldots, t$ wären.

---

*) Ich habe in dieser einleitenden Uebersicht das Hamilton'sche Princip und ähnliche nicht besonders erwähnt, da ihre Anwendbarkeit an die Existenz einer Kräftefunction und an Bedingungsgleichungen, welche die Geschwindigkeiten nicht enthalten, gebunden erscheint. Eine weitere Verallgemeinerung (wie bei Kirchhoff) reducirt ihren Inhalt auf eine symbolische Darstellung der Bewegungsgleichungen.

**) Der Einfachheit wegen benutze ich durchweg cartesische Coordinaten; doch möge sogleich bemerkt werden, dass die folgenden Entwicklungen von der Art der Ortsbestimmung durchaus unabhängig sind.

Irgend eine Grösse heisse kurz *Function des Bewegungszustands*, wenn ihr Werth von den Grössen $t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i', \ldots$ abhängt; die Erwähnung der Massen ist hier überflüssig, da diese constant oder doch Functionen der eben aufgezählten Grössen sind.

Sind nun die Componenten der Beschleunigung für jeden einzelnen Punkt als Functionen des Bewegungszustandes gegeben, etwa:

$$x_i'' = \varphi_i(t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i, \ldots),$$
$$y_i'' = \psi_i(t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i', \ldots),$$
$$z_i'' = \chi_i(t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i', \ldots),$$

und ist ausserdem noch *ein* Bewegungszustand des Systems bekannt, so kann (durch Integration der Differentialgleichungen) hieraus der Bewegungszustand des Systems für einen beliebigen Zeitpunkt $t$ berechnet werden, und die Ortsveränderung des Systems ist vom Standpunkte der *Kinematik* vollständig beschrieben. In dieser Weise geschieht eine erste Zusammenfassung der Bewegungserscheinungen unter allgemeinere Gesichtspunkte, insofern wir alle jene Bewegungen gleichsam als in *eine* Classe gehörig betrachten, die denselben Differentialgleichungen gemäss verlaufen, während ihre Unterschiede nur Folgen des einen besonders gegebenen Bewegungszustandes, des *Anfangszustandes* sind.

Die *Dynamik* erhebt sich zu viel allgemeineren Gesichtspunkten, indem sie die Veränderung des Bewegungszustandes nicht mehr direct in der eben angegebenen Weise beschreibt, sondern dazu *auf die einzelnen Punkte wirkende Kräfte* benutzt, d. h. Richtungsgrössen, die gleichfalls durch ihre Componenten $(\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots)$ charakterisirt werden können, und wo jede Componente abermals Function des Bewegungszustands, d. h. der Grössen $t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i' y_i', z_i', \ldots$ ist. Möge das Auftreten und Wirken dieser Kräfte naturwissenschaftlich wie immer erklärt werden — dass diese Kräfte die Ursachen der Veränderung des Bewegungszustands, oder dass sie — wie man gewöhnlich zu sagen pflegt, — Ursachen der Beschleunigung sind, bedeutet in mathematischer Fassung nichts anderes, als dass zwischen Kräften und Beschleunigungen ein gewisser gesetzmässiger Zusammenhang besteht, dem entsprechend aus den Werthen von $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ die Werthe von $\ldots, x_i'', y_i'', z_i'', \ldots$ berechnet werden können und umgekehrt, so dass z. B. im allgemeinen:

$$x_i'' = f(t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i', \ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots),$$

und so fort.

Die Art dieses Zusammenhanges zwischen den Componenten der Beschleunigungen und der Kräfte wird in den Fundamentalgleichungen der Dynamik, den Lagrange'schen Gleichungen als Axiom gegeben. Es ist beinahe selbstverständlich, dass die Entwicklung der Wissenschaft

sich mit dieser rein mathematischen Fassung der Grundgesetze der Dynamik nicht zufrieden geben konnte, umsoweniger als aus dieser Fassung in den verwickelteren Fällen kaum mehr das, was wir physikalische Bedeutung zu nennen pflegen, abgelesen werden kann. Die Dynamik suchte sogenannte allgemeine *Principe*, deren Aufgabe ungefähr in folgender Weise festgestellt werden kann:

*Wenn wir alle jene Bewegungen, für welche die Componenten der Beschleunigungen irgend welche bestimmte Functionen des Bewegungszustandes und der Kräftecomponenten sind, vorläufig als mögliche Bewegungen in Betracht ziehen, so soll ein allgemeines Princip oder Grundgesetz der Bewegung eine solche charakteristische Eigenschaft der wirklich stattfindenden Bewegung angeben, die gerade nothwendig und hinreichend ist, um aus der Reihe aller möglichen Bewegungen die eine wirklich stattfindende Bewegung auszuscheiden.*

3. Bei der Analyse eines allgemeinen Grundgesetzes der Bewegung im vorhin festgestellten Sinn, richtet sich die erste Fragestellung naturgemäss dahin, ob die zu beschreibende Bewegung *invariante* Eigenschaften besitzt, d. h. in mathematischer Fassung, ob es Functionen des augenblicklichen Bewegungszustandes giebt, die ihren Werth während der Bewegung nicht ändern. Ist $\varphi$ das für diese Function gewählte Zeichen, und sind $t^0, \ldots, x_i^0, y_i^0, z_i^0, \ldots, x_i'^0, y_i'^0, z_i'^0, \ldots$ die Coordinaten eines bestimmten Bewegungszustandes (Anfangszustandes), so muss für diese Function:

$$\varphi(t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i') = \varphi(t^0, \ldots, x_i^0, y_i^0, z_i^0, \ldots, x_i'^0, y_i'^0, z_i'^0, \ldots)$$

sein.

Dass für ein *gegebenes* Grundgesetz und für *gegebene* Kräfte solche invariante Functionen immer existiren; dass sogar, sobald diese bekannt sind, auch die ganze Bewegung bestimmt ist, ist unmittelbar einzusehn. Denn sobald $\varphi =$ Const. ein erstes Integral der Differentialgleichungen der Bewegung ist, wird die Function $\varphi$ der angegebenen Bedingung genügen und umgekehrt. Ebensowenig braucht näher auseinandergesetzt zu werden, dass es für ein gegebenes Grundgesetz auch Functionen $\varphi$ geben kann, die jene Invarianteneigenschaft nicht nur für ein einzelnes gegebenes Kräftesystem, sondern für alle Kräftesysteme besitzen, die einer gewissen, allgemeineren Bedingung genügen. Ist z. B. das Grundgesetz dasjenige der sogenannten freien Bewegung, und sind die Kräfte sogenannte innere Kräfte, so drückt das Princip der Flächen oder das Princip des Schwerpunkts nichts anderes als solche Invarianteneigenschaften der Bewegung aus.

Hier soll jedoch zunächst gefragt werden, *ob für ein gegebenes Grundgesetz die Bewegung überhaupt solche Invarianteneigenschaften besitzt, die also von Grösse und Richtung der wirkenden Kräfte durchaus unabhängig sind?*

Das bewegte System bestehe zum Beispiel nur aus einem Punkte, und der Zusammenhang zwischen den Componenten der Kräfte und Beschleunigungen sei durch die Gleichungen:

$$mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z$$

gegeben. Wäre nun $\varphi(t, x, y, z, x', y', z')$, ohne identisch constant zu sein, vom Bewegungszustande unabhängig, so müsste auch

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}X + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}Y + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}Z\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}x' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z' + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

sein, wie immer auch $X, Y, Z$ als Functionen des Bewegungszustandes bestimmt seien. Es müssen also, da $X, Y, Z$ auch zusammen oder einzeln Null werden können, einzeln

(a) $$\frac{\partial\varphi}{\partial x}x' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z' + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

(b) $$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = 0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z'} = 0$$

sein. Es müsste also $\varphi$ nur von $x, y, z, t$ abhängen: dann könnte aber Gleichung (a) wieder nur so identisch befriedigt werden, dass auch $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ verschwinden, und es wäre $\varphi$ der Annahme entgegen identisch constant.

Bei gewissen speciellen Annahmen für das Grundgesetz können jedoch im angegebenen Sinne invariante Functionen existiren. Sei jetzt der Zusammenhang zwischen den Componenten der Kraft und der Beschleunigung durch folgende Gleichungen gegeben:

$$mx'' = X - \frac{xX + yY + zZ + m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{x^2 + y^2 + z^2}x,$$

$$my'' = Y - \frac{xX + yY + zZ + m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{x^2 + y^2 + z^2}y,$$

$$mz'' = Z - \frac{xX + yY + zZ + m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{x^2 + y^2 + z^2}z.$$

Wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit $x, y, z$ multiplicirt und addirt, so ergiebt sich, dass unabhängig von den $X, Y, Z$ beigelegten Werthen immer

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

ist, dass also jetzt

$$xx' + yy' + zz'$$

immer eine Invariante des Bewegungszustandes ist. Wie die Differentiation unmittelbar zeigt, hat auch die Function

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (xx' + yy' + zz')t$$

diese Invarianteneigenschaft. Bezeichnet man die constanten Werthe dieser Functionen mit $\frac{1}{2}A$ und $\frac{1}{2}B$, so ist demnach immer

$$x^2 + y^2 + z^2 = At + B;$$

d. h. bei der durch jene Differentialgleichungen charakterisirten Bewegung ändert sich das Quadrat der Entfernung zwischen dem bewegten Punkte und dem Anfangspunkte der Coordinaten proportional der Zeit. Es möge mir gestattet sein, noch hinzuzufügen, dass es ein wenigstens nicht präciser Ausdruck ist, wenn jene Differentialgleichungen — wie es oft geschieht — als die Bewegungsgleichungen eines Punktes bezeichnet werden, der gezwungen ist, auf einer bestimmten Kugelfläche zu verbleiben. Denn diess wird nur dann der Fall sein, wenn noch für einen bestimmten Bewegungszustand $xx' + yy' + zz' = 0$ gegeben ist.

Eine weitere Bemerkung, die ich an die angeführten Gleichungen anschliessen will, ist noch folgende. Diese Gleichungen werden unbrauchbar (die rechten Seiten verlieren jede Bedeutung), wenn man von einem Bewegungszustand ausgehen soll, für welchen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Wenn man jedoch die Invarianteneigenschaften der Bewegung, und nicht jene Differentialgleichungen als in erster Reihe gegeben betrachtet, so folgt dann, dass auch $x'^2 + y'^2 + z'^2$ und also auch $x^2 + y^2 + z^2$ immer gleich Null ist, dass der Punkt also seine Lage überhaupt nicht ändert.

4. Auch diese letzte Bemerkung weist darauf zurück, dass *bei Ermittlung des Grundgesetzes der Bewegung in erster Reihe die Invarianteneigenschaften der Bewegung zu fixiren sind.* Der Erfahrung nach kann Bewegung nach verschiedenen Gesetzen erfolgen. Besitzt die betreffende Bewegung überhaupt keine Invarianteneigenschaften, so soll sie *freie Bewegung* heissen; die betreffende Bewegung heisse eine *Zwangsbewegung* in allen jenen Fällen, wo es Functionen des Bewegungszustandes von invariantem Charakter giebt.

Sind $\varphi_1$ und $\varphi_2$ solche invariante Functionen, so wird bei jeder Wahl des $F$ auch $F(\varphi_1, \varphi_2)$ eine solche invariante Function sein. Die sämmtlichen Invarianteneigenschaften einer bestimmten Classe von Bewegungen werden daher durch Aufzählung einer bestimmten Zahl von invarianten Functionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varkappa$$

erschöpft, die von einander unabhängig sind, d. h. zwischen denen kein Zusammenhang von der Form

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varkappa) = 0$$

besteht. Es ist auch unmittelbar klar, dass die Zahl der von einander

algebraisch unabhängigen Functionen $\varphi$, wenn das bewegte System aus $n$ Massenpunkten besteht, unter keiner Bedingung grösser als $6n$ sein kann.

*Zur Aufstellung eines allgemein gültigen Grundgesetzes der Bewegung werden wir also von der Annahme ausgehen müssen, dass eine Zwangsbewegung stattfindet, für welche die gesammten von einander invarianten Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ sind. Der Fall der freien Bewegung ist hierin als specieller Fall inbegriffen, wenn entweder die Anzahl der unabhängigen, invarianten Functionen, $k$ gleich Null gesetzt wird, oder auch sämmtliche $\varphi$ identisch als Constanten gegeben angenommen werden.*

Die einigermassen unbequeme Charakteristik des Zwanges, nach welcher die Functionen $\varphi$ für jeden Bewegungszustand denselben Werth behalten, kann noch dahin abgeändert werden, dass der vollständige Differentialquotient der $\varphi$ nach der Zeit immer verschwindet. Dieser Differentialquotient ist — mit Ausnahme des einen sogleich näher zu besprechenden Falles, wo die invariante Function bloss von der Zeit und den Coordinaten der bewegten Punkte abhängt — eine lineare Function der Beschleunigungscomponenten, deren Coefficienten vom Bewegungszustande abhängen. Die so entstehenden Gleichungen, die kurz als *Gleichungen des Zwanges* bezeichnet werden sollen, haben demnach die Form:

$$A_{11}x_1'' + B_{11}y_1'' + C_{11}z_1'' + \cdots + A_{i1}x_i'' + B_{i1}y_i'' + C_{i1}z_i'' + \cdots = U_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{1k}x_1'' + B_{1k}y_1'' + C_{1k}z_1'' + \cdots + A_{ik}x_i'' + B_{ik}y_i'' + C_{ik}z_i'' + \cdots = U_k,$$

oder kurz zusammengefasst:

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{ij}x_i'' + B_{ij}y_i'' + C_{ij}z_i'') = U_j$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k).$$

Hierin ist

$$A_{ij} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i'}, \quad B_{ij} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i'}, \quad C_{ij} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i'},$$

$$-U_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i}z_i'\right).$$

Gewöhnlich wird nur jener Fall des Zwanges betrachtet, wo zwischen den Coordinaten der bewegten Punkte und der Zeit Gleichungen von der Form:

$$\Phi(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, t) = 0$$

bestehn. Diess ist ein specieller Fall der hier auseinandergesetzten

Annahmen; die Bewegung ist, wie unmittelbar zu sehn, eine solche, für welche

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial\Phi}{\partial z_i}z_i'\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

und

$$\Phi(x..,,x_i, y_i, z_i, ...t) - \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}y_i' - \frac{\partial\Phi}{\partial z_i}z_i'\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]t$$

invariante Functionen sind. Es tritt hier noch der bemerkenswerthe Umstand auf, dass die beiden, einem bestimmten $\Phi$ entsprechenden invarianten Functionen nur eine Zwangsgleichung geben, nämlich:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}y_i'' + \frac{\partial\Phi}{\partial z_i}z_i''\right) + \Psi = 0,$$

wo der ausführliche Ausdruck für $\Psi$ unmittelbar hingeschrieben werden kann.

## II.

## Ueber einige neue mechanische Begriffe.

5. In der Reihe der neuen mechanischen Begriffe, die im Folgenden eingeführt werden sollen, sei zuerst die *Beschleunigungsenergie* des gegebenen Punktsystems (*die Energie der Geschwindigkeitsänderung*) erwähnt. Diese Benennung möge dem Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2)$$

beigelegt werden, wenn das System aus $n$ Massenpunkten besteht, und $m_i$, $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ die Masse, resp. die Beschleunigungscomponenten des $i$-ten Punktes bezeichnen.

Wenn den gewöhnlichen Festsetzungen gemäss der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

(oder was auf dasselbe hinausläuft, die Hälfte dieses Ausdrucks) als Mass der Bewegungsenergie, d. h. der Energie der Ortsveränderung angesehen wird, braucht es wohl kaum einer besonderen Motivirung, wenn wir obigen Ausdruck als Mass derjenigen „Energie" benutzen, mit welcher die Aenderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung erfolgt. Uebrigens kann auch diese Beschleunigungsenergie des Punkt-

systems gradezu als gewöhnliche Energie eines zweiten Punktsystems dargestellt werden. Behufs dieser Darstellung haben wir nur ein Punktsystem zu bilden, in welchem die Coordinaten des $i$-ten Punktes gleich den Geschwindigkeitscomponenten des $i$-ten Punktes im ersten Systeme sind, während die Massen dieselben bleiben; dann entspricht einer bestimmten Bewegung des ersten Systems auch eine bestimmte Bewegung des zweiten Systems, und die (gewöhnliche) Bewegungsenergie des zweiten Punktsystems ist in jedem Zeitpunkte gleich der Beschleunigungsenergie des ersten Punktsystems.

6. Auf demselben Wege, der von der Bewegungsenergie zur Beschleunigungsenergie führt, entstammt auch dem Begriff der *Arbeit* ein neuer Begriff. Insofern jedoch die Definition der Arbeit für veränderliche Kräfte in den gewöhnlichen Darstellungen nicht immer völlig präcis gegeben wird, muss ich auch in Bezug auf diese einige Bemerkungen vorausschicken. Im Falle veränderlicher Kräfte kann ursprünglich die im Zeitraume $\Delta t$ geleistete Arbeit nur annähernd gegeben werden, und wir befreien uns von dem Fehler dieser Annäherung erst dann, wenn wir diese Zeiträume $\Delta t$ unbegrenzt abnehmen lassen, und die Arbeit entsprechend in der Form einer Summe, d. i. eines bestimmten Integrals darstellen. Wenn auch nicht immer in dieser Weise ausgedrückt, ist die Definition der im Zeitraum $\Delta t$ geleisteten Arbeit eigentlich folgende:

Wenn zu Beginn des Zeitraums $\Delta t$ auf den $i$-ten Punkt die Kräfte $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ wirken und die Coordinaten dieses Punktes sich während des Zeitraums $\Delta t$ um $\Delta x_i$, $\Delta y_i$, $\Delta z_i$ ändern, so ist die durchschnittliche Arbeit der Kräfte während der Zeit $\Delta t$ um so genauer gleich

$$\frac{1}{\Delta t}\sum_{i=1}^{n}(X_i\Delta x_i + Y_i\Delta y_i + Z_i\Delta z_i) \times \text{Zeiteinheit},$$

je kleiner der Zeitraum $\Delta t$ ist. Dabei soll unter durchschnittlicher Arbeit die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit verstanden werden, wenn die Leistung der der Zeiteinheit entsprechenden ganzen Arbeit der Zeit proportional vertheilt wäre, d. h. gleichen Zeiten auch immer gleiche Arbeitsleistungen entsprechen würden. Dabei ist als Proportionalitätsfactor jene Grösse zu nehmen, für welche im Zeitraum $\Delta t$ dieselbe Arbeitsleistung resultirt, wie sie in der That stattgefunden. Hiemit ist der genaue Sinn dafür fixirt, wenn wir sagen, dass dem Zeitdifferential $dt$ das Arbeitselement

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

entspricht. Die Behauptung, dass *die im Zeitpunkt t geleistete*

*Arbeit* (genauer die im Zeitpunkt $t$ geleistete durchschnittliche Arbeit*)) gleich

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i') \times \text{Zeiteinheit}$$

wird, ist demnach nur ein kurzgefasster Ausdruck dafür, dass diese Grösse die in dem von $t$ bis $t + \Delta t$ verflossenen Zeitraume geleistete durchschnittliche Arbeit um so genauer ausdrückt, je kleiner $\Delta t$ ist; denn

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i \frac{\Delta x_i}{\Delta t} + Y_i \frac{\Delta y_i}{\Delta t} + Z_i \frac{\Delta z_i}{\Delta t}\right) - \sum_{i=1}^{n}(X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i')$$

wird 0, wenn $\lim \Delta t = 0$ ist.

Aus dieser Definition der im Zeitpunkt $t$ geleisteten Arbeit, folgt dann unmittelbar, dass die in der von $t_0$ bis $t$ verflossenen Zeit geleistete Arbeit gleich

$$\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}(X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i')\, dt.$$

Es geschieht hier genau dasselbe, wie wenn wir den Begriff des Geschwindigkeitsmasses (in der Zeiteinheit durchlaufenen Weges) auf den Zeitpunkt übertragen; die Geschwindigkeit im Zeitpunkte $t$ giebt wieder um so genauer den im Zeitraum $t$ bis $t + \Delta t$ durchlaufenen durchschnittlichen (d. h. auf die Zeiteinheit reducirten) Weg an, je kleiner $\Delta t$ ist.

Dem entsprechend wird es auch passend sein, für den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i')$$

einen besonderen Namen einzuführen, und diesen als *Geschwindigkeitsvirial* der wirkenden Kräfte zu bezeichnen. In Bezug auf die Wahl dieses Namens sei nur daran erinnert, dass (von einem constanten Factor abgesehn) Clausius den ähnlich gebildeten Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i)$$

als Virial bezeichnet. *Demnach ist das Geschwindigkeitsvirial der Kräfte*

---

*) Die ausdrückliche Bezeichnung als „durchschnittliche" Arbeit kann schliesslich wegbleiben, da bei der auf einen *Zeitpunkt* $t$ bezogenen Arbeit kein Missverständniss möglich ist.

*im Zeitpunkte t nichts anderes als der nach der Zeit genommene Differentialquotient der bis zum Zeitpunkt t geleisteten Arbeit;* oder wie man diess wohl auch ausdrücken kann, die Geschwindigkeit der Arbeitsleistung.

Die Arbeit jeder einzelnen Kraft besteht eigentlich in der Verrückung ihres Angriffspunktes längs ihrer eignen Richtung; diese Arbeit ist demnach genauer ausgedrückt eine ortsverändernde Arbeit.

Es scheint demnach wieder ganz natürlich, jene Wirkung der Kraft, durch welche sie die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes, des bewegten Punktes, in ihrer eigenen Richtung ändert, indem sie zu dieser eine mit der Kraft gleichgerichtete Geschwindigkeitscomponente hinzufügt, gleichfalls als Arbeit zu bezeichnen, und zwar, um sie von der gewöhnlichen Arbeit zu unterscheiden, als *geschwindigkeitsändernde* oder *Beschleunigungsarbeit.* Dementsprechend nennen wir wieder

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i x_i'' + Y_i y_i'' + Z_i z_i'')$$

das *Beschleunigungsvirial* des gegebenen Kräftesystems im Zeitpunkte $t$, und die in dem von $t_0$ bis $t$ verstrichenem Zeitraume geleistete *Beschleunigungsarbeit* wird

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} (X_i x_i'' + Y_i y_i'' + Z_i z_i'')\, dt;$$

demnach ist — analog, wie früher — das Beschleunigungsvirial der nach der Zeit genommene Differentialquotient der bis zum Zeitpunkt $t$ geleisteten Beschleunigungsarbeit, oder auch die Geschwindigkeit, mit welcher die Bildung der Beschleunigungsarbeit vor sich geht.

7. Endlich ist noch ein Begriff einzuführen, der jedoch nicht mehr aus bekannten Begriffen durch Vertauschung der Geschwindigkeiten mit den Beschleunigungen entsteht. Es ist diess der folgende. Sei abermals in einem System von $n$ Massenpunkten die Masse des $i$-ten Punktes $m_i$, die Componenten der auf diesen Punkt wirkenden Kräfte $X_i$, $Y_i$, $Z_i$; dann bilden wir den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i},$$

der als *Energem des Kräftesystems* (in Bezug auf das gegebene Punktsystem) bezeichnet werden soll. Dieser neue Namen, der mir von meinem Freunde C. von Szily vorgeschlagen wurde, scheint besonders passend, da jener Ausdruck in der That jene Eigenschaft des wirkenden (Kräfte-) Systems charakterisirt, welcher im bewegten Systeme die

Energie entspricht. Wenigstens in gewisser Beziehung giebt jener Ausdruck die Wirkungsfähigkeit des Kräftesystems in Bezug auf das Punktsystem; und die Einführung eines neuen Wortes schien um so eher angezeigt, als die verwandten Bezeichnungen, wie Wirkung, Action, Intensität schon vielfach in verschiedenem Sinne gebraucht werden.

Denken wir uns nun *einen* Punkt, dessen Masse ($M$) gleich der Summe der Massen der in dem betrachteten Punktsysteme enthaltenen $n$ Punkte,

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n,$$

dann kann man immer eine Kraft von der Grösse $R$ so bestimmen, dass das Energem dieser Kraft in Bezug auf den Punkt von der Masse $M$ ebenso gross, wie das Energem des gegebenen Kräftesystems in Bezug auf das gegebene Punktsystem. Dazu muss nur $R$ so bestimmt werden, dass

$$\frac{R^2}{M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i},$$

also

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{M}{m_i}(X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)},$$

wo der Werth der Quadratwurzel immer positiv zu nehmen ist.

Besteht das System nur aus einem Punkte, so ist $R$ die Grösse der Resultante; es wird angezeigt sein, auch im allgemeinen Falle $R$ als (absolute) Grösse des Kräftesystems zu bezeichnen.

Mit Hülfe von $R$ lassen sich die Componenten des Kräftesystems folgendermassen ausdrücken:

$$X_i = R\alpha_i, \quad Y_i = R\beta_i, \quad Z_i = R\gamma_i,$$

wo sodann:

$$\alpha_i = \frac{X_i}{R}, \quad \beta_i = \frac{Y_i}{R}, \quad \gamma_i = \frac{Z_i}{R};$$

und noch

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2) = 1,$$

wenn wir die häufiger vorkommenden Verhältnisszahlen $\frac{M}{m_i}$ mit $\mu_i$ bezeichnen.

Die Gesammtheit der Coefficienten $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, die der eben erwähnten Relation genügt, drückt eine zweite Eigenschaft des Kräftesystems aus, welche im Falle eines Punktes in die Richtung der auf den Punkt wirkenden Kraft übergeht, und die im allgemeinen Fall

als *Disposition des Kräftesystems* bezeichnet werden soll. Man erhält aus diesen Coefficienten das Verhältniss der auf die einzelnen Punkte wirkenden Kräfte zur Grösse des ganzen Kräftesystems:

$$\frac{\sqrt{X_i^2+Y_i^2+Z_i^2}}{R} = \sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2},$$

und die Richtungscosinusse der auf den $i$-ten Punkt wirkenden Kraft:

$$\frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2}}, \quad \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2}}, \quad \frac{\gamma_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2}}.$$

Die Zahlen $\ldots, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots$ sollen kurz als *Dispositionscoefficienten* bezeichnet werden. Mit Rücksicht auf die zwischen diesen bestehende Relation ist es unmittelbar einzusehen, dass es nur zwei Dispositionen giebt, für welche die gegebenen Zahlen $\ldots a_i, b_i, c_i, \ldots$ den Dispositionscoefficienten proportional sind, d. h. für welche

$$\cdots : \alpha_i : \beta_i : \gamma_i : \cdots = \cdots : a_i : b_i : c_i : \cdots;$$

dazu muss sein:

$$\cdots, \quad \alpha_i = k a_i, \quad \beta_i = k b_i, \quad \gamma_i = k c_i, \quad \cdots$$

und also

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)}}.$$

Zwei Dispositionen, deren Coefficienten sich immer nur im Vorzeichen unterscheiden, haben *gleichen Typus, aber den entgegengesetzten Sinn.* (Im Falle einer Kraft entgegengesetzte Richtung.)

Jedes Kräftesystem erscheint nach dem Vorhergehenden durch seine Grösse und Disposition gegeben.

8. Irgend ein Kräftesystem, $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ in dem bisher gebrauchten Sinne, das kurz als $S$ bezeichnet werde, kann in $k$ partielle Systeme (Componenten im weiteren Sinne des Wortes) zerlegt werden, wenn wir $k$ Kräftesysteme

$$\begin{aligned} &S_1) \ldots, X_i', Y_i', Z_i', \ldots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &S_k) \ldots X_i^{(k)}, Y_i^{(k)}, Z_i^{(k)}, \ldots \end{aligned}$$

bestimmen, so dass:

$$\begin{aligned} X_i &= X_i' + \cdots + X_i^{(k)}, \\ Y_i &= Y_i' + \cdots + Y_i^{(k)}, \\ Z_i &= Z_i' + \cdots + Z_i^{(k)}. \end{aligned}$$

Dann sind $S_1, \ldots, S_k$ durch *Zerlegung* aus $S$ entstanden, und umgekehrt ist $S$ das bei *Zusammensetzung* von $S_1, \ldots, S_k$ resultirende Kräftesystem.

Welche immer auch die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Punktsystems sind, auf welches jene Kräftesysteme wirken, so wird doch, wie unmittelbar zu sehen, die Summe der Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsviriale der partiellen Systeme gleich dem Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsvirial des resultirenden Systems. Und derselbe Satz gilt auch für die gewöhnliche, wie für die Beschleunigungsarbeit.

Hingegen wird im Allgemeinen die Summe der Energeme der partiellen Systeme nicht gleich dem Energem des resultirenden Systems sein.

*Jedes Kräftesystem kann jedoch in einer und nur einer Weise so in zwei partielle Systeme zerlegt werden, dass das eine dieser Systeme eine gegebene*) Disposition besitzt und die Summe der Energeme der beiden partiellen Systeme gleich dem Energeme des gegebenen Systems ist.* Aus dieser Bedingung folgt nämlich immer auch die Grösse des ersten partiellen Systems. Das so bestimmte partielle System nennen wir die *Componente des gegebenen Systems in der gegebenen Disposition.* Hier ist die Bezeichnung als Componente schon in dem gewöhnlichen engern Sinne des Wortes gebraucht, so dass unsre Definition im Falle einer Kraft wieder die Componente dieser Kraft in gegebener Richtung bezeichnet.

Wenn die Disposition des ersten Systems gegeben ist, kann nur mehr dessen Grösse und Sinn der Disposition frei gewählt werden. Sei die Grösse $R'$; dann ist:

$$X_i' = R'\alpha_i', \quad Y_i' = R'\beta_i', \quad Z_i' = R'\gamma_i',$$

und also:

$$X_i'' = X_i - R'\alpha_i', \quad Y_i'' = Y_i - R'\beta_i', \quad Z_i'' = Z_i - R'\gamma_i'.$$

Die auf das Energem bezügliche Bedingung ist also erfüllt, wenn:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i'^2 + Y_i'^2 + Z_i'^2}{m_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i''^2 + Y_i''^2 + Z_i''^2}{m_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i},$$

oder wenn man mit $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ multiplicirt:

$$R'^2 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\overline{X_i - R'\alpha_i'}^2 + \overline{Y_i - R'\beta_i'}^2 + \overline{Z_i - R'\gamma_i'}^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2),$$

*) Unter *gegebener Disposition* verstehen wir immer eine Disposition von gegebenem Typus, deren Sinn also noch entsprechend gewählt werden kann.

und demnach endlich:

$$2R'^2 - 2R' \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i \alpha_i' + Y_i \beta_i' + Z_i \gamma_i') = 0.$$

Wenn wir also von der formellen Lösung $R' = 0$ absehen, die keine wirkliche Zerlegung giebt, da dann auch jedes $X_i'$, $Y_i'$, $Z_i'$ verschwindet, so wird endlich:

$$R' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i \alpha_i' + Y_i \beta_i' + Z_i \gamma_i').$$

Ist $R'$ positiv, so sind demnach die Dispositionscoefficienten für das gesuchte System $\ldots \alpha_i', \beta_i', \gamma_i', \ldots$, seine Grösse $R'$; ist hingegen $R'$ negativ, so wird die Disposition von entgegengesetztem Sinne zu wählen sein, deren Coefficienten: $\cdots - \alpha_i', - \beta_i', - \gamma_i', \cdots$ und die Grösse des Systems wird dann gleich $- R'$. Ist $R' = 0$, so sagen wir, dass das Kräftesystem in der gegebenen Disposition keine Componente besitzt, was so viel bedeutet, dass ihre Grösse, also auch die Grösse jeder in ihr enthaltenen einzelnen Kraft gleich Null ist.

9. Der Begriff der Componente in gegebener Disposition kann jedoch auch ohne Einführung des Energems mit Hülfe der (gewöhnlichen oder Beschleunigungs-) Arbeit entwickelt werden.

Die Componente des Kräftesystems in der Disposition, deren Typus durch die Coefficienten $\ldots, \alpha_i', \beta_i', \gamma_i', \ldots$ gegeben ist, ist nichts anderes als jenes Kräftesystem, dessen Disposition in dieser Weise gegeben, und dessen Geschwindigkeitsvirial gleich dem des ursprünglichen Kräftesystems wird, wenn die Geschwindigkeitscomponenten der bewegten Punkte

$$\ldots \frac{h\alpha_i'}{m_i}, \quad \frac{h\beta_i'}{m_i}, \quad \frac{h\gamma_i'}{m_i}, \ldots$$

sind, wo $h$ einen beliebigen Proportionalitätsfactor bedeutet.

Sei die Grösse der gesuchten Componente $R'$; so muss, um die jetzt angegebene Bedingung zu erfüllen,

$$\sum_{i=1}^{n} R' h \frac{\alpha_i'^2 + \beta_i'^2 + \gamma_i'^2}{m_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{h(X_i \alpha_i' + Y_i \beta_i' + Z_i \gamma_i')}{m_i}$$

sein. Wenn man also mit $h$ kürzt und mit $M$ multiplicirt, wird wieder, wie früher:

$$\sum_{i=1}^{n} R' \mu_i (\alpha_i'^2 + \beta_i'^2 + \gamma_i'^2) = R' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i \alpha_i' + Y_i \beta_i' + Z_i \gamma_i').$$

Bei in angegebener Weise gerichteten Geschwindigkeiten, wird das durch die Zerlegung entstehende zweite partielle System $\ldots X_i'', Y_i'', Z_i'', \ldots$ in dem betreffenden Zeitpunkte überhaupt keine Arbeit leisten; die Bewegung geschieht, wie wenn nur die erste Componente Arbeit leisten würde; diese Componente ist auch in der hier betrachteten Verallgemeinerung die arbeitsleistende oder effective Componente.

Es braucht nicht weiter ausgeführt zu werden, dass man abermals zu dieser Componente gelangt, wenn man in den vorhergehenden Betrachtungen die Geschwindigkeiten und das Geschwindigkeitsvirial mit den Beschleunigungen und dem Beschleunigungsvirial vertauscht.

10. Wenn die Componenten eines Kräftesystems in jenen Dispositionen bekannt sind, deren Typus durch folgende Coefficienten charakterisirt wird:

$$\begin{aligned} D_1) \quad & \ldots, \alpha_{i1}, \beta_{i1}, \gamma_{i1}, \ldots, \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ D_k) \quad & \ldots, \alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}, \ldots, \end{aligned}$$

so ist auch jede Componente bekannt, deren Disposition durch die Coefficienten

$$\ldots, l_1\alpha_{i1} + \cdots + l_k\alpha_{ik}, \quad l_1\beta_{i1} + \cdots + l_k\beta_{ik}, \quad l_1\gamma_{i1} + \cdots + l_k\gamma_{ik}, \ldots$$

dem Typus nach gegeben ist. Bezeichnet man die Grösse jener Componenten mit $R_1, \ldots, R_k$, der letztern mit $\overline{R}$, so ist

$$\overline{R} = l_1 R_1 + \cdots + l_k R_k.$$

Damit die angegebenen Ausdrücke Dispositionscoefficienten seien, müssen die Zahlen $l_1, \ldots, l_k$ der folgenden Gleichung genügen:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \big((l_1\alpha_{i1} + \cdots + l_k\alpha_{ik})^2 + (l_1\beta_{i1} + \cdots + l_k\beta_{ik})^2 + (l_1\gamma_{i1} + \cdots + l_k\gamma_{ik})^2\big) = 1$$

Da die links stehende Summe immer positiv ist, so kann man immer aus einem beliebigen System von Zahlen $u_1, \ldots, u_k$ durch Bestimmung eines entsprechenden $U$ zu einem der Gleichung der Dispositionscoefficienten genügenden Systeme:

$$l_1 = \frac{u_1}{U}, \quad \cdots, \quad l_k = \frac{u_k}{U}$$

gelangen.

Wenn die Coefficienten der in Rede stehenden Dispositionen $D_1, D_2, \ldots, D_k$ so beschaffen sind, dass wenigstens für ein bestimmtes System der Zahlen $u_1, \ldots, u_k$ diese nicht sämmtlich gleich Null sind und den Gleichungen

$$u_1\alpha_{i1} + \cdots + u_k\alpha_{ik} = 0,$$
$$u_1\beta_{i1} + \cdots + u_k\beta_{ik} = 0,$$
$$u_1\gamma_{i1} + \cdots + u_k\gamma_{ik} = 0,$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

genügen, so sagen wir, dass *die Dispositionen* $D_1, D_2, \ldots, D_k$ *von einander nicht unabhängig sind. Dann sind nämlich auch für ein beliebiges Kräftesystem die in die Dispositionen* $D_1, D_2, \ldots, D_k$ *fallenden Componenten nicht von einander unabhängig; sondern es wird, wenn wir die Grösse dieser Componenten mit* $R_1, R_2, \ldots, R_k$ *bezeichnen, immer*

$$u_1R_1 + u_2R_2 + \cdots + u_kR_k = 0$$

*sein.*

Wenn hingegen den vorhin angeschriebenen Gleichungen nur durch die Werthe $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\cdots$, $u_k = 0$ genügt wird, *so sind die Dispositionen* $D_1, D_2, \ldots, D_k$ *von einander unabhängig; dann giebt es nämlich immer Kräftesysteme, für welche die in die Dispositionen* $D_1, D_2, \ldots, D_k$ *fallenden Componenten von der beliebig gewählten Grösse* $R_1, R_2, \ldots, R_k$ *sind.*

Zum Beweise dieser Behauptung ist es nur nothwendig anzuführen, dass die Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ von einander unabhängig oder nicht unabhängig sind, je nachdem unter den sämmtlichen Determinanten $k$-ten Grades, die der aus $k$ Zeilen und $3n$ Colonnen bestehenden Matrix:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \alpha_{11}, & \beta_{11}, & \gamma_{11}, & \cdots, \alpha_{n1}, \beta_{n1}, \gamma_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1k}, & \beta_{1k}, & \gamma_{1k}, & \cdots, \alpha_{nk}, \beta_{nk}, \gamma_{nk} \end{array} \right\|$$

entnommen werden können, wenigstens eine enthalten ist, die nicht gleich Null ist, oder aber diese Determinanten sämmtlich verschwinden.

Im ersten Falle erhalten wir zur Bestimmung der Kräftecomponenten $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ das folgende Gleichungssystem:

$$R_1 = \mu_1(X_1\alpha_{11} + Y_1\beta_{11} + Z_1\gamma_{11}) + \cdots + \mu_n(X_n\alpha_{n1} + Y_n\beta_{n1} + Z_n\gamma_{n1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots

*unabhängige Dispositionen auf uncndlich viele Weisen gegeben werden können.* Ferner:

*Wenn für irgend ein Kräftesystem die Grösse der in $3n$ gegebene, von einander unabhängige Dispositionen fallenden Componenten gegeben ist, so ist das Kräftesystem dadurch vollständig bestimmt.*

Dieser zuletzt angeführte Satz ist nur ein specieller Fall des folgenden allgemeinen Satzes, der später mehrfach zur Anwendung gelangt:

11. *Wenn die Dispositionen der Kräftesysteme $S_1, \ldots, S_k$, die durch $D_1, \ldots, D_k$ bezeichnet werden sollen, von einander unabhängig sind, giebt es immer ein und nur ein Kräftesystem $S$, dessen Disposition $D$ von den Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ nicht unabhängig ist und dessen in die Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ fallenden Componenten gerade die Kräftesysteme $S_1, \ldots, S_k$ sind.*

Die Grösse und Disposition der Systeme $S_1, \ldots, S_k$ möge wie bisher bezeichnet werden; es sei ferner $\overline{R}$ die Grösse des $S$, und seine Dispositionscoefficienten:

$$\cdots,\ l_1\alpha_{i1} + \cdots + l_k\alpha_{ik},\quad l_1\beta_{i1} + \cdots + l_k\beta_{ik},\quad l_1\gamma_{i1} + \cdots + l_k\gamma_{ik},\ \cdots,$$

wo dann noch:

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_i\big((l_1\alpha_{i1} + \cdots + l_k\alpha_{ik})^2 + (l_1\beta_{i1} + \cdots + l_k\beta_{ik})^2 + (l_1\gamma_{i1} + \cdots + l_k\gamma_{ik})^2\big) = 1.$$

Dann erhält man zur Bestimmung von $\overline{R}$, $l_1, \ldots, l_k$ neben dieser letzten Gleichung noch:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i\big(\overline{R}(l_1\alpha_{i1} + \cdots + l_k\alpha_{ik})\,\alpha_{ij} + \overline{R}(l_1\beta_{i1} + \cdots + l_k\beta_{ik})\,\beta_{ij} + \overline{R}(l_1\gamma_{i1} + \cdots + l_k\gamma_{ik})\,\gamma_{ij}\big) = R_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, k),$$

oder auch:

$$(2)\qquad l_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_{i1}\alpha_{ij} + \beta_{i1}\beta_{ij} + \gamma_{i1}\gamma_{ij}) + \cdots + l_k \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_{ik}\alpha_{ij} + \beta_{ik}\beta_{ij} + \gamma_{ik}\gamma_{ij}) = \frac{R_j}{\overline{R}}, \qquad (j = 1, 2, \cdots, k).$$

Das System (2) bestimmt nun $l_1, \ldots, l_k$ als lineare, homogene Functionen der Grössen $\frac{R_1}{\overline{R}}, \cdots, \frac{R_k}{\overline{R}}$; führt man endlich diese Werthe von $l_1, \ldots, l_k$ in (1) ein, so erhält man einen und nur einen positiven Werth für $\overline{R}$.

Es muss hierzu noch bemerkt werden, dass die Determinante des Systems (2) niemals verschwindet, wenn die Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ von einander unabhängig sind. Denn diese Determinante entsteht, wenn wir die früher angeschriebene Matrix mit sich selbst componiren; die so entstandene Determinante kann aber nach bekannten Sätzen (siehe Baltzer, Determinanten, § 6, 2) nur dann verschwinden, wenn sämmtliche in der Matrix enthaltenen Determinanten $k$-ten Grades verschwinden, also die Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ nicht von einander unabhängig sind.

12. *Wenn wir ein Kräftesystem $S$ in der Weise in zwei partielle Systeme, $S_1$ und $S_2$, zerlegen, dass das erste partielle System (im engeren Sinne des Wortes) eine Componente von $S$ ist, so wird auch das zweite partielle System, $S_2$, (im selben Sinne) eine Componente von $S$ sein; und man hat, wenn*

$$D_1) \quad \ldots, \alpha_i', \beta_i', \gamma_i', \ldots,$$
$$D_2) \quad \ldots, \alpha_i'', \beta_i'', \gamma_i'', \ldots,$$

*die Dispositionscoefficienten von $S_1$ und $S_2$ sind, immer die Relation:*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_i'\alpha_i'' + \beta_i'\beta_i'' + \gamma_i'\gamma_i'') = 0.$$

Zwei Dispositionen, zwischen deren Coefficienten diese Relation stattfindet, sollen als *orthogonale* Dispositionen bezeichnet werden. (Für $n = 1$, wo die Dispositionen einfach Richtungen bezeichnen, sind die betreffenden Kräfte in der That senkrecht auf einander gerichtet.)

Sei nämlich die Grösse der in die Disposition $D_1$ fallenden Componente von $S$ gleich $R_1$, dann wird

$$X_i = R'\alpha_i' + X_i'',$$
$$Y_i = R'\beta_i' + Y_i'',$$
$$Z_i = R'\gamma_i' + Z_i''.$$

Wenn nun die Grösse des Kräftesystems $S_2$, ausführlicher $\ldots, X_i'', Y_i'', Z_i'', \ldots$ geschrieben, gleich $R''$ und die Dispositionscoefficienten dieses Systems $\ldots, \alpha_i'', \beta_i'', \gamma_i'', \ldots$ sind, so erhält man, wenn man die letzten Gleichungen mit $\mu_i\alpha_i'$, $\mu_i\beta_i'$, $\mu_i\gamma_i'$ multiplicirt, und dann sämmtliche Gleichungen ($i = 1, \cdots, n$) addirt:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(X_i\alpha_i' + Y_i\beta_i' + Z_i\gamma_i')$$
$$= R' + R'' \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_i'\alpha_i'' + \beta_i'\beta_i'' + \gamma_i'\gamma_i'') = 0.$$

Da aber $R'$ nichts anderes, als der links stehende Ausdruck, und wenn eine wirkliche Zerlegung stattgefunden hat, also $S$ und $S_1$ nicht gleich sind, auch $R''$ nicht Null sein kann, so muss in der That

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_i' \alpha_i'' + \beta_i' \beta_i'' + \gamma_i \gamma_i'') = 0$$

sein. Wenn wir nun die Gleichungen für $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ wieder mit $\mu_i \alpha_i''$, $\mu_i \beta_i''$, $\mu_i \gamma_i''$ multipliciren und addiren, so wird

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(X_i \alpha_i'' + Y_i \beta_i'' + Z_i \gamma_i'') = R'',$$

d. h. $S_2$ ist wirklich die in die Disposition $D_2$ fallende Componente von $S$.

13. Wir kehren nun zum ursprünglichen Probleme zurück. *Alle Kräftesysteme $S_1, \ldots, S_k$, welche die von einander unabhängigen Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ und die Grössen $R_1, \ldots, R_k$ besitzen, lassen sich durch Zusammensetzung zweier Componenten darstellen. Die erste ist nichts anderes als jenes Kräftesystem, dessen Disposition von $D_1, \ldots, D_k$ nicht unabhängig ist und dessen in die Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ fallende Componenten die Grösse $R_1, \ldots, R_k$ besitzen. Dieses System ist nach dem Vorhergehenden vollständig bestimmt. Die Grösse der zweiten Componente kann beliebig gewählt werden; ihre Disposition muss aber orthogonal zu den Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ sein.*

Diess bedeutet so viel, dass wenn

$$\ldots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i, \ldots$$

die Dispositionscoefficienten der zweiten Componente sind, folgende Gleichungen bestehen müssen:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_{ij} \varphi_i + \beta_{ij} \psi_i + \gamma_{ij} \chi_i) = 0,$$
$$(j = 1, 2, \cdots, k).$$

Wenn wir die Grösse der in bekannter Weise zu bestimmenden ersten Componente mit $\overline{R}$, die Coefficienten ihrer Disposition mit

$$\cdots, l_1 \alpha_{i1} + \cdots + l_k \alpha_{ik}, \quad l_1 \beta_{i1} + \cdots + l_k \beta_{ik}, \quad l_1 \gamma_{i1} + \cdots + l_k \gamma_{ik}, \cdots$$

bezeichnen, so kann überhaupt jedes Kräftesystem in der Form:

$$X_i = \overline{R}(l_1 \alpha_{i1} + \cdots + l_k \alpha_{ik}) + X_i'',$$
$$Y_i = \overline{R}(l_1 \beta_{i1} + \cdots + l_k \beta_{ik}) + Y_i'',$$
$$Z_i = \overline{R}(l_1 \gamma_{i1} + \cdots + l_k \gamma_{ik}) + Z_i''$$

geschrieben werden. Ist nun die Grösse des Systems $\ldots, X_i'', Y_i'', Z_i'', \ldots$ gleich $\varrho$ und seine Disposition durch die Coefficienten

$$\ldots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i, \ldots$$

gegeben, so muss, damit die in die Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ fallenden Componenten des Systems $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ die Grösse $R_1, \ldots, R_k$ besitzen, wenn man noch die Werthe der Coefficienten $l_1, \ldots, l_k$ berücksichtigt,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i'' \alpha_{ij} + Y_i'' \beta_{ij} + Z_i'' \gamma_{ij}) = 0,$$
$$(j = 1, \cdots, k)$$

sein. Beachtet man noch, dass

$$X_i'' = \varrho \varphi_i, \quad Y_i'' = \varrho \psi_i, \quad Z_i'' = \varrho \chi_i$$

ist, so folgt hieraus der vorausgeschickten Behauptung gemäss, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (\varphi_i \alpha_{ij} + \psi_i \beta_{ij} + \chi_i \gamma_{ij}) = 0,$$
$$(j = 1, \cdots, k)$$

ist, mit Ausnahme des Falles $\varrho = 0$, der schon mehrfach erwähnt dem Verschwinden der zweiten Componente entspricht.

Ist $\varrho$ nicht Null, so erhält man weiter, indem man die Gleichungen für $X_i, Y_i, Z_i$ noch mit $\mu_i \varphi_i, \mu_i \psi_i, \mu_i \chi_i$ multiplicirt und addirt

$$\varrho = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i \varphi_i + Y_i \psi_i + Z_i \chi_i),$$

womit der Nachweis geliefert ist, dass $\ldots, X_i'', Y_i'', Z_i'', \ldots$ in der That jene Componente des Systems $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ ist, welche in die, durch die Coefficienten $\ldots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i, \ldots$ charakterisirte Disposition fällt.

Geht man von einem bestimmten System $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ und den gegebenen Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ aus, so kann man zuerst $R_1, \ldots, R_k$, sodann die Coefficienten $l_1, \ldots, l_k$ und $\overline{R}$ bestimmen. Hieraus ergiebt sich dann auch das System $\ldots, X_i'', Y_i'', Z_i'', \ldots$ durch die Werthe von $\varrho, \ldots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i, \ldots$.

Diese Resultate lassen sich endlich in folgendem Satze zusammenfassen:

*Ein gegebenes Kräftesystem lässt sich nur in einer Weise derart in zwei Componenten zerlegen, dass die in die beliebig gewählten und von einander unabhängigen Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ fallenden Componenten der ersteren gleich den entsprechenden Componenten des gegebenen Kräftesystems seien, während die Disposition dieser Componente*

*von $D_1, \ldots, D_k$ nicht unabhängig ist, und ferner so, dass die Disposition der zweiten Componente orthogonal zu $D_1, \ldots, D_k$ sei.*

Um diesen Bedingungen zu genügen, müssen die in die Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ fallenden Componenten der zweiten Componente verschwinden; die Disposition dieser Componente muss also orthogonal zu $D_1, \ldots, D_k$ sein. Die erste Componente muss demnach jenes Kräftesystem sein, das wir in Art. 11 bestimmten, und mit welchem auch das zweite vollständig bestimmt ist.

## III.

## Die Grundgesetze der Bewegung.

14. Es sei nun wieder für das zu untersuchende Punktsystem die Masse des $i$-ten Punktes $m_i$, die Componenten der auf diesen Punkt wirkenden Kraft $X_i, Y_i, Z_i$. Die Bewegung des Systems erleidet einen gewissen Zwang. Die Gleichungen des Zwanges seien:

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{i1} x_i'' + B_{i1} y_i'' + C_{i1} z_i'') = U_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{ij} x_i'' + A_{ij} y_i'' + C_{ij} z_i'') = U_j,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{ik} x_i'' + B_{ik} y_i'' + C_{ik} z_i'') = U_k,$$

welche Gleichungen wir selbstverständlich schon als von einander unabhängig betrachten.

Mit Hülfe der vorher eingeführten Begriffe wird sich die Bedeutung dieser Gleichungen sehr einfach ausdrücken lassen. Wenn wir in der $j$-ten Gleichung mit dem positiven Werthe von

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i (A_{ij}^2 + B_{ij}^2 + C_{ij}^2)}$$

dividiren, und kurz

$$\frac{A_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i (A_{ij}^2 + B_{ij}^2 + C_{ij}^2)}} = \alpha_{ij}, \qquad \frac{B_{ij}}{\sqrt{\cdots}} = \beta_{ij}, \qquad \frac{C_{ij}}{\sqrt{\cdots}} = \gamma$$

setzen, so gehen die Gleichungen in folgende Form über:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i1} x_i'' + \beta_{i1} y_i'' + \gamma_{i1} z_i'') = g_1,$$

. . . . . .

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} x_i'' + \beta_{ij} y_i'' + \gamma_{ij} z_i'') = g_j,$$

. . . . . .

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ik} x_i'' + \beta_{ik} y_i'' + \gamma_{ik} z_i'') = g_k.$$

Die in diesen Gleichungen neben den Beschleunigungen auftretenden Coefficienten sind zugleich Coefficienten einer bestimmten Disposition; denn, wie aus dem Werthe der eingeführten Divisoren unmittelbar hervorgeht, hat man:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2 + \beta_{ij}^2) = 1.$$

Die den Coefficienten der einzelnen Gleichungen entsprechenden Dispositionen sollen wieder mit $D_1, D_2, \ldots, D_k$ bezeichnet werden. Diese Dispositionen sind von einander unabhängig, da ja sonst auch die Zwangsgleichungen nicht von einander unabhängig wären.

Wenn die in die Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ fallenden Componenten des auf das Punktsystem wirkenden Kräftesystems die Grösse $R_1, \ldots, R_k$ besitzen, so multipliciren wir die Gleichungen der Reihe nach mit $R_1, \ldots, R_k$ und hierdurch wird allgemein die $j$-te Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} (R_j \alpha_{ij} x_i'' + R_j \beta_{ij} y_i'' + R_j \gamma_{ij} z_i'') = R_j g_j,$$

deren Bedeutung einfach die folgende ist: *Das Beschleunigungsvirial der in die Disposition $D_j$ fallenden Componente des Kräftesystems ist in Folge des Zwanges eine für jeden Zeitpunkt bestimmte Function des Bewegungszustandes.*

(Die betreffende Zwangsgleichung übt nur in einem Falle keinen Einfluss auf das betreffende Resultat aus, wenn nämlich die fragliche Componente verschwindet; dann wissen wir jedoch ohnediess, dass das Beschleunigungsvirial dieser Componente gleich Null ist.)

Ebenso kennen wir nun das Beschleunigungsvirial für jede Componente, die in eine von $D_1, \ldots, D_k$ nicht unabhängige Disposition fällt. Multiplicirt man nämlich die umgeformten Zwangsgleichungen mit den entsprechenden Coefficienten $l_1, \ldots, l_k$, und setzt man wieder

$$\overline{R} = l_1 R_1 + \cdots + l_k R_k,$$

so wird:

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{R}(l_1 \alpha_{i1} + \cdots + l_k \alpha_{ik})\, x_i'' + \overline{R}(l_1 \beta_{i1} + \cdots + l_k \beta_{ik})\, y_i'' + \overline{R}(l_1 \gamma_{i1} + \cdots + l_k \gamma_{ik})\, z_i'') = \overline{R}(l_1 g_1 + \cdots + l_1 g_k),$$

welche Gleichung das Beschleunigungsvirial für jede Componente des auf das Punktsystem wirkenden Kräftesystems ergiebt, deren Disposition von $D_1, \ldots, D_k$ nicht unabhängig ist.

Man kann demnach sämmtliche Componenten des Kräftesystems, deren Dispositionen von $D_1, \ldots, D_k$ nicht unabhängig sind, als *dem Zwange unterworfene Componenten* bezeichnen.

Hingegen wird jede andere Componente des Kräftesystems dem Zwange nur theilweise unterworfen sein, insofern jede in die Dispositionen*) $(D_1, \ldots, D_k)$ fallende Untercomponente derselben ein durch den Zwang bestimmtes Beschleunigungsvirial besitzt. Eine Ausnahme hiervon bildet nur jener Fall, wo die Disposition der betreffenden Componente zu den Dispositionen $(D_1, \ldots, D_k)$ orthogonal ist, also jede in die Dispositionen $D_1, \ldots, D_k$ fallende Untercomponente verschwindet, und also auch das Beschleunigungsvirial dieser Untercomponente von den Zwangsgleichungen unabhängig gleich Null ist. In diesem Falle kann die Componente als dem Zwange nicht unterworfen angesehen, und dementsprechend als *freie Componente* bezeichnet werden. In der That, wie wir auch immer $3n - k$ unabhängige und zu $(D_1, \ldots, D_k)$ orthogonalen Dispositionen bestimmen mögen, und wie wir auch immer das Beschleunigungsvirial der in diese Dispositionen fallenden Componenten annehmen, die so entstehenden Gleichungen werden immer mit den Zwangsgleichungen zusammen bestehen können.

Es ist von vorneherein klar, dass wir bei der Bildung neuer Gleichungen uns auf die zu $(D_1, \ldots, D_k)$ orthogonalen Dispositionen beschränken können. In jedem anderen Falle kann die betreffende Componente nach Art. 13 in zwei Untercomponenten zerlegt werden, deren eine ein durch die Zwangsgleichungen bestimmtes Beschleunigungsvirial besitzt, während die Disposition der zweiten Untercomponente orthogonal zu $(D_1, \ldots, D_k)$ ist.

*Bei Benutzung des eben citirten Satzes kann daher, wenn auf ein gegebenes Punktsystem ein gegebenes Kräftesystem unter gewissen Zwangsbedingungen wirkt, das Kräftesystem für jeden Zeitpunkt in einer (u*

*) Unter „den Dispositionen $(D_1, \ldots, D_k)$" soll im Folgenden kurz die Gesammtheit der von $D_1, \ldots, D_k$ nicht unabhängigen Dispositionen verstand werden.

*nur einer) bestimmten Weise so in zwei Componenten zerlegt werden, dass die eine eine dem Zwange unterworfene, die andere eine freie Componente ist.*

Es braucht wohl keiner besonderen Begründung, wenn wir diese ausgezeichneten Componenten einfach als *freie*, bez. *dem Zwang unterworfene Componente* des Kräftesystems (im Zeitpunkte $t$) bezeichnen.

15. Wir können nunmehr zur Formulirung des angezeigten allgemeinen Grundgesetzes übergehn, unter dessen verschiedenen analogen Formen ich zur ausführlicheren Darstellung in erster Reihe eine solche wähle, die unter diesen in gewisser Beziehung als die einfachste und natürlichste anzusehn ist.

Dieses Grundgesetz oder allgemeine Princip der Dynamik ist das folgende:

*Das Beschleunigungsvirial der freien Componente des auf das Punktsystem wirkenden Kräftesystems ist in jedem Zeitpunkte gleich dem Energem dieser freien Componente des Kräftesystems.*

*Unter allen Bewegungen, die den Zwangsgleichungen und dem in Bezug auf das Beschleunigungsvirial soeben ausgesprochenen Satze gemäss erfolgen könnten, findet in Wirklichkeit diejenige statt, für welche die Beschleunigungsenergie in jedem Zeitpunkte ein Minimum ist.*

Für die Bedeutung dieses Gesetzes ist es noch von Wichtigkeit, folgendes zu bemerken. Die Behauptung, dass für zwei Bewegungen das Beschleunigungsvirial der wirkenden Kräfte in jedem Zeitpunkte dasselbe ist, bedeutet — nur in mathematisch einfacherer Fassung — genau dasselbe, wie dass für die beiden Bewegungen in jedem beliebigen Zeitraum die geleistete Beschleunigungsarbeit dieselbe ist. Ebenso wird die Behauptung, dass für eine bestimmte Bewegung das Beschleunigungsvirial in jedem Zeitpunkt grösser (kleiner) ist, als für eine bestimmte zweite Bewegung, äquivalent sein damit, dass für die erste Bewegung in jedem Zeitraum die Beschleunigungsarbeit grösser (kleiner) ist, als für die zweite Bewegung.

Das oben ausgesprochene Gesetz besteht aus zwei Theilen; der erste bestimmt für jeden Zeitpunkt die Grösse des Beschleunigungsvirials der Kräfte; der zweite unterwirft die Beschleunigungsenergie einer Minimumsbedingung. Da natürlicherweise auch dieses Gesetz den Charakter eines Axioms besitzen muss, wird seine Begründung darin bestehn, dass wir zeigen, wie dieses Gesetz, welches immer auch die wirkenden Kräfte und die Zwangsgleichungen seien, immer zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen der Bewegung und nur zu diesen führt.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem ersten Theile des Gesetzes. Da für die dem Zwang unterworfene Componente des Kräftesystems das Beschleunigungsvirial (und also auch die Beschleunigungsarbeit)

bekannt ist, ist es klar, dass dieser auch so ausgedrückt werden kann, dass das Beschleunigungsvirial des Kräftesystems für jeden Zeitpunkt (oder auch die Beschleunigungsarbeit des Kräftesystems für jedes Zeitintervall) gegeben ist.

Der Inhalt dieses ersten Theiles kann demnach in eine Gleichung, *die Gleichung des Beschleunigungsvirials* zusammengefasst werden. Mit Beibehaltung der bisher gebrauchten Bezeichnungen wird sich diese Gleichung folgendermassen entwickeln lassen.

Seien wieder die Componenten der auf den $i$-ten Punkt (von der Masse $m_i$) wirkenden Kraft $X_i$, $Y_i$, $Z_i$; die Gleichungen des Zwanges:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{ij}x_i'' + \beta_{ij}y_i'' + \gamma_{ij}z_i'') = g_j.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

Dann erhält man zuerst in Bezug auf die dem Zwange unterworfene Componente des Kräftesystemes $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ deren Grösse durch $\overline{R}$, deren Dispositionscoefficienten durch

$$\ldots l_1\alpha_{i1} + \cdots + l_k\alpha_{ik},\ l_1\beta_{i1} + \cdots + l_k\beta_{ik},\ l_1\gamma_{i1} + \cdots + l_k\gamma_{ik}, \cdots$$

bezeichnet werden sollen, nach Art. 11 folgende Gleichungen zur Bestimmung von $\overline{R}$, $l_1, \ldots, l_k$:

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i((l_1\alpha_{i1} + \cdots + l_k\alpha_{ik})^2 + (l_1\beta_{i1} + \cdots + l_k\beta_{ik})^2 + (l_1\gamma_{i1} + \cdots + l_k\gamma_{ik})^2) = 1,$$

und

$$l_1\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\alpha_{i1}\alpha_{ij} + \beta_{i1}\beta_{ij} + \gamma_{i1}\gamma_{ij}) + \cdots$$

$$+ l_k\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\alpha_{ik}\alpha_{ij} + \beta_{ik}\beta_{ij} + \gamma_{ik}\gamma_{ij}) = \frac{R_j}{\overline{R}},$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

wo wieder

$$R_j = \sum_{i=1}^{n}\mu_i(X_i\alpha_{ij} + Y_i\beta_{ij} + Z_i\gamma_{ij}).$$

Ferner ist für die freie Componente des Kräftesystems:

$$X_i'' = X_i - \overline{R}(l_1\alpha_{i1} + \cdots + l_k\alpha_{ik}),$$
$$Y_i'' = Y_i - \overline{R}(l_1\beta_{i1} + \cdots + l_k\beta_{ik}),$$
$$Z_i'' = Z_i - \overline{R}(l_1\gamma_{i1} + \cdots + l_k\gamma_{ik}).$$

Das Beschleunigungsvirial für die dem Zwange unterworfene Componente wird:

$$\overline{R}\sum_{i=1}^{n}((l_1\alpha_{i1}+\cdots+l_k\alpha_{ik})x_i'' + (l_1\beta_{i1}+\cdots+l_k\beta_{ik})y_i'' + (l_1\gamma_{i1}+\cdots+l_k\gamma_{ik})z_i''),$$

und kann mit Berücksichtigung der Zwangsgleichungen noch folgendermassen geschrieben werden:

$$\overline{R}(l_1 g_1+\cdots+l_k g_k);$$

das Beschleunigungsvirial der freien Componente wird dem aufgestellten Satze gemäss, wenn wir noch mit $e$ das Energem des Kräftesystems in Bezug auf das Punktsystem bezeichnen und wieder

$$M = m_1+\cdots+m_n$$

ist:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{R}(l_1\alpha_{i1}+\cdots+l_k\alpha_{ik}))^2+\cdots+(Z_i-\overline{R}(l_1\gamma_{i1}+\cdots+l_k\gamma_{ik}))^2}{m_i} = e-\frac{\overline{R}^2}{M},$$

und schliesslich wird also *die Gleichung des Beschleunigungsvirials:*

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i x_i''+Y_i y_i''+Z_i z_i'') = \overline{R}(l_1 g_1+\cdots+l_k g_k)+e-\frac{\overline{R}^2}{M}.$$

16. Die für die Beschleunigungsenergie aufgestellte Minimumsbedingung ergiebt nun weiter die Beschleunigungscomponenten $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ als Functionen des Bewegungszustandes und der Kräftecomponenten $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$.

Seien, wie in diesen Variationsproblemen üblich, $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ jene vorläufig als existirend angenommenen, aber noch unbekannten Functionen, die der Minimumsbedingung genügen. Für irgend eine andere Bewegung treten an Stelle von $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ Functionen $x_i''+\Delta x_i''$, $y_i''+\Delta y_i''$, $z_i''+\Delta z_i''$, wo die (endlichen) Variationen $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ nur der Bedingung unterworfen sind, dass auch die variirten Functionen der Gleichung des Beschleunigungsvirials und den Gleichungen des Zwanges genügen müssen.

Da die Bedingungsgleichungen für $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ sämmtlich linear sind, werden auch die Bedingungsgleichungen für $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ linear und homogen sein. Diese lauten:

(a) $$\sum_{i=1}^{n}(X_i\Delta x_i''+Y_i\Delta y_i''+Z_i\Delta z_i'')=0,$$

(b) $$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{ij}\Delta x_i''+\beta_{ij}\Delta y_i''+\gamma_{ij}\Delta z_i'')=0.$$

$$(j=1,2,\ldots,k).$$

Die Beschleunigungsenergie des Punktsystems soll mit $E_2$ bezeichnet werden. Es ist:

$$E_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2),$$

also:

$$\Delta E_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left((x_i'' + \Delta x_i'')^2 + (y_i'' + \Delta y_i'')^2 + (z_i'' + \Delta z_i'')^2\right)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2),$$

oder endlich:

$$\frac{1}{2}\Delta E_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'' \Delta x_i'' + y_i'' \Delta y_i'' + z_i'' \Delta z_i'')$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{\Delta x_i''}^2 + \overline{\Delta y_i''}^2 + \overline{\Delta z_i''}^2).$$

Multiplicirt man die Gleichung (a) und die Gleichungen (b) mit den vorläufig unbestimmten Multiplicatoren $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und zieht die so erhaltenen Ausdrücke von $\frac{1}{2}\Delta E_2$ ab, so wird

$$\frac{1}{2}\Delta E_2 = \sum_{i=1}^{n} (m_i x_i'' - \mu X_i - \lambda_1 \alpha_{i1} - \cdots - \lambda_k \alpha_{ik}) \Delta x_i''$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (m_i y_i'' - \mu Y_i - \lambda_1 \beta_{i1} - \cdots - \lambda_k \beta_{ik}) \Delta y_i''$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (m_i z_i'' - \mu Z_i - \lambda_1 \gamma_{i1} - \cdots - \lambda_k \gamma_{ik}) \Delta z_i''$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{\Delta x_i''}^2 + \overline{\Delta y_i''}^2 + \overline{\Delta z_i''}^2).$$

Der absolute Werth der Variationen $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ kann auch so klein angenommen werden, dass das durch die in den drei ersten Zeilen stehenden Glieder erster Ordnung bestimmte Vorzeichen bei Addition der in der vierten Zeile enthaltenen Glieder zweiter Ordnung nicht mehr verändert wird. Mit $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ genügt jedoch auch $-\Delta x_i''$, $-\Delta y_i''$, $-\Delta z_i''$ den in den Gleichungen (a) und (b) enthaltenen Bedingungen. Da man demnach dem $\Delta E_2$ auch Werthe von entgegengesetzten Vorzeichen geben könnte, können die $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ der Minimumsbedingung überhaupt nicht genügen, mit Ausnahme des

einen Falles, wo die Coefficienten von $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ sämmtlich gleich Null sind, also die Glieder erster Ordnung überhaupt verschwinden.

Soll diess der Fall sein, so müssen folgende Gleichungen bestehn:

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} m_i x_i'' &= \mu X_i + \lambda_1 \alpha_{i1} + \cdots + \lambda_k \alpha_{ik}, \\ m_i y_i'' &= \mu Y_i + \lambda_1 \beta_{i1} + \cdots + \lambda_k \beta_{ik}, \\ m_i z_i'' &= \mu Z_i + \lambda_1 \gamma_{i1} + \cdots + \lambda_k \gamma_{ik}, \\ &(i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

wo die bisher unbestimmt gebliebenen Multiplicatoren $\mu$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ noch so zu bestimmen sein werden, dass die resultirenden Functionen $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ der Gleichung des Beschleunigungsvirials und den Zwangsgleichungen genügen; diese Bedingungen ergeben eine eindeutige Bestimmung der Multiplicatoren.

Es möge sogleich noch bemerkt werden, dass sodann

$$\Delta E_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{\Delta x_i''^2} + \overline{\Delta y_i''^2} + \overline{\Delta z_i''^2})$$

immer positiv ist, die Beschleunigungsenergie also für die in der angegebenen Weise bestimmten Functionen $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ ein *absolutes Minimum* wird.

17. Wir gehn endlich zur Bestimmung der als Multiplicatoren auftretenden Functionen $\mu$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ über. Wenn man die Werthe von $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ in die Gleichung des Beschleunigungsvirials und in die Zwangsgleichungen einsetzt, erhält man:

$$\sum_{i=1}^{n} \left( X_i \frac{\mu X_i + \lambda_1 \alpha_{i1} + \cdots + \lambda_k \alpha_{ik}}{m_i} + Y_i \frac{\mu Y_i + \lambda_1 \beta_{i1} + \cdots + \lambda_k \beta_{ik}}{m_i} + Z_i \frac{\mu Z_i + \lambda_1 \gamma_{i1} + \cdots + \lambda_k \gamma_{ik}}{m_i} \right) = \overline{R}(l_1 g_1 + \cdots + l_k g_k) + e - \frac{\overline{R}^2}{M};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\mu X_i + \lambda_1 \alpha_{i1} + \cdots + \lambda_k \alpha_{ik}}{m_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \frac{\mu Y_i + \lambda_1 \beta_{i1} + \cdots + \lambda_k \beta_{ik}}{m_i} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\mu Z_i + \lambda_1 \gamma_{i1} + \cdots + \lambda_k \gamma_{ik}}{m_i} = g_j,$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k).$$

Diess ist in der That ein System von $k + 1$ linearen Gleichungen zur Bestimmung der $k + 1$ Unbekannten $\mu$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Dieses System, in welchem wieder:

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n,$$

$$e = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i},$$

kann noch, wenn wir jede Gleichung mit $M$ multipliciren, folgendermassen geschrieben werden:

$$Me\mu + \lambda_1 R_1 + \cdots + \lambda_k R_k = M\overline{R}(l_1 g_1 + \cdots + l_k g_k) + Me - \overline{R}^2,$$

$$R_j\mu + \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_{i1}\alpha_{ij} + \beta_{i1}\beta_{ij} + \gamma_{i1}\gamma_{ij}) + \cdots$$

$$+ \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_{ik}\alpha_{ij} + \beta_{ik}\beta_{ij} + \gamma_{ik}\gamma_{ij}) = Mg_j$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k).$$

Wenn man die letzteren $k$ Gleichungen der Reihe nach mit $\overline{R}l_1, \ldots, \overline{R}l_k$ multiplicirt, und von der ersten Gleichung abzieht, werden in der resultirenden Gleichung als Coefficienten von $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die folgenden Ausdrücke auftreten:

$$R_1 - \overline{R}\Big[ \quad l_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_{i1}\alpha_{i1} + \beta_{i1}\beta_{i1} + \gamma_{i1}\gamma_{i1}) + \cdots$$

$$+ l_k \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_{i1}\alpha_{ik} + \beta_{i1}\beta_{ik} + \gamma_{i1}\gamma_{ik}) \Big],$$

. . . . . .

$$R_k - \overline{R}\Big[ \quad l_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_{ik}\alpha_{i1} + \beta_{ik}\beta_{i1} + \gamma_{ik}\gamma_{i1}) + \cdots$$

$$+ l_k \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_{ik}\alpha_{ik} + \beta_{ik}\beta_{ik} + \gamma_{ik}\gamma_{ik}) \Big].$$

Wie man aus den in Art. 15 berechneten Werthen von $\frac{R_j}{\overline{R}}$ unmittelbar ersieht, verschwinden diese Ausdrücke; da ferner

$$\overline{R}(R_1 l_1 + \cdots + R_k l_k) = \overline{R}^2,$$

erhält man endlich für die Endgleichung:

$$(Me - \overline{R}^2)\mu = Me - \overline{R}^2,$$

das heisst

$$\mu = 1, \tag{A}$$

mit Ausnahme des Falles, wo $e = \frac{\overline{R}^2}{M}$. Da $e$ das Energem des ganzen

Kräftesystems, $\frac{\bar{R}^2}{M}$ das Energem der dem Zwange unterworfenen Componente bedeutet, kann diess nur dann geschehn, wenn das Energem, also auch die Grösse der freien Componente gleich Null ist, oder also wenn die Disposition des ganzen Kräftesystems mit einer der Dispositionen $(D_1, \ldots, D_k)$ zusammenfällt. In jedem andern Falle hat man nun zur Bestimmung von $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$:

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{i1}\alpha_{i1} + \beta_{i1}\beta_{i1} + \gamma_{i1}\gamma_{i1}}{m_i} + \cdots + \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{i1}\alpha_{ik} + \beta_{i1}\beta_{ik} + \gamma_{i1}\gamma_{ik}}{m_i} = g_1 - \frac{R_1}{M},$$

(B) $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ik}\alpha_{i1} + \beta_{ik}\beta_{i1} + \gamma_{ik}\gamma_{i1}}{m_i} + \cdots + \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ik}\alpha_{ik} + \beta_{ik}\beta_{ik} + \gamma_{ik}\gamma_{ik}}{m_i} = g_k - \frac{R_k}{M}.$$

Die Determinante dieses Systems ist dieselbe, wie die am Schlusse des Art. 11 behandelte; sie verschwindet nie und das Gleichungssystem (B) giebt daher immer ein und nur ein bestimmtes Werthsystem für die $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Das Wesen des früher erwähnten Ausnahmefalles besteht darin, dass die zur Bestimmung der $k+1$ Unbekannten dienenden Gleichungen (so wie die ursprünglichen $k+1$ Bedingungsgleichungen) nicht mehr von einander unabhängig sind, sondern die erste eine Folge der übrigen wird. Dann enthalten aber die unter (c) stehenden linearen Formen für $m_i x_i''$, $m_i y_i''$, $m_i z_i''$ überhaupt nicht mehr $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ als von einander unabhängige Unbestimmte, sondern nur $k$ aus diesen linear zusammengesetzte Ausdrücke. Da jetzt die Disposition des Kräftesystems $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ mit einer der Dispositionen $(D_1, \ldots, D_k)$ zusammenfällt, wird bei passender Bestimmung von $h_1, \ldots, h_k$:

$$X_i = \sqrt{Me}\,(h_1\alpha_{i1} + \cdots + h_k\alpha_{ik}),$$
$$Y_i = \sqrt{Me}\,(h_1\beta_{i1} + \cdots + h_k\beta_{ik}),$$
$$Z_i = \sqrt{Me}\,(h_1\gamma_{i1} + \cdots + h_k\gamma_{ik}),$$

und also:

$$m_i x_i'' = (h_1\mu\sqrt{Me} + \lambda_1)\alpha_{i1} + \cdots + (h_k\mu\sqrt{Me} + \lambda_k)\alpha_{ik},$$
$$m_i y_i'' = (h_1\mu\sqrt{Me} + \lambda_1)\beta_{i1} + \cdots + (h_k\mu\sqrt{Me} + \lambda_k)\beta_{ik},$$
$$m_i z_i'' = (h_1\mu\sqrt{Me} + \lambda_1)\gamma_{i1} + \cdots + (h_k\mu\sqrt{Me} + \lambda_k)\gamma_{ik},$$

wo die Coefficienten von $\alpha_{i1}, \beta_{i1}, \gamma_{i1}, \ldots$ auch dann noch dur $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ willkürlich bestimmt werden können, wenn man $\mu = 1$ set Diese Festsetzung für $\mu$ ändert also nichts an der Allgemeinheit d Gleichungen, und man erhält, nachdem diess geschehn, zur Besti mung von $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ genau dieselben Gleichungen, wie früher.

Der Satz vom Minimum der Beschleunigungsenergie führt a immer zu den folgenden Differentialgleichungen:

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} m_i x_i'' &= X_i + \lambda_1 \alpha_{i1} + \cdots + \lambda_k \alpha_{ik}, \\ m_i y_i'' &= Y_i + \lambda_1 \beta_{i1} + \cdots + \lambda_k \beta_{ik}, \\ m_i z_i'' &= Z_i + \lambda_1 \gamma_{i1} + \cdots + \lambda_k \gamma_{ik}, \end{aligned}$$

wo die Coefficienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ aus dem Gleichungssystem (B) zu bestimmen sind.

Wenn der Zwang, wie dies bisher meistens geschehn, einfacher durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \varphi_1(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, t) &= C_1, \\ \cdots\cdots\cdots\

18. Ein Grundgesetz der Bewegung, das formell dem jetzt dargelegten vollständig analog ist, dessen Inhalt aber trotzdem ein wesentlich verschiedener ist, kann erhalten werden, wenn man die dem Beschleunigungsvirial und der Beschleunigungsenergie zukommenden Rollen mit einander vertauscht. Der erste Theil dieses Gesetzes wird dann die Grösse der Beschleunigungsenergie bestimmen, während der zweite das Beschleunigungsvirial einer Maximumsbedingung unterwirft.

Zur ausführlichen Auseinandersetzung dieses Gesetzes müsste die Zerlegung und Zusammensetzung der Systeme von Beschleunigungen grade so behandelt werden, wie diess früher für Kräftesysteme geschehn ist; diese beiden Theorien sind jedoch nicht mehr identisch, sobald es sich nicht um Punkte, sondern um Punktsysteme handelt. Der Grund hiervon liegt darin, dass während die Grösse eines Kräftesystems durch die Quadratwurzel aus

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i}$$

zu messen ist, der entsprechende Ausdruck für Beschleunigungssysteme die Beschleunigungsenergie

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2)$$

ist; die entsprechenden Coefficienten in diesen Ausdrücken haben nicht gleiche, sondern reciproke Werthe.

Auch das System von Beschleunigungen kann in eine freie und eine dem Zwange unterworfene Componente zerlegt werden; jeder dieser Componenten entspricht ein besonderer Theil der Beschleunigungsenergie. Der eine Theil, welcher der dem Zwange unterworfenen Componente entspricht, ist wieder aus den Zwangsbedingungen gegeben, während jene Beschleunigungsenergie, welche der freien Componente des Beschleunigungssystems zuzuordnen ist, gleich dem Energem der *entsprechenden* Componente des wirkenden Kräftesystems ist. Diese Festsetzung des Grundgesetzes der Bewegung scheint mir jedoch der früheren gegenüber weniger einfach und natürlich, weil eine besondere Annahme darüber nothwendig, was unter *entsprechenden* Dispositionen für ein an dem gegebenen Punktsystem haftendes Beschleunigungssystem und ein auf das gegebene Punktsystem wirkendes Kräftesystem verstanden werden soll. Diess ist eigentlich ein neues Axiom, das bei der ersten Formulirung vermieden wird, da dort Beschleunigungsvirial und Energem derselben Componente des Kräftesystems zusammengestellt wird.

Nach der Aufstellung der *Gleichung der Beschleunigungsenergie*

würde der zweite Theil des jetzt skizzirten Grundgesetzes folgendermassen lauten:

*Unter allen Bewegungen, die den Zwangsgleichungen und der Gleichung der Beschleunigungsenergie gemäss erfolgen könnten, findet in Wirklichkeit diejenige statt, für welche das Beschleunigungsvirial in jedem Zeitpunkte ein Maximum ist.*

So weit der Inhalt dieses Gesetzes dem früheren gegenüber neu ist, kann er jedoch auch ohne Zuziehung neuer Gesichtspunkte ausgesprochen werden, wird aber dann nur eine Eigenschaft und kein allgemeines Grundgesetz der Bewegung ausdrücken; indem der so entstandene Satz, in welchem der erste Theil des Gesetzes fehlt, zur vollständigen Bestimmung der Bewegung wohl *nothwendige*, aber *nicht hinreichende* Angaben enthält. Dieser Satz lautet, wie folgt:

19. *Bei der wirklich stattfindenden Bewegung ist das Beschleunigungsvirial in jedem Zeitpunkt grösser, als bei jeder andern Bewegung, welche den Zwangsgleichungen entspräche und für welche die Beschleunigungsenergie in jedem Zeitpunkte dieselbe wäre, wie für die wirklich stattfindende Bewegung.*

Als „wirklich stattfindende" Bewegung ist natürlich diejenige zu verstehn, welche durch die früher entwickelten Gleichungen definirt wird. Die „Bewegungen", mit welchen eine Vergleichung stattfindet, sind in der Weise als gegeben zu betrachten, dass $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ beliebige Functionen des Bewegungszustandes und der Kräftecomponenten ..., $X_i$, $Y_i$, $Z_i$, ... sind, die jedoch den in den Zwangsgleichungen enthaltenen Bedingungen gemäss gewählt sein müssen.

Wenn man unter $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ die in den Gleichungen (C) definirten Functionen versteht, dann können irgend welche andere Functionen des Bewegungszustandes und der Kräftecomponenten, welche bei anderen Bewegungsgesetzen die Beschleunigungscomponenten ergeben würden, mit $x_i'' + \Delta x_i''$, $y_i'' + \Delta y_i''$, $z_i'' + \Delta z_i''$ bezeichnet werden, wo $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ beliebige (endliche) Variationen bedeuten, die nur den aus den Zwangsgleichungen entspringenden Bedingungen genügen müssen. Bezeichnet man das Beschleunigungsvirial kurz mit $V_2$, also:

$$V_2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i x_i'' + Y_i y_i'' + Z_i z_i''),$$

so wird:

$$\Delta V_2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i \Delta x_i'' + Y_i \Delta y_i'' + Z_i \Delta z_i''). \tag{1}$$

Die aus den Zwangsgleichungen für $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ entstammenden Bedingungen sind, wie früher:

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} \Delta x_i'' + \beta_{ij} \Delta y_i'' + \gamma_{ij} \Delta z_i'') = 0; \quad (j = 1, \ldots, k)$$

soll endlich noch die Beschleunigungsenergie für alle in Betracht kommenden Bewegungen in jedem Zeitpunkte dieselbe sein, so hat man noch:

$$\frac{1}{2} \Delta \left( \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2) \right) = 0,$$

oder ausführlich geschrieben:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'' \Delta x_i'' + y_i'' \Delta y_i'' + z_i'' \Delta z_i'') + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{\Delta x_i''}^2 + \overline{\Delta y_i''}^2 + \overline{\Delta z_i''}^2) = 0.$$

Wenn man die mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ multiplicirten, unter (2) stehenden Ausdrücke zu $\Delta V_2$ addirt, und noch den in (3) links stehenden Ausdruck abzieht, wird sich der Werth von $\Delta V_2$ nicht ändern, da alle diese Grössen gleich Null sind; Berücksichtigt man noch, dass $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ aus den Gleichungen (C) gegeben sind, so wird schliesslich:

$$\Delta V_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{\Delta x_i''}^2 + \overline{\Delta y_i''}^2 + \overline{\Delta z_i''}^2),$$

d. h. die Variation des Beschleunigungsvirials ist immer negativ, und also das Beschleunigungsvirial in jedem Zeitpunkt oder auch die Beschleunigungsarbeit in jedem Zeitintervall für die wirklich stattfindende Bewegung grösser als für jede andere, den angegebenen Bedingungen nach mögliche Bewegung.

20. Die Grundgleichungen der Dynamik geben die Beschleunigungscomponenten als Functionen des Bewegungszustandes und der Kräftecomponenten. Die gewöhnliche Fragestellung kann aber auch umgekehrt werden. Man kann die Beschleunigungscomponenten als gegebene Functionen des Bewegungszustandes betrachten und ein allgemeines Princip suchen, das nun die Componenten der wirkenden Kräfte als Functionen des Bewegungszustandes und der Beschleunigungscomponenten ergiebt. Es versteht sich von selbst, dass in diesem Falle von Zwang im bisherigen Sinne des Wortes nicht die Rede sein kann; die Zwangsbedingungen beschränken die Functionalwerthe der Beschleunigungscomponenten; jetzt aber sind diese bestimmte Functionen und weitere

Bedingungen können natürlich nicht existiren.*) Man kann das angedeutete Problem aber auch so formuliren, dass der Zwang ein *vollständiger* ist, d. h. dass $3n$ Zwangsgleichungen die Beschleunigungscomponenten vollständig bestimmen, und nun jene Kräfte zu bestimmen sind, welche dieselbe Bewegung des Punktsystems ohne jeden Zwang ergeben. Das Problem wird durch folgenden Satz erledigt.

*Das Beschleunigungsvirial eines ohne Zwang wirkenden Kräftesystems ist in jedem Zeitpunkte gleich der Beschleunigungsenergie des Punktsystems; das Energem des wirklich auftretenden Kräftesystems ist kleiner als das jedes anderen Kräftesystems, dessen Beschleunigungsvirial gleichfalls in jedem Zeitpunkte der Beschleunigungsenergie des Punktsystems gleich ist.*

Seien wieder $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ die vorläufig als existirend angenommenen Kräftecomponenten, die jener Minimumsbedingung genügen; für irgend ein anderes Kräftesystem entsprechend

$$\ldots, X_i + \Delta X_i, \; Y_i + \Delta Y_i, \; Z_i + \Delta Z_i, \ldots$$

dann müssen die Variationen $\Delta X_i$, $\Delta Y_i$, $\Delta Z_i$ der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i'' \Delta X_i + y_i'' \Delta Y_i + z_i'' \Delta Z_i) = 0$$

genügen. Ferner ist

$$e = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i},$$

also:

$$\frac{1}{2} \Delta e = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i}{m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\Delta X_i}^2 + \overline{\Delta Y_i}^2 + \overline{\Delta Z_i}^2}{m_i};$$

und wenn man wieder in der Bedingungsgleichung mit einem vorläufig unbestimmten Factor $\mu$ multiplicirt und abzieht

$$\frac{1}{2} \Delta e = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{X_i}{m_i} - \mu x_i'' \right) \Delta X_i + \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{Y_i}{m_i} - \mu y_i'' \right) \Delta Y_i$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{Z_i}{m_i} - \mu z_i'' \right) \Delta Z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\Delta X_i}^2 + \overline{\Delta Y_i}^2 + \overline{\Delta Z_i}^2}{m_i}.$$

*) Als Zwangsgleichungen könnten hier Bedingungen von der Form

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ij} X_i + b_{ij} Y_i + c_{ij} Z_i) = g_j$$

eingeführt werden, die in gewisse Dispositionen fallende Componenten des gesu Kräftesystems bestimmen würden. Die consequente Durchführung dieser fassung leitet zu Betrachtungen, die dem Dualitätsprincip der Geometr gewisser Beziehung analog sind.

Das Kräftesystem kann also nur dann der Minimumsbedingung genügen, wenn:

$$\frac{X_i}{m_i} = \mu x_i'',$$

$$\frac{Y_i}{m_i} = \mu y_i'',$$

$$\frac{Z_i}{m_i} = \mu z_i'',$$

in welchem Falle dann auch

$$\frac{1}{2}\Delta e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta X_i^2 + \Delta Y_i^2 + \Delta Z_i^2}{m_i},$$

also die Variation des Energems immer positiv und demnach das Energem ein absolutes Minimum ist.

Zur Bestimmung von $\mu$ dient nun der erste Theil des Satzes, nach welchem:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i x_i'' + Y_i y_i'' + Z_i z_i'') = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2);$$

setzt man die Werthe von $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ hier ein, so folgt unmittelbar

$$\mu = 1;$$

mit Ausnahme des Falles, wo jede Beschleunigungscomponente gleich Null ist. Dann ist aber — ganz unabhängig von $\mu$ — auch jedes $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ gleich Null, und man kann also auch in diesem Ausnahmefalle, ohne das Resultat zu ändern, $\mu = 1$ nehmen. Die Schlussgleichungen

$$m_i x_i'' = X_i, \quad m_i y_i'' = Y_i, \quad m_i z_i'' = Z_i$$

sind in der That die Gleichungen der freien Bewegung.

21. Da jede Bewegung eines Punktsystems als unter Einwirkung gewisser fictiver Kräfte vor sich gehende freie Bewegung angesehn werden kann, kann das *Gesetz der Zwangsbewegung* auch so gefasst werden, dass jene Kräfte angegeben werden, die dieselbe Bewegung des Punktsystems ohne Zwang ergeben würden. Da aus dem Kräftesystem $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ jedes andere Kräftesystem durch Hinzufügung eines entsprechenden Kräftesystems $\ldots, X_i', Y_i', Z_i'$ entstehn kann, ist man auch berechtigt in dieser Auffassung zu sagen, dass *in Folge des Zwanges ein bestimmtes supplementäres Kräftesystem* $\ldots, X_i', Y_i', Z_i', \ldots$, *das System der Zwangskräfte* (Bedingungskräfte) *auftritt.*

Das Gesetz der Zwangskräfte bestimmt nun dieses supplementäre System in folgender Weise:

*Das Energem des Systems der Zwangskräfte ist ein Minimum, verglichen mit dem Energem aller jener Kräftesysteme, nach deren Hinzufügung zu dem ursprünglich gegebenen Systeme der wirkenden Kräfte die freie Bewegung des Punktsystems eine den Zwangsgleichungen entsprechende wäre.*

Seien die Zwangsgleichungen wieder:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{ij}x_i'' + \beta_{ij}y_i'' + Z_{ij}z_i'') = g_j$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

und $\ldots, X_i', Y_i', Z_i', \ldots$ jenes vorläufig als existirend angenommene, supplementäre Kräftesystem, das der Minimumsbedingung des Gesetzes genügt. Dann kann wieder jedes andere supplementäre Kräftesystem, das eine den Zwangsgleichungen entsprechende Bewegung bewirkt, mit

$$\cdots, X_i' + \Delta X_i', \quad Y_i' + \Delta Y_i', \quad Z_i' + \Delta Z_i', \cdots$$

bezeichnet werden, wo die aus den Gleichungen

$$m_i x_i'' = X_i + X_i' + \Delta X_i',$$
$$m_i y_i'' = Y_i + Y_i' + \Delta Y_i',$$
$$m_i z_i'' = Z_i + Z_i' + \Delta Z_i'$$

bestimmten Werthe von $x_i''$, $y_i''$, $z_i''$ den Zwangsgleichungen genügen müssen. Dazu müssen die Variationen $\Delta X_i'$, $\Delta Y_i'$, $\Delta Z_i'$ den Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij}\frac{X_i + X_i' + \Delta X_i'}{m_i} + \beta_{ij}\frac{Y_i + Y_i' + \Delta Y_i'}{m_i} + \gamma_{ij}\frac{Z_i + Z_i' + \Delta Z_i'}{m_i}\right) = g_j,$$

oder da auch

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij}\frac{X_i + X_i'}{m_i} + \beta_{ij}\frac{Y_i + Y_i'}{m_i} + \gamma_{ij}\frac{Z_i + Z_i'}{m_i}\right) = g_j,$$

einfacher den Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}(\alpha_{ij}\Delta X_i' + \beta_{ij}\Delta Y_i' + \gamma_{ij}\Delta Z_i') = 0$$
$$(j = 1, \cdots, k)$$

genügen.

Andrerseits ist das Energem des supplementären Kräftesystems:

$$e' = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i'^2 + Y_i'^2 + Z_i'^2}{m_i},$$

und demnach

$$\frac{1}{2}\Delta e' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(X_i \Delta X_i' + Y_i' \Delta Y_i' + Z_i' \Delta Z_i')$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(\overline{\Delta X_i'}^2 + \overline{\Delta Y_i'}^2 + \overline{\Delta Z_i'}^2).$$

Wenn man nun die Bedingungsgleichungen mit vorläufig unbestimmt bleibenden Multiplicatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ versieht und dann von $\frac{1}{2}\Delta e'$ abzieht, erhält man

$$\frac{1}{2}\Delta e' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(X_i' - \lambda_1 \alpha_{i1} - \cdots - \lambda_k \alpha_{ik}) \Delta X_i'$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(Y_i' - \lambda_1 \beta_{i1} - \cdots - \lambda_k \beta_{ik}) \Delta Y_i'$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(Z_i' - \lambda_1 \gamma_{i1} - \cdots - \lambda_k \gamma_{ik}) \Delta Z_i'$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{m_i}(\overline{\Delta X_i'}^2 + \overline{\Delta Y_i'}^2 + \overline{\Delta Z_i'}^2).$$

Es kann also $\Delta e'$ nur dann immer positiv sein, wenn für passend gewählte Werthe der $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

$$X_i' = \lambda_1 \alpha_{i1} + \cdots + \lambda_k \alpha_{ik},$$
$$Y_i' = \lambda_1 \beta_{i1} + \cdots + \lambda_k \beta_{ik},$$
$$Z_i' = \lambda_1 \gamma_{i1} + \cdots + \lambda_k \gamma_{ik}$$

wird; dann ist aber auch $\Delta e'$ positiv, und das Energem des so bestimmten Kräftesystems .... $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ wird ein absolutes Minimum.

Die Multiplication $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ bestimmen sich aus den Zwangsgleichungen. Man hat:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\alpha_{ij}\frac{X_i + \lambda_1\alpha_{i1} + \cdots + \lambda_1\alpha_{ik}}{m_i} + \beta_{ij}\frac{Y_i + \lambda_1\beta_{i1} + \cdots + \lambda_k\beta_{ik}}{m_i}$$
$$+ \gamma_{ij}\frac{Z_i + \lambda_1\gamma_{i1} + \cdots + \lambda_k\gamma_{ik}}{m_i} = g_i$$
$$(j = 1, \ldots, k)$$

also genau dieselben Werthe, wie früher. (Siehe Gleichungen (B) und (D) des Art. 17) Damit ist man also für die Zwangsbewegung zu denselben Gleichungen gelangt, wie vorher.

---

Während wir uns vorher mit allgemeinen, für alle Fälle der Bewegung gültigen Principien der Dynamik beschäftigten, haben die beiden letzten Artikel dadurch einen specielleren Charakter, dass die Fälle der freien und der Zwangsbewegung von einander unterschieden werden, und wir den letzteren auf den ersteren zurückführen. Ich hielt auch diese Sätze für erwähnungswerth, da insbesondere der zweite, das *Princip der Zwangskräfte*, welches übrigens Inhalt und Umfang nach dem Princip des kleinsten Zwanges vollständig gleichkömmt, sich der gewöhnlichen Behandlungsweise der Dynamik am leichtesten anschliesst.

---

# Ueber die regelmässigen Configurationen $n_3$.

Von

A. Schönflies in Göttingen.

Die folgende Abhandlung ist bestimmt, zunächst (§ 1 bis 5) die Begründung und weitere Ausführung der Sätze über regelmässige Configurationen zu geben, welche ich kürzlich in den Göttinger Nachrichten mitgetheilt habe.*) Die dort behandelten Configurationen sind sämmtlich unter einer allgemeineren Gattung von Configurationen enthalten, nämlich unter denjenigen, welche aus Cyklen von Polygonen bestehen, die einander regelmässig ein- und umgeschrieben sind. Mit diesen Configurationen beschäftige ich mich im § 6. Dieselben sollen sämmtlich aufgestellt, und für jede von ihnen die zugehörige Substitutionengruppe abgeleitet werden, d. h. die Gruppe derjenigen Substitutionen, welche nicht allein jeden Punkt der Configuration in einen Configurationspunkt, sondern auch jede Gerade wieder in eine Gerade überführen. Die von Herrn Schröter kürzlich bemerkte Configuration $21_3$**) gehört der eben genannten Gattung an.

## § 1.

### Einleitende Definitionen und Sätze.

1. Die Configurationen $n_3$ sind bisher besonders von den Herren Kantor und Martinetti, und zwar nach verschiedenen Richtungen, mit Erfolg untersucht worden. Herr Kantor hat sämmtliche Configurationen $8_3$, $9_3$, $10_3$ aufgestellt;***) Herr Martinetti hat kürzlich gezeigt,†) dass man aus den Configurationen $(n-1)_3$ die Configurationen $n_3$ durch eine endliche Zahl von Versuchen — die allerdings bereits für $n = 11$ sehr gross ist und bald ausserordentlich wächst — ableiten kann, und auf diese Weise die Configurationen $11_3$ ermittelt.

*) Jahrgang 1887, S. 410.

**) Journal für Math. Bd. 100, S. 237, Anm.

***) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. 84, S. 915 und 1291.

†) Annali di Matem. Serie II, Bd. 15, S. 1.

2. Die Gruppe einer Configuration $n_3$ ist im allgemeinen intransitiv.*) Ist dieselbe transitiv, so verhält sich die Configuration in Bezug auf alle Punkte gleichartig, und soll deshalb *regelmässig* genannt werden. Die Aufgabe, *alle regelmässigen Configurationen* $n_3$ *zu finden* ist noch nicht in Angriff genommen worden. Diese Aufgabe liegt um so näher, als diejenigen Configurationen, auf welche die verschiedenen Untersuchungen bisher geführt haben, fast sämmtlich derartige regelmässige Configurationen sind. Das Folgende enthält einen erst Beitrag zur Lösung dieser Frage. Die gewonnenen Resultate scheinen mir zum grössten Theil neu zu sein; soviel ich weiss, ist abgesehen von den Configurationen $8_3$, $9_3$, $10_3$ nur die in § 3, 1 besprochene Configuration bereits bekannt; sie ist von Herrn Martinetti a. a. gefunden worden.

Es ist klar, dass nur solche Configurationen $n_3$ in Frage kommen, welche nicht etwa in Gruppen von $n', n'' \ldots$ Punkten zerfallen, die selbst Configurationen $n_3', n_3'' \ldots$ bilden.

3. Zwei Punkte einer Configuration sollen *verbundene* oder *getrennte* Punkte heissen, je nachdem sie auf einer Configurationsgeraden liegen oder nicht. Ebenso nennen wir zwei Geraden *verbunden*, wenn sie sich in einem Configurationspunkt schneiden, *getrennt*, wenn dies nicht der Fall ist.**) Das von zwei Punkten einer Geraden begrenzte Stück soll *Strecke* genannt werden.

Sind von den drei Punkten 1 2 3 je zwei mit einander verbunden, so soll das Dreieck 1 2 3 ein *Configurationsdreieck* heissen. Ein solches existirt nur, wenn es auf den drei durch denselben Punkt gehenden Geraden ein Paar verbundener Punkte giebt.

4. Nicht jede regelmässige Configuration $n_3$ enthält Configurationsdreiecke.***) Ich werde mich aber im Folgenden zunächst auf Configurationen beschränken, die Dreiecke enthalten. Dieselben können nach der Zahl und Lage derjenigen Dreiecke eingetheilt werden, in welchen derselbe Punkt vorkommt. Ist $\alpha$ diese Zahl, so soll die Configuration kurz eine *Configuration mit* $\alpha$ *Dreiecken* genannt werden. *Es wird sich zeigen, dass* $\alpha$ *nur gleich* 9, 6, 4, 3, 2 *sein kann.*

Wenn jeder Punkt in $\alpha$ Dreiecken enthalten ist, so ist auch jede Gerade in $\alpha$ Dreiecken enthalten. *Jede dieser Configurationen ist sich daher selbst reciprok.*

5. Eine Configuration $n_3$ enthält $3n$ Strecken. Jede Substitution der zugehörigen Gruppe führt dieselben in einander über. Ueber jeder

*) Vgl. z. B. die von Herrn Martinetti a. a. O. aufgestellten Tabellen, S. 16 und 22.

**) Herr Martinetti sagt conjunto und estraneo, a. a. O. S. 2.

***) Auf Configurationen $n_3$ ohne Configurationsdreiecke hat zuerst Herr Martinetti aufmerksam gemacht. Annali di mat. Serie II. Bd. 14, S. 161 u. 173 ff.

Strecke steht eine Anzahl von Dreiecken; dieselbe kann sich zwischen 0 und 4 bewegen. Strecken, welche in gleicher Weise dieselbe Zahl von Dreiecken tragen, sollen *gleichartig* heissen. Nennen wir Strecken, welche durch die Substitutionen in einander übergehen, *gleichberechtigt*, so folgt unmittelbar, dass gleichberechtigte Strecken auch gleichartig sind.

Auch die sämmtlichen Dreiecke werden bei jeder Substitution unter einander vertauscht. Ein beliebiges Dreieck wird im Allgemeinen nicht in jedes andere übergehen können, vielmehr können die Dreiecke in verschiedene Classen zerfallen, und zwar so, dass nur die Dreiecke derselben Classe in einander übergehen. Die Anzahl der Dreiecke einer jeden Classe muss im Allgemeinen ein Vielfaches von $n$ sein. Ist dies nicht der Fall, so giebt es Substitutionen, die ein Dreieck cyklisch in sich überführen; alsdann ist $n$ ein Vielfaches von 3, und wenn wir $n = 3m$ setzen, so ist die Anzahl der Dreiecke der bezüglichen Classe ein Vielfaches von $m$.

Jeder Configurationspunkt kommt in mindestens einem Dreieck jeder Classe vor. Ist die Zahl der Dreiecke einer Classe ein Vielfaches von $n$, so ist die Zahl derjenigen, welche denselben Configurationspunkt enthalten, ein Vielfaches von 3. Ist diese Zahl kein Vielfaches von 3, so muss demnach das bezügliche Dreieck cyklisch in sich übergeführt werden können, also drei gleichartige Strecken enthalten.

## § 2.

## Die Configuration $8_3$ mit neun Dreiecken.

1. Es sei 1 ein beliebiger Punkt einer Configuration $n_3$ und

$$a_0 = 1\,2_0\,3_0, \quad a_1 = 1\,2_1\,3_1, \quad a_2 = 1\,2_2\,3_2$$

seien die drei durch ihn gehenden Geraden. Es können zunächst drei der Punkte $2_i\,3_i$ selbst auf einer Geraden liegen; dieselbe sei $2_0\,2_1\,2_2$. Alsdann ist 1 mit drei Punkten derselben Geraden verbunden, ebenso ist aber auch $2_0\,2_1\,2_2$ mit den drei durch 1 gehenden Geraden $a_0, a_1, a_2$ verbunden. Wir nennen den Punkt 1 und die Gerade $2_0\,2_1\,2_2$ *conjugirt zu einander*.

2. Es fragt sich zunächst, ob zu einem Punkt mehr als eine Gerade conjugirt sein kann. Zwei Geraden, die zu demselben Punkt conjugirt sind, sind entweder verbundene oder getrennte Geraden. Sind sie verbundene Geraden, so muss einer der Punkte $2_i$, $3_i$ z. B. der Punkt $2_0$ ihr Schnittpunkt sein. Nun sind aber auch zu $3_0$ zwei verbundene Geraden conjugirt; daher müssen auch $3_0\,3_1\,2_2$ und $3_0\,2_1\,3_2$ auf je einer Geraden liegen.

Die sieben Punkte $1, 2_i, 3_i$ haben bereits alle Eigenschaften einer Configuration $7_3$. Bezeichnen wir noch die Punkte $2_0\,2_1\,2_2\,3_0\,3_1\,3_2$ resp.

durch 235476, so repräsentirt die Configuration ein Siebeneck, da sich selbst so ein- und umschrieben ist, dass für jeden Werth von die Punkte $i$, $i+1$, $i+3$ auf einer Geraden liegen.

Eine solche Configuration existirt jedoch nur scheinbar. Die Construction jedes derartigen $n$-ecks führt bekanntlich auf die Bestimmun der Doppelpunkte von zwei projectivischen Punktreihen. Es ist abe leicht zu sehen, dass für $n = 7$ die bezüglichen Doppelpunkte m andern bereits vorhandenen Punkten zusammenfallen. Eine Configuration $7_3$ mit lauter distincten Punkten giebt es also nicht.

2. *Wenn daher bei einer wirklichen Configuration $n_3$ zu einer Punkte zwei Geraden conjugirt sind, so sind dies getrennte Geraden und ebenso sind zwei Punkte, die zu derselben Geraden conjugirt sind getrennte Punkte.*

Wenn es Configurationen dieser Art giebt, so sind $2_0\,2_1\,2_2$ un $3_0\,3_1\,3_2$ die beiden zu 1 conjugirten Geraden. Jeder Geraden $a_0$, $a_1$, $a$ sind zwei getrennte Punkte conjugirt, welche auf den beiden ander Geraden liegen; wir können die Bezeichnung so wählen, dass

$$2_1 \text{ und } 3_2 \text{ zu } a_0,$$
$$2_2 \text{ und } 3_0 \text{ zu } a_1,$$
$$2_0 \text{ und } 3_1 \text{ zu } a_2$$

conjugirt sind. Daraus folgt, dass auch $3_1$ mit $2_2$, $3_2$ mit $2_0$ und 3 mit $2_1$ verbunden ist. Nun gehört aber auch zu den Geraden $2_0\,2_1\,2$ und $3_0\,3_1\,3_2$ noch je ein conjugirter Punkt; demnach müssen sich di Geraden $3_1\,2_2$, $3_2\,2_0$, $3_0\,2_1$ in einem Punkt $1_0$ schneiden, und diese Punkt ist sowohl zu $2_0\,2_1\,2_2$, als auch zu $3_0\,3_1\,3_2$ conjugirt.

3. Bezeichnen wir noch die Punkte $1\,1_0\,2_0\,2_1\,2_2\,3_0\,3_1\,3_2$ resp durch 1 5 2 7 8 4 6 3, so bilden die Punkte

$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8$$

ein Achteck, welches sich selbst so ein- und umgeschrieben ist, das wiederum für jeden Werth von $i$ die Punkte

$$i,\quad i+1,\quad i+3$$

auf einer Geraden liegen. Ferner bilden die Punkte

$$1\,3\,5\,7 \quad \text{und} \quad 2\,4\,6\,8$$

zwei Vierecke, deren jedes dem andern ein- und umschrieben ist.

*Es giebt daher nur eine derartige Configuration, nämlich die bekannt imaginäre Configuration* $8_3$.

Die Configuration enthält im Ganzen 24 Dreiecke.

4. Da die Configuration $8_3$ als ein Achteck 1 2 3 4 5 6 7 8 betrachte werden kann, von welchem die Punkte $i$, $i+1$, $i+3$ auf je eine Geraden liegen, so gestattet sie die cyklische Substitution

$$S = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8).$$

Sie ist daher bestimmt, sobald diejenigen Substitutionen bekannt sind, welche einen Punkt unverändert lassen. Sei 1 dieser Punkt, und bezeichnen wir die mit 1 verbundenen Punkte wieder durch $2_0\,2_1\,2_2$, $3_0\,3_1\,3_2$, so müssen diese Substitutionen auch die zu 1 conjugirten Geraden $2_0\,2_1\,2_2$, und $3_0\,3_1\,3_2$ zusammen unverändert lassen; diese Substitutionen führen also jede dieser Geraden in sich, oder beide in einander über.

Diejenige Substitution, welche das erstere leistet, kann nur

$$T = (2_0\,2_1\,2_2)\,(3_0\,3_1\,3_2)$$

sein; andrerseits ist dieselbe aber auch gestattet; denn diese Substitution genügt auch der letzten Bedingung, die sie erfüllen muss, nämlich den von 1 getrennten Punkt $1_0$ in sich überzuführen.

Die Substitutionen, welche $2_0\,2_1\,2_2$ mit $3_0\,3_1\,3_2$ vertauschen, müssen wieder den Punkt $1_0$ unverändert lassen, also auch die drei durch ihn gehenden Geraden $3_1\,2_2$, $3_2\,2_0$ und $3_0\,2_1$ in einander überführen. Diese Substitutionen sind daher

$$U_0 = (2_0\,3_0)\,(2_1\,3_2)\,(2_2\,3_1),$$
$$U_1 = (2_1\,3_1)\,(2_2\,3_0)\,(2_0\,3_2),$$
$$U_2 = (2_2\,3_2)\,(2_0\,3_1)\,(2_1\,3_0).$$

Dagegen kann es ausser der Identität keine Substitution geben, die 1 und $2_0$ unverändert lässt. Denn dann bleiben auch die von 1 resp. $2_0$ getrennten Punkte $1_0$ und $3_1$ unverändert; d. h. es bleiben alle Punkte unverändert.

*Die Gruppe besteht daher aus* 48 *Substitutionen und ist durch die Substitutionen* $S$, $T$, $U_i$ *vollständig bestimmt.*

Die Substitution $T$ vertauscht die drei durch 1 resp. $1_0$ gehenden Geraden cyklisch, während jede Substitution $U_i$ je eine dieser Geraden ungeändert lässt, und die beiden andern unter einander vertauscht. Die beiden Geraden, welche bei $U_i$ fest bleiben, sind getrennte Geraden; die Substitutionen $T$ und $U_i$ besitzen daher in Bezug auf Punkte und Geraden dieselben Eigenschaften, wie es auch die Reciprocität der Configuration erwarten lässt.

5. Wir hatten gesehen, dass bei der Configuration $8_3\,2_1$ zu $a_0$, $2_2$ zu $a_1$ und $2_0$ zu $a_2$ conjugirt ist; d. h. die Punkte $2_0\,2_1\,2_2$ sind den drei Geraden $a_0\,a_1\,a_2$ cyklisch conjugirt. Es ist aber auch umgekehrt wahr, dass *wenn in einer Configuration* $n_3$ *die Punkte* $2_0\,2_1\,2_2$ *den Geraden* $a_0\,a_1\,a_2$ *in cyklischer Reihenfolge conjugirt sind, dies die Configuration* $8_3$ *ist.* Alsdann sind nämlich $2_1\,2_2$, $2_1\,3_0$, $2_2\,2_0$, $2_2\,3_1$, $2_0\,2_1$, $2_0\,3_2$ Paare verbundener Punkte, und daher müssen $2_0\,2_1\,2_2$ auf einer Geraden liegen, weil sonst vier Geraden durch einen Punkt gingen. Wir suchen nun die zu $3_0$, $3_1$, $3_2$ conjugirten Geraden, indem wir zunächst

immer den-Fall ausschliessen, dass zu einer Geraden zwei Punkte c jugirt sind. Die zu $3_0$ conjugirte Gerade geht jedenfalls durch $2_0$, zu $3_1$ conjugirte durch $2_1$, und die zu $3_2$ conjugirte durch $2_2$. Ke dieser Geraden kann $2_0\,2_1\,2_2$ sein, weil $2_0\,2_1\,2_2$ bereits zu 1 conju ist. Die drei Geraden sind daher $2_0\,3_2$, $2_1\,3_0$, $2_2\,3_1$. Daher sind a je zwei der Punkte $3_0$, $3_1$, $3_2$ verbunden; sie bilden daher eine Gera weil sonst durch einen dieser Punkte vier Geraden gingen. Die A nahme der cyklischen Zuordnung führt also stets auf die Configuration

## § 3.

## Die Configurationen mit 6 Dreiecken.

1. Wenn es noch andere regelmässige Configurationen giebt, denen $2_0, 2_1, 2_2$ eine Gerade bilden, so können, wie aus dem vorsteh den Satz folgt, $2_0, 2_1, 2_2$ zu $a_0, a_1, a_2$ nicht cyklisch conjugirt sein. aber keine Gerade den ihr conjugirten Punkt enthält, so liegen zw der Punkte, die zu $a_0$, $a_1$, $a_2$ conjugirt sind, auf derselben Gerad Sei $a_0$ diese Gerade, und sei $2_0$ zu $a_1$ und $3_0$ zu $a_2$ conjugirt; alsdann si $2_0\,3_1$, $3_0\,2_2$ und $3_0\,3_2$ Paare verbundener Punkte und $2_2$ ist zu $a_0$ co jugirt. Andere Paare verbundener Punkte kann es nicht mehr gebe

Die Configuration ist demnach dadurch charakterisirt, dass *d Punkte, die den drei durch denselben Punkt gehenden Geraden conjugi sind, ein Configurationsdreieck bilde* Eine der Geraden $a_0, a_1, a_2$ enthä zwei dieser Punkte, eine einen un die letzte gar keinen.

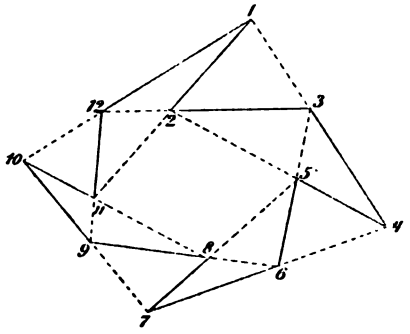


Fig. 1.

2. Bezeichnen wir jetzt die Punk $1\,2_0\,2_1\,2_2\,3_0\,3_1\,3_2$ resp. durch 4 5 3 2 7 1, so ist (Fig. 1)

2 zu 1 3 4, 3 zu 2 4 5, 4 zu 3 5 6
5 zu 4 6 7

conjugirt. Ferner ist 3 mit de Punkt 5 von 24, 4 mit Punkt von 35, 5 mit Punkt 7 von 46 verbunden. Da nun die drei dur jeden Punkt gehenden Geraden sich verschieden in Bezug auf d Configuration verhalten, so folgt, dass auch 6 mit einem Punkt 8 vc 57 verbunden ist, und dass 6 zu 578 conjugirt ist, u. s. w.; d. h. *d Configuration besteht aus einem Polygon* 1 2 3 4 5 . . ., *welches sich ein- und umschrieben ist, dass für jeden Werth von i die Punkte*

$$i,\quad i+2,\quad i+3$$

*auf einer Geraden liegen.**)

*) Diese Configuration wird bereits von Hrn. Martinetti erwähnt; a. a. O. S.

Die Configuration enthält $2n$ Dreiecke, welche in zwei Classen von je $n$ gleichberechtigten zerfallen (§ 1, 5). Sie besteht reell für jeden Werth $n > 8$, also z. B. für $n = 9$. Die Configuration $8_3$ ist ein specieller Fall derselben.

3. Die Gruppe dieser Configuration ist die cyklische Gruppe. Zunächst ist nämlich evident, dass die Substitution

$$S = (1\,2\,3 \ldots n)$$

der Gruppe angehört. Andrerseits giebt es aber ausser der Identität keine Substitution, welche einen Punkt ungeändert lässt. Denn nennen wir wieder $a_0\, a_1\, a_2$ die drei durch 1 gehenden Geraden, so muss, wenn 1 unverändert bleibt, jede dieser Geraden in sich übergehen, da sie ja ein verschiedenes Verhalten zur Configuration besitzen. Nun ist $2_2$ zu $a_0$ conjugirt, also bleibt auch $2_2$ fest und daher bleiben alle Punkte fest.

Die Gruppe besteht demnach aus sämmtlichen Potenzen der Substitution $S$. Es besteht nun der allgemeine Satz, dass *wenn in einem Cyklus einer Substitution irgend zwei auf einander folgende Punkte verbunden sind, je zwei benachbarte Punkte dieses Cyklus verbunden sind.* Der Punkt 1 ist mit 6 Punkten verbunden, nämlich mit

$$2,\ 3,\ 4,\ n-2,\ n-1,\ n.$$

Ist daher $n$ weder durch 2 noch 3 theilbar, so bilden auch die Punkte der Substitution $S^2$ und $S^3$ je ein geschlossenes $n$-Eck, welches sich so ein- und umschrieben ist, dass für einen festen Werth $h$ die Punkte

$$i,\quad i+1,\quad i+h$$

auf einer Geraden liegen; d. h.: *Ist $n$ weder durch 2 noch 3 theilbar, so kann die Configuration auf drei Arten als ein sich derartig ein- und umgeschriebenes $n$-Eck angesehen werden.*

Ist dagegen $n$ durch 2 oder 3 theilbar, so zerfallen $S^2$ und $S^3$ in 2 resp. 3 Cyklen, nämlich

$$S^2 = (1\,3 \ldots n-1)\,(2\,4 \ldots n),$$
$$S^3 = (1\,4 \ldots n-2)\,(2\,5 \ldots n-1)\,(3\,6 \ldots n)$$

und zwar *repräsentiren die beiden Cyklen von $S^2$ zwei Polygone, deren jedes dem andern ein- und umschrieben ist, und ebenso die Cyklen von $S^3$ drei Polygone, die einander cyklisch ein- und umschrieben sind.* Dies findet überdies stets so statt, dass zwei auf einander folgende Punkte eines eingeschriebenen Polygons auf zwei auf einander folgenden Seiten des umschriebenen Polygons liegen.*)

4. Durch das vorstehende sind alle Configurationen erledigt, bei denen drei auf $a_0$, $a_1$, $a_2$ liegende Punkte eine Gerade bilden. Ist dies nicht der Fall, so kann es auf $a_0\, a_1\, a_2$ höchstens 6 Paare verbundener Punkte geben, d. h. jeder Punkt ist in höchstens 6 Dreiecken

*) Dies ist bei der durch Fig. 1 dargestellten Configuration $12_3$ der Fall.

enthalten. Wir betrachten zunächst diejenigen Configurationen, für welche diese Zahl 6 selbst ist.

In diesem Fall ist jeder Punkt von $a_0\, a_1\, a_2$ mit zwei andern Punkten verbunden. Alsdann bilden entweder die Punkte $2_0\, 2_1\, 2_2$ $3_0\, 3_1\, 3_2$ je ein Dreieck, und *wir erhalten die Desargues'sche Configuration* $10_3$; oder aber es bilden $2_0\, 3_1\, 2_2\, 3_0\, 2_1\, 3_2$ ein geschlossenes Sechseck, welches den Geraden $a_0\, a_1\, a_2$ eingeschrieben ist. Den drei Geraden, die durch einen der Punkte $2_i\, 3_i$ hindurchgehen, muss nun ebenfalls ein derartiges Sechseck eingeschrieben sein, daher müssen sich auch die Geraden

$$2_1\, 3_2,\ 2_2\, 3_0,\ 2_0\, 3_1 \text{ in einem Punkt } 1_1$$

und

$$2_2\, 3_1,\ 2_0\, 3_2,\ 2_1\, 3_0 \text{ in einem Punkt } 1_2$$

schneiden. *Demnach bilden die Punkte*

$$1\ 1_1\ 1_2,\quad 2_0\, 2_1\, 2_2,\quad 3_0\, 3_1\, 3_2$$

*die bekannte Configuration* $9_3$, *welche aus drei Dreiecken besteht, von denen je zwei dreifach perspectivisch liegen.*

Die Configuration enthält 18 Configurationsdreiecke.

5. Die Desargues'sche Configuration $10_3$ kann bekanntlich als ebener Schnitt eines vollständigen räumlichen Fünfecks betrachtet werden. Sind 1 2 3 4 5 die Punkte des Fünfecks, so können die Punkte und Geraden der Configuration resp. durch

$$ik \text{ und } ikl$$

bezeichnet werden. Jede Substitution, welche das Fünfeck in sich überführt, führt auch die Configuration $10_3$ in sich über, und umgekehrt, und daraus folgt, dass *die Gruppe der Configuration aus* 120 *Substitutionen besteht, und der Gruppe aller Vertauschungen von 5 Dingen holoedrisch isomorph ist.* Wenden wir auf die Punkte $(ik)$ eine der 120 Vertauschungen der Zahlen 1 2 3 4 5 an, so erhalten wir stets eine Substitution der Gruppe.

Die Gruppe der vorstehenden Configuration $9_3$ wird erst in § 5, 10 abgeleitet werden, da sie sich dort am einfachsten ergiebt.

6. Wir wollen schliesslich noch beweisen, dass *es keine regelmässigen Configurationen* $n_3$ *mit fünf Dreiecken geben kann.* Soll dies möglich sein, so müssen auf jeder Geraden zwei Strecken existiren über denen je zwei Dreiecke stehen, und eine Strecke mit einem Dreieck. Wir dürfen festsetzen, dass $1\, 2_0$ und $1\, 3_0$ die beiden ersteren Strecken sind. Es existiren daher jedenfalls die Strecken $2_0\, 2_1$ und $2_0\, 2_2$, $3_0\, 3_1$ und $3_0\, 3_2$. Wir dürfen aber auch noch annehmen, dass über $12_1$ und $12_2$ je zwei Dreiecke stehen. Es muss daher entweder $2_1$ mit $3_2$ und $2_2$ mit $3_1$ verbunden sein, und dies führt auf die Configuration $9_3$ oder aber $2_1$ mit $2_2$. Alsdann aber folgt aus § 1, 5 dass

in den Dreiecken $1\,3_0\,3_1$ und $1\,3_0\,3_2$ alle drei Strecken gleichartig sind; es stehen also auch über $1\,3_1$ und $1\,3_2$ je zwei Dreiecke, d. h. wir erhalten wieder die Configuration $10_3$.

## § 4.

## Configurationen mit drei und vier Dreiecken.

1. Configurationen mit vier Dreiecken sind nur so möglich, dass über einer Strecke einer jeden Geraden zwei Dreiecke stehen, über den beiden andern hingegen nur je eines.

Sei $1\,2_0$ eine Strecke, über der zwei Dreiecke stehen. Wir dürfen festsetzen, dass $2_0$ mit $3_1$ und $3_2$ verbunden ist, und ebenso $3_0$ mit $2_2$. Dies liefert bereits drei Dreiecke, welche den Punkt 1 enthalten. Ueber $1\,2_1$ und $1\,3_1$ kann daher nur je ein Dreieck stehen; es ist daher $2_1$ noch mit einem der Punkte $2_2$ oder $3_2$ verbunden.

Es kann aber $2_1\,2_2$ kein Paar verbundener Punkte sein. Unter den vier Dreiecken, welche den Punkt 1 enthalten, muss es nämlich (§ 1, 5) mindestens eins geben, welches eine cyklische Substitution gestattet, und da dies nicht möglich ist, so ist $2_1$ von $2_2$ getrennt. Es kann daher nur $2_1$ mit $3_2$ verbunden sein. Solche Configurationen existiren in der That.

2. Dasjenige der vier Dreiecke, welches eine cyklische Substitution gestattet, trägt über jeder Seite entweder ein oder zwei Dreiecke. Ein Dreieck, über dessen Seiten nur je ein Dreieck steht, kann in diesem Fall nur $1\,3_0\,2_2$ sein. Jede Substitution, welche den Cyklus $1\,3_0\,2_2$ enthält, führt aber die Strecke $1\,3_2$ in $2_0\,3_0$ über; und daraus würde folgen, dass über $2_0\,3_0$ zwei Dreiecke stehen, was jedoch nicht der Fall ist.

Es kann demnach nur Dreieck $1\,2_0\,3_2$ eine cyklische Substitution gestatten. Alsdann stehen auch über $2_0\,3_2$ zwei Dreiecke. Eine solche Configuration ist in der That möglich; es folgt unmittelbar, dass $3_0$ und $2_2$ mit demselben Punkte von $2_0\,3_2$ verbunden sind, und dass $2_0\,3_1$ und $2_1\,3_2$ sich in einem Configurationspunkt schneiden. Zu dem Dreieck $1\,2_0\,3_2$ existirt daher ein ihm eingeschriebenes und ein ihm umgeschriebenes Dreieck; und daraus lässt sich folgern, dass *die Configuration aus einem Cyklus von Dreiecken besteht, deren jedes dem vorhergehenden eingeschrieben, und dem folgenden umschrieben ist.*

Derartige Configurationen können nur existiren, wenn $n = 3m$ ist. Sie enthalten im Ganzen $4m$ Dreiecke; dieselben zerfallen in zwei verschiedene Classen von $m$, resp. $n$ Dreiecken. Jedes Dreieck der ersten Classe enthält drei Strecken, über denen je zwei Configurationsdreiecke stehen, die andern Dreiecke enthalten nur je eine Strecke dieser Art.

3. Wenn jeder Punkt in drei Dreiecken vorkommt, so lässt sich aus § 1, 5 unmittelbar folgern, dass über jeder Strecke nur ein Dreieck steht, so dass die Configuration im Ganzen $n$ Dreiecke enthält. Ferner folgt, dass zwei Punkte derselben Geraden mit Punkten verschiedener Geraden verbunden sind. Wir dürfen daher festsetzen, dass

$$2_1\,3_2, \quad 2_2\,3_0, \quad 2_0\,3_1$$

die drei Paare verbundener Punkte sind. Auf zwei verbundenen Geraden liegt daher ein Paar verbundener und ein Paar getrennter Punkte; ebenso geht durch zwei verbundene Punkte ein Paar verbundener und ein Paar getrennter Geraden.

4. Die Bezeichnung möge für das Folgende jetzt so getroffen werden, dass die drei Geraden $a_0\,a_1\,a_2$ durch den Punkt $2_0$ gehen, dass auf ihnen resp. die Punkte

$$2_0\,3_0\,4_1, \quad 2_0\,1_0\,3_1, \quad 2_0\,2'\,2''$$

liegen, und dass $3_1$ mit $4_1$, $1_0$ mit $2'$, und $3_0$ mit $2''$ verbunden ist. Ferner sei $3_0\,4_1\,5_1$ das über $3_0\,4_1$ stehende Dreieck, und $4_0$ der dritte Punkt der Geraden $3_0\,5_1$, so folgt aus dem vorstehenden Satz, dass die Gerade $3_0\,4_0$ von jeder durch $2_0$ gehenden Geraden getrennt ist, und dass also $4_0$ von allen bisher vorhandenen Punkten verschieden ist.

Ueber der Strecke $4_0\,5_1$ steht wieder ein Dreieck mit der Spitze $6_1$, und der dritte Punkt von $4_0\,6_1$ heisse $5_0$. Fahren wir in dieser Weise mit der Construction neuer Punkte fort, so erhalten wir zwei Linienzüge

$$1_0\,2_0\,3_0 \ldots \quad \text{und} \quad 3_1\,4_1\,5_1 \ldots$$

von denen der erste dem zweiten umschrieben ist. Allerdings werden die Punkte $5_0\,6_0 \ldots$ resp. $6_1\,7_1 \ldots$ schliesslich mit bereits vorhandenen Punkten zusammenfallen, aber alle diese Punkte $h_0$ und $k_1$ sind ganz bestimmte Punkte der Configuration.

Nennen wir jetzt die dritten Punkte der Seiten $3_1 4_1$, $4_1 5_1$, $5_1 6_1 \ldots$ resp. $5_2$, $6_2$, $7_2 \ldots$, so ist auch $4_2$ mit $5_2$, $5_2$ mit $6_2 \ldots$ verbunden u. s. w., d. h. die Configuration besteht aus einer Reihe von Linienzügen von der Eigenschaft, dass zu jedem derselben auch der eingeschriebene existirt.

5. Bei der fortgesetzten Construction der Punkte $h_0$ und $k_1$ sind nun noch zwei Fälle möglich. Nämlich entweder fällt ein Punkt $h_0$ mit dem Punkt $1_0$ erst zusammen, nachdem alle Punkte der Configuration erschöpft sind, oder der Linienzug $1_0\,2_0\,3_0 \ldots$ schliesst sich, ehe alle Punkte erschöpft sind. Im ersten Fall *besteht die Configuration aus einem sich selbst ein- und umschriebenen Polygon* und zwar so, dass je zwei auf einander folgende Ecken desselben auf zwei auf einander folgenden Seiten liegen. Im zweiten Fall *besteht die Configuration aus einem Cyklus von $q$ Polygonen von $p$ Ecken*

$$P_1, P_2 \ldots P_q,$$

*deren jedes dem folgenden, deren letztes aber dem ersten eingeschrieben ist, und zwar so, dass je zwei auf einander folgende Ecken des Polygons $P_i$ auf zwei auf einander folgenden Seiten des Polygons $P_{i-1}$ liegen.*

Mit irgend zwei Zahlen $p$ und $q$, deren Product gleich $n$ ist, lässt sich demnach eine derartige Configuration $n_3$ herstellen. Für $p = 3$ geht diese Configuration in die vorhergehende über.

Die Configurationen, bei welchen jeder Punkt in zwei Dreiecken vorkommt, sollen erst im sechsten Paragraphen behandelt werden.

## § 5.

## Die Gruppen von Substitutionen, welche zu den Configurationen mit drei und vier Dreiecken gehören.

1. Da die Configurationen mit drei und vier Dreiecken denselben geometrischen Charakter besitzen, so können sie gemeinsam behandelt werden. Jede derselben besteht nämlich aus einem Cyklus von $q$ Polygonen von je $p$ Ecken, die einander ein- und umschrieben sind.

Wir dürfen die Bezeichnung so wählen, dass die Polygone

$$P_1, P_2, \ldots P_q$$

resp. die Punkte

$$\begin{aligned} &1_1\, 2_1 \ldots p_1, \\ &1_2\, 2_2 \ldots p_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &1_q\, 2_q \ldots p_q \end{aligned}$$

enthalten; ferner können wir noch festsetzen, dass für

$$i = 1, 2, \ldots q - 1$$

die Seite $h_i(h+1)_i$ des Polygons $P_i$ den Punkt $(h+2)_{i+1}$ des Polygons $P_{i+1}$ enthält, d. h. dass

$$h_i(h+1)_i\,(h+2)_{i+1}{}^*)$$

auf einer Geraden liegen. Damit ist die Bezeichnung aller Punkte fixirt. Nun enthält auch jede Seite des Polygons $P_q$ je einen Punkt von $P_1$, und zwar lässt sich zeigen, dass es stets einen festen Werth $r$ giebt, so dass für jeden Werth von $h$ die Punkte

$$h_q(h+1)_q\,(h+2+r)_1$$

auf einer Geraden liegen. Dabei kann $r$ alle Werthe von 1 bis $p$ annehmen.

2. Nämlich die Configuration gestattet eine Substitution, welche jedes der Polygone $P_i$ in sich überführt. Setzen wir

*) Die Zahlen $h, h+1 \ldots$ kommen hier und im Folgenden nur in Bezug auf mod. $p$ in Frage.

$$P^{(i)} = (1_i\, 2_i\, 3_i \ldots p_i),$$

so ist

$$P = P'\, P'' \ldots P^{(q)}$$

diese Substitution. Sie führt die Seiten $1_q\, 2_q$, $2_q\, 3_q \ldots$ des Polygons $P_q$ in einander über, also auch die dritten Punkte derselben. Diese Punkte sind aber Punkte des Polygons $P_1$, und es geht jeder Punkt $h_1$ in $(h+1)_1$ über. Enthält nun die Seite $1_q\, 2_q$ den Punkt $(3+r)_1$ so enthält auch die Seite $2_q\, 3_q$ den Punkt $(4+r)_1 \ldots$, womit die obige Behauptung bewiesen ist.

3. Die Configuration lässt zweitens auch solche Substitutionen zu, welche die Polygone $P_i$ cyklisch in einander überführen. Sei $R$ diejenige, welche für

$$1_1\, 2_1\, 3_1 \ldots p_1$$

resp.

$$1_2\, 2_2\, 3_2 \ldots p_2$$

setzt. Da die dritten Punkte der Polygonseiten von $P_1$ in diejenigen der entsprechenden Seiten von $P_2$ übergehen, so wird durch $R$ allgemein

$$1_i\, 2_i \ldots p_i \quad \text{in} \quad 1_{i+1}\, 2_{i+1} \ldots p_{i+1}$$

und schliesslich

$$1_q\, 2_q \ldots p_q \quad \text{in} \quad (1+r)_1\, (2+r)_1 \ldots (p+r)_1$$

übergeführt. Daraus folgt, dass die Substitution $R$ der Gruppe der Configuration angehört.

4. Bezeichnen wir jetzt das Product der Substitutionen $P$ und $Q$ durch $S$, so lässt $S$ auf $1_1\ 2_2$ folgen, allgemein auf $h_i(h+1)_{i+1}$ und auf $h_q\ (h+r+1)_1$, und daraus folgt, dass je zwei auf einander folgende Punkte von $S$ verbundene Punkte sind. Die Substitution $S$ kann in mehrere Cyklen zerfallen; sei $S'$ derjenige, welcher mit $1_1$ beginnt, so ist

$$S' = (1_1\, 2_2\, 3_3 \ldots q_q (q+r+1)_1 \ldots).$$

Wenn nun $\sigma$ der grösste gemeinsame Theiler von $p$ und $q+r$ ist, so zerfällt die Substitution $S$ in $\sigma$ Cyklen $S^{(i)}$ von je $s$ Punkten, und zwar so, dass $S^{(i)}$ mit $i_1$ beginnt; es ist also

$$S = S'\, S'' \ldots S^{(\sigma)}.$$

Nun bilden die Punkte eines jeden Cyklus $S^{(i)}$ ein geschlossenes Polygon $S_i$ und es ist leicht zu sehen, dass das Polygon $S_{i-1}$ dem Polygon $S_i$ genau so eingeschrieben ist, wie das Polygon $P_{i+1}$ dem Polygon $P_i$. *Die Polygone $S_i$ bilden daher einen Cyklus von $\sigma$ Polygonen von je $s$ Seiten, welche einander ebenso ein- und umschrieben sind, wie die Polygone $P_i$.* Die Substitution $S$ führt jedes dieser Polygone in sich über.

5. Multipliciren wir die Substitution $P$ mit $S$, so erhalten wir eine Substitution

$$T = PS,$$

welche auf $1_1\ 3_2$, allgemein auf $h_i\ (h+2)_{i+1}$ und auf $h_q\ (h+r+2)_1$ folgen lässt. Auch sie hat daher die Eigenschaft, dass je zwei auf einander folgende Punkte verbunden sind. Ist wieder $T'$ derjenige Cyklus von $T$, welcher mit $1_1$ beginnt, so ist

$$T' = (1_1\ 3_2\ 5_3 \ldots (2q-1)_q\,(2q+r+1)_1 \ldots);$$

und wenn nun $\tau$ der grösste gemeinsame Theiler von $p$ und $2q+r$ ist, so zerfällt $T$ in $\tau$ Cyklen $T^{(i)}$ von je $t$ Punkten, so dass $T^{(i)}$ mit $i_1$ beginnt, und es ist

$$T = T'\ T'' \ldots T^{(\tau)}.$$

Die Punkte eines jeden Cyklus $T^{(i)}$ bilden wieder ein geschlossenes Polygon $T_i$ und das Polygon $T_i$ ist wiederum dem Polygon $T_{i-1}$ eingeschrieben; d. h. *die Polygone $T_i$ bilden einen Cyklus von $\tau$ Polygonen von je $t$ Seiten, welche einander ebenso ein- und umgeschrieben sind, wie die Polygone $P_i$.* Die Substitution $T$ führt jedes dieser Polygone in sich über.

*Jede dieser Configurationen lässt sich demnach auf drei Arten als Cyklus von einander ein- und umschriebenen Polygonen auffassen.*

6. Da

$$PS = SP,$$

also auch

$$PT = TP$$

und

$$ST = TS$$

ist, so folgt noch, dass bei allen betrachteten Substitutionen jeder der drei Polygoncyklen in sich selbst übergeht, was ja auch geometrisch evident ist. Ferner repräsentiren die Substitutionen

$$P^\alpha S^\beta$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots \sigma - 1,\ \beta = 0, 1, \ldots s - 1$$

solche $\sigma s = n$ Substitutionen der Gruppe, welche auf $1_1$ jeden beliebigen andern Configurationspunkt folgen lassen.

7. Die Gruppe enthält höchstens $6n$ Substitutionen. Bleiben nämlich zwei Punkte, z. B. $1_1$ und $2_1$ fest, so bleibt auch $3_2$ fest, und da in allen Fällen über mindestens zwei Strecken der Geraden $1_1\ 2_1\ 3_2$ nur ein Dreieck steht, so folgt leicht, dass alsdann alle Punkte fest bleiben. Wenn dagegen nur $1_1$ unverändert bleibt, so kann für $2_1$ nur einer der sechs mit $1_1$ verbundenen Punkte substituirt werden; d. h. *die Gruppe enthält höchstens $6n$ Substitutionen.* (Vgl. jedoch § 5, 10).

Jedes der Polygone $P_1$, $S_1$, $T_1$ enthält zwei mit $1_1$ verbundene Punkte. Nun folgt aber aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen, dass *sich die sämmtlichen Punkte der Configuration aus zwei verbundenen Punkten auf eine eindeutig bestimmte Weise erzeugen lassen,* und daraus folgt, dass bei jeder Substitution, die $1_1$ unverändert lässt,

die Polygone $P_1$, $S_1$, $T_1$ und überhaupt die Cyklen der Polygone $P_i$, $S_i$, $T_i$ irgendwie in einander übergehen müssen.

*Sind daher die Zahlen $p$, $s$, $t$ sämmtlich von einander verschieden, so besteht die Gruppe aus $n$ Substutitionen, nämlich den Substitutionen $P^\alpha S^\beta$.*

8. Sind zwei dieser Zahlen einander gleich, so dürfen wir, da die drei Polygoncyklen gleiche Bedeutung für die Configuration haben, die Festsetzung treffen, dass $s$ und $t$ diese Zahlen sind. In diesem Fall haben $p$, $q+r$ und $2q+r$, d. h. aber $p$, $q$ und $r$ denselben gemeinsamen Theiler. Soll alsdann die Gruppe eine Substitution gestatten, welche $1_1$ unverändert lässt, so muss dieselbe die Polygone $P_i$ in sich überführen, dagegen das Polygon $S_1$ mit dem Polygon $T_1$ und allgemein jedes Polygon $S_i$ mit einem Polygon $T_k$ vertauschen.

Durch diese Substitution geht das Polygon $P_1$ so in sich über, dass je zwei Punkte $h_1$ und $k_1$ für einander eintreten, für welche

$$h_1 + k_1 \equiv 2 \text{ mod. } p$$

ist, und daraus folgt, dass sich allgemein von den Punkten des Polygons $P_i$ je zwei Punkte $h_i$ und $k_i$ vertauschen, für welche

$$h_i + k_i \equiv 3i - 1 \text{ mod. } p$$

ist. Andrerseits müssen auch die Elemente des Cyklus $S'$ und die entsprechenden des Cyklus $T'$ in einander übergehen; d. h. die Punkte

$$(q+r+1)_1 \; (2q+2r+1)_1 \ldots$$

und

$$(2q+r+1)_1 \; (2q+2r+1)_1 \ldots$$

werden für einander substituirt. Wenn wir dies mit der eben gefundenen Bedingung vergleichen, so folgt, dass

$$3q + 2r \equiv 0 \text{ mod. } p$$

sein muss. Ist diese Bedingung erfüllt, so gehen aber auch wirklich nicht allein $S_1$ und $T_1$, sondern auch je zwei Polygone $S_i$ und $T_k$ in einander über, und zwar, da $S_i$ dem Polygon $S_{i+1}$ eingeschrieben und $T_i$ dem Polygon $T_{i+1}$ umschrieben ist, je zwei für welche

$$i + h \equiv 2 \text{ mod. } \sigma$$

ist. D. h.

*Wenn die Zahlen $p$, $q$, $r$ denselben grössten gemeinsamen Theiler haben, und überdies $3q+2r$ durch $p$ theilbar ist, so besteht die Gruppe aus $2n$ Substitutionen. Sie ist definirt durch die Substitutionen $P$, $S$, $T$, sowie durch eine Substitution $U$, welche $1_1$ ungeändert lässt, und je zwei Punkte $h_i$ und $k_i$ mit einander vertauscht, für welche*

$$h_i + k_i \equiv 3i - 1 \text{ mod. } p$$

*ist.*

9. Soll die Gruppe noch andere Substitutionen enthalten, so muss $p = s = t$, also $p = q$ und $r = 0$ sein. Eine derartige Gruppe enthält $6n$ Substitutionen; sie enthält ausser der vorstehenden Substitution $U$ auch noch solche Substitutionen, welche das Polygon $P_1$ in $S_1$ und allgemein jedes Polygon $P_i$ in $S_h$ überführt, wenn

$$i + h \equiv 2 \bmod. p$$

ist. Eine Substitution $V$, welche dies leistet und gleichzeitig $1_1$ unverändert lässt, ist leicht aufzustellen. Wir bilden dazu die beiden quadratischen Schemata

$$\begin{array}{llll} 1_1\ 2_1\ 3_1 \ldots p_1, & & & 1_1\ 2_2\ 3_3 \ldots p_p, \\ 3_2\ 4_2\ 5_2 \ldots 2_2, & & & p_1\ 1_2\ 2_3 \ldots (p-1)_p, \\ 5_3\ 6_3\ 7_3 \ldots 4_3, & \text{und} & & (p-1)_1\ p_2\ 1_3 \ldots (p-2)_p, \\ \ldots\ldots\ldots & & & \ldots\ldots\ldots \\ (p-1)_p\ p_p\ 1_p \ldots (p-2)_p & & & 2_1\ 3_2\ 4_3 \ldots 1_p, \end{array}$$

von denen die Horizontalzeilen des ersten die Polygone

$$P_1, P_2 \ldots P_p$$

und die des zweiten die Polygone

$$S_1, S_p \ldots S_2$$

repräsentiren, während gleichzeitig die Verticalzeilen des ersten die Polygone

$$T_1, T_2 \ldots T_p$$

und die des zweiten die Polygone

$$P_1, P_2 \ldots P_p$$

darstellen. Daraus folgt, dass diejenige Substitution $V$, welche für jeden Punkt des ersten Schemas den entsprechenden des zweiten setzt, der Gruppe angehört.

Die Substitution $V$ ersetzt die Punkte

$$h_1 (2 + h)_2\ (4 + h)_3 \ldots (2i + h)_{i+1}$$

durch die Punkte

$$h_h (h - 1)_h\ (h - 2)_h \ldots (h - i)_h$$

und hieraus ergiebt sich, dass je drei Punkte

$$(2i + h)_{i+1},\ (h - i)_h,\ (3 - 2h - i)_{3-h-i}$$

cyklisch für einander substituirt werden. *Die Substitution $V$ zerfällt daher in lauter Cyklen von drei Punkten und führt die Polygone $P_i$ in die Polygone $S_h$, diese in die Polygone $T_i$ und die Polygone $T_i$ wieder in die Polygone $P_i$ über.* Also folgt:

*Wenn $p = q$ und $r = 0$ ist, so besteht die Gruppe aus $6n$ Substitutionen, und ist durch die Substitutionen $P, S, T, U, V$ vollständig definirt. Die zugehörige Configuration lässt sich auf drei Arten als*

*ein Cyklus von p Polygonen von je p Ecken auffassen, die einander cyklisch so ein- und umgeschrieben sind, dass je zwei auf einander folgende Ecken des eingeschriebenen Polygons auf zwei auf einander folgenden Seiten des umschriebenen Polygons liegen.*

Derartige Configurationen existiren daher nur, wenn $n$ eine Quadratzahl ist. Die nebenstehende Figur 2 zeigt eine derartige Configuration, nämlich die Configuration $16_3$ mit 96 Substitutionen.

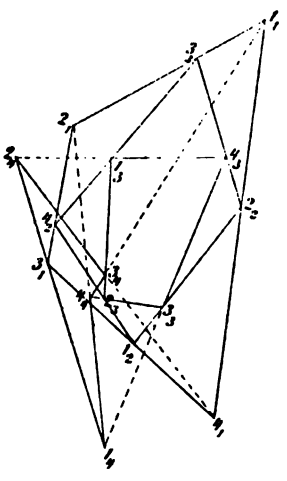


Fig. 2.

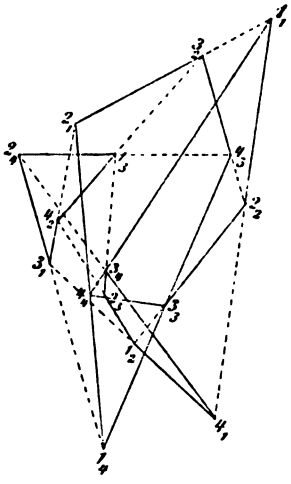


Fig. 2a.

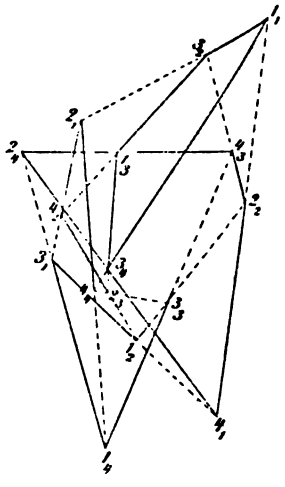


Fig. 2b.

Die drei Cyklen von Vierecken sind

$$\begin{array}{lll} 1_1\ 2_1\ 3_1\ 4_1 & 1_1\ 2_2\ 3_3\ 4_4 & 1_1\ 3_2\ 1_3\ 3_4 \\ 1_2\ 2_2\ 3_2\ 4_2 & 2_1\ 3_2\ 4_3\ 1_4 & 2_1\ 4_2\ 2_3\ 4_4 \\ 1_3\ 2_3\ 3_3\ 4_3 & 3_1\ 4_2\ 1_3\ 2_4 & 3_1\ 1_2\ 3_3\ 1_4 \\ 1_4\ 2_4\ 3_4\ 4_4 & 4_1\ 1_2\ 2_3\ 3_4 & 4_1\ 2_2\ 4_3\ 2_4. \end{array}$$

Ihnen entsprechen die drei Figuren 2, 2a, 2b.

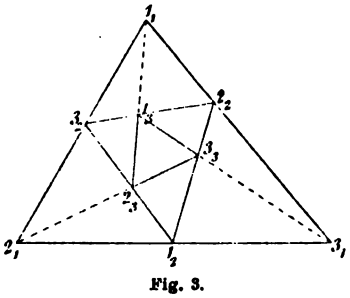


Fig. 3.

10. Um eine Anwendung der vorstehenden Resultate zu geben, wollen wir die Frage behandeln, worin die gruppentheoretische Verschiedenheit der beiden Configurationen $9_3$ begründet ist. Jede dieser beiden Configurationen wird bekanntlich von drei Dreiecken

$$1_1\ 2_1\ 3_1 \quad 1_2\ 2_2\ 3_2 \quad 1_3\ 2_3\ 3_3$$

gebildet, die einander cyklisch e beschrieben sind. Bei derjenigen C figuration $9_3$ (Fig. 3), deren Gruppe aus 9 Substitutionen beste ist $r = \pm 1$; es ist also zwar $s = t$, aber da $3q + 2r$ nicht du

$p = 3$ theilbar ist, so enthält die Gruppe nur 9 Substitutionen. Entsprechend den Substitutionen $S$ und $T$ kann die Configuration auf zwei Arten als sich selbst ein- und umschriebenes Neuneck angesehen werden; bei dem einen liegen die Punkte $i$, $i+1$, $i+3$ auf einer Geraden, bei dem andern dagegen sind es die Punkte $i$, $i+1$, $i+6$.

Die zweite Configuration $9_3$ (Fig. 4) entspricht dem Fall $p = q$, $r = 0$; ihre Gruppe enthält daher jedenfalls die Substitutionen $U$ und $V$. Zu ihnen kommt hier noch eine Substitution $W$, welche die beiden Punkte $1_1$ und $2_1$ also auch $3_2$ ungeändert lässt, dagegen die Spitzen je zweier Dreiecke vertauscht, welche über derselben Strecke der Geraden $1_1\, 2_1\, 3_2$ stehen; diese ist

$$W = (1_2\, 2_2)\ (1_3\, 2_3)\ (3_1\, 3_3).$$

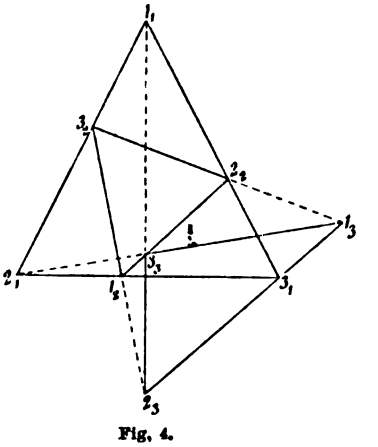


Fig. 4.

Andere Substitutionen, welche $1_1$ unverändert lassen, kann die Gruppe nicht enthalten. Es folgt daher:

*Die Gruppe der durch zwei dreifach perspectivische Dreiecke gebildeten Configuration* $9_3$ *enthält* 108 *Substitutionen und ist durch die Substitutionen* $P$, $S$, $T$, $U$, $V$, $W$ *vollständig bestimmt.*

## § 6.

### Die aus Cyklen von Polygonen bestehenden Configurationen $n_3$.

1. Die im Vorstehenden betrachteten Configurationen lassen sich sämmtlich als Cyklen von Polygonen auffassen, die einander ein- und umgeschrieben sind. Die einzige Configuration, von welcher diese Eigenschaft bisher nicht ausdrücklich hervorgehoben wurde, ist die Desargues'sche Configuration $10_3$; aber auch sie lässt sich bekanntlich in zwei Fünfecke zerlegen, die sich wechselseitig ein- und umgeschrieben sind*). Dies legt die Frage nahe, ob die vorstehenden Configurationen alle regelmässigen Configurationen erschöpfen, die aus derartigen Cyklen von Polygonen bestehen, oder ob es noch andere giebt. Es wird sich zeigen, dass das letztere der Fall ist.

2. Die Polygone, deren Cyklus eine regelmässige Configuration $n_3$ bildet, mögen von nun an durch

$$P_0,\ P_1,\ P_2 \ldots P_q$$

*) Dies scheint zuerst von Herrn S. Kantor bemerkt worden zu sein, a. a. O. S. 1292 und 1295.

derselben enthalte $p+1$ Ecken, so dass [illegible]. Das Polygon $P_i$ sei dem Polygon $P_{i+1}$ umgeschrieben [illegible] sollen die Punkte des Polygons $P_i$ durch

$$0_i\, 1_i\, 2_i \ldots p_i$$

bezeichnet werden.

[illegible] soll eine Substitution der Gruppe bezeichnet werden, welche das Polygon $P_0$, also auch jedes Polygon $P_i$ in sich überführt; [illegible] durch $\mathfrak{S}$ eine Substitution, welche die Polygone cyklisch mit einander vertauscht. Die Punkte von $P_0$ sind

$$0_0\, 1_0\, 2_0 \ldots p_0.$$

Wir setzen nunmehr fest, dass unter $\mathfrak{S}$ diejenige Substitution verstanden werden soll, welche auf $0_0$ den auf $0_0 1_0$ liegenden Punkt $0_1$ folgen lässt; alsdann sind je zwei Punkte des Cyklus von $\mathfrak{S}$, der mit $0_0$ beginnt, verbundene Punkte. Auf den Punkt $0_1$ folgt daher ein mit ihm verbundener Punkt von $P_2$; er heisse $0_2$, und diejenige Gerade von $P_1$, welche $0_2$ enthält, heisse $0_1 1_1$. Damit ist die Bezeichnung der sämmtlichen Punkte von $P_1$ fixirt.

Gemäss dieser Festsetzung geht die Gerade $0_0 0_1$ in $0_1 0_2$ über, also gehen auch die dritten Punkte, d. h. $1_0$ in $1_1$ über; und daraus folgt, dass die Substitution $\mathfrak{S}$ die Punkte

$$0_0 1_0 \ldots p_0 \quad \text{resp. in} \quad 0_1 1_1 \ldots p_1$$

überführt. Nun sei $0_3$ derjenige mit $0_2$ verbundene Punkt von $P_3$, welchen $\mathfrak{S}$ für $0_2$ substituirt, so nennen wir diejenige Seite von $P_2$, auf welcher $0_3$ liegt, wieder $0_2 1_2$; alsdann geht auch $1_1$ in $1_2$ über u. s. w. ...; wir können daher die Bezeichnung so treffen, dass $\mathfrak{S}$ die Punkte

$$0_i 1_i \ldots p_i \quad \text{resp. in} \quad 0_{i+1},\ 1_{i+1},\ \ldots,\ p_{i+1}$$

überführt. Dies gilt für alle Zahlen $i = 0,\ 1, \ldots, q-1$, und damit ist die Bezeichnung aller Punkte der Configuration fixirt.

Ist nun $l_1$ derjenige Punkt von $P_1$, welcher auf $1_0 2_0$ liegt, so folgt aus der Regelmässigkeit der Configuration, dass die Seiten von $P_0$ der Reihe nach die Punkte

$$0_1,\ l_1,\ 2l_1 \ldots pl_1\ ^*)$$

enthalten. Da jeder Punkt $h_i$ in $h_{i+1}$ übergeht, so folgt weiter, da auch die Seiten des Polygons $P_i$ die Punkte

$$0_{i+1}\, l_{i+1}\, 2l_{i+1} \ldots pl_{i+1}$$

enthalten; dies gilt wieder für $i = 0,\ 1,\ 2 \ldots q-1$.

Da $P_1$ ein wirkliches Polygon von $p+1$ Ecken sein soll, [illegible] sich als erste Bedingung, dass $l$ *relativ prim zu* $p+1$ *ist*.

*) Abkürzung ist $2l_1 \ldots pl_1$ statt $(2l)_1 \ldots (pl)_1$ geschrieben wor[illegible] olgenden.

3. Die Substitution $\mathfrak{S}$ führt das Polygon $P_q$ so in $P_0$ über, dass für $0_q$ ein mit $0_q$ verbundener Punkt tritt; dieser Punkt heisse $r_0$. Nun können zwei verschiedene Fälle eintreten. Nämlich das Polygon

$$0_q\, 1_q\, 2_q \ldots p_q$$

kann entweder in

$$r_0(r+1)_0\ (r+2)_0 \ldots (r+p)_0$$

oder in

$$r_0(r-1)_0\ (r-2)_0 \ldots (r-p)_0$$

übergehen.

Im ersten Fall ersetzt die Substitution $\mathfrak{S}$ jeden Punkt $h_q$ durch $(r+h)_0$. Nun müssen aber auch die dritten Punkte der Seiten von $P_q$ in die dritten Punkte der entsprechenden Seiten von $P_0$ übergehen; d. h. die Punkte

$r_0$, $(r+l)_0$, $(r+2l)_0 \ldots$ resp. in $rl_1$, $(r+1)\,l_1$, $(r+2)\,l_1 \ldots$.

Andererseits wissen wir bereits, dass jeder Punkt $h_0$ in $h_1$ übergeht, und *daraus folgt als zweite Bedingung, dass*

$$r \equiv rl \bmod. p+1$$

*oder*

$$r(l-1) \equiv 0 \bmod. p+1$$

*ist.*

Im zweiten Fall dagegen ersetzt $\mathfrak{S}$ jeden Punkt $h_q$ durch $(r-h)_q$. Da auch hier die dritten Punkte der Seiten von $P_q$ in die entsprechenden von $P_0$ übergehen, d. h.

$r_0$, $(r+l)_0$, $(r+2l)_0 \ldots$ resp. in $(r-1)\,l_1$, $(r-2)\,l_1$, $(r-3)\,l_1 \ldots$,

so folgt, dass *in diesem Fall sich die Bedingung*

$$r+l \equiv rl \bmod. p+1$$

*oder*

$$(r-1)(l-1) \equiv 1 \bmod. p+1$$

*ergiebt.*

Die beiden verschiedenen Gattungen von Configurationen sollen als *Configurationen erster Art* resp. *Configurationen zweiter Art* bezeichnet werden.

4. Unter der Substitution $\mathfrak{P}$, welche jedes Polygon $P_i$ in sich überführt, möge nunmehr diejenige verstanden werden, welche den Cyklus

$$P = (0_0\, 1_0\, 2_0 \ldots p_0)$$

enthält. Da die dritten Punkte der Seiten von $P_0$ auch in einander übergehen, so enthält $P$ ferner den Cyklus

$$P' = (0_1\, l_1\, 2l_1 \ldots pl_1);$$

es geht also jede Seite $h_1(h+1)_1$ in $(h+l)_1\,(h+l+1)_1$ über. Die dritten Punkte dieser Seiten sind resp. $hl_2$ und $(hl+l^2)_2$; auf diese Weise weiter schliessend finden wir, dass derjenige Cyklus von $\mathfrak{P}$, welcher $P_i$ in sich überführt,

$$P^{(\sigma)} = (0_\sigma\, l_\sigma^i\, 2l_\sigma^i \ldots pl_\sigma^i)$$

ist. Dies gilt auch noch für das Polygon $P_q$. Es müssen aber auch die dritten Punkte der Seiten von $P_q$ in einander übergehen. Dies sind aber die Punkte von $P_0$; d. h. die Punkte von $P_0$ müssen durch den Cyklus

$$(r_0\,(r \pm l^{q+1})_0\ (r \pm 2l^{q+1})_0\ \ldots\ (r \pm pl^{q+1})_0)$$

in einander übergehen. Dieser Cyklus muss aber mit dem Cyklus $P$ übereinstimmen, und daraus folgt, als letzte Bedingung, dass *für die Configurationen erster Art*

$$l^{q+1} \equiv 1 \bmod. p+1$$

*und für die Configurationen zweiter Art*

$$l^{q+1} \equiv -1 \bmod. p+1$$

*sein muss.*

Sind die gefundenen drei Bedingungen erfüllt, so existiren aber auch Configurationen $n_3$, welche aus Cyklen von Polygonen bestehen. Denn durch geeignete Multiplication der dann existirenden Substitutionen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ erhalten wir Substitutionen, welche gestatten, den Punkt $0_0$ durch jeden andern Configurationspunkt zu ersetzen.

5. Während die Substitution $\mathfrak{P}$ für beide Arten von Configurationen im Wesentlichen die gleiche ist, ist dies für die Substitution $\mathfrak{S}$ nicht mehr der Fall.

Sei $S$ derjenige Cyklus von $\mathfrak{S}$, welcher mit $0_0$ beginnt, so ist für die Configurationen erster Art

$$S = (0_0 0_1 \ldots 0_q r_0 r_1 \ldots r_q\, 2r_0 \ldots).$$

Wenn nun $\sigma$ der grösste gemeinsame Theiler von $r$ und $p+1$ ist, so zerfällt $\mathfrak{S}$ in $\sigma$ Cyklen

$$S\, S'\, S'' \ldots S^{(\sigma)}$$

von je $s$ Punkten, und zwar bilden die Punkte von $S$ ein geschlossenes Polygon $S_0$ von $s$ Punkten, während die Punkte der andern Cyklen

$$S^{(\sigma)} = (i_0 i_1 \ldots i_q (r+i)_0\, (r+i)_1 \ldots)$$

im Allgemeinen keine solchen Polygone repräsentiren.

Wir bilden wieder die Substitution $\mathfrak{T}$, welche durch die Gleichung

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{P}^{-1}$$

definirt ist. Der Cyklus $T$ derselben, welcher $0_0$ enthält, beginnt mit

$$0_0,\ -l_1,\ (-l-l^2)_2 \ldots$$

und wenn wir allgemein

$$l + l^2 + l^3 + \cdots + l^r \equiv \cdots l^{(r)} \bmod. p+1$$

setzen, so ist

$$T = (0_0 i_1 i_2 \ldots i_q^{(r-1+l^{(r)})_q} \ldots)$$

und wenn nun $\tau$ der grösste gemeinsame Theiler von $r - 1 + l^{(q)}$ und $p + 1$ ist, so zerfällt $\mathfrak{T}$ in $\tau$ Cyklen

$$T\,T'\,T''\ldots T^{(\tau)}$$

von je $t$ Punkten; die Punkte von $T$ bilden wieder ein geschlossenes Polygon $T_0$ von $t$ Punkten, während dies für die Punkte der Cyklen $T^{(i)}$ im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Wegen der Relation

$$\mathfrak{S}\,\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^l\,\mathfrak{S}$$

bestimmen die Substitutionen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ eine Gruppe von $(p+1)(q+1)=n$ Substitutionen; sie sind sämmtlich in der Formel

$$\mathfrak{P}^\alpha\,\mathfrak{S}^\beta$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, \sigma - 1,\ \beta = 0, 1, \ldots, s - 1$$

enthalten.

6. Wir können wieder die Frage aufwerfen, ob es für $s = t$ Configurationen geben kann, deren Gruppe $2n$ Substitutionen enthält. Soll dies der Fall sein, so muss eine Substitution existiren, welche $0_0$ unverändert lässt, das Polygon $S_0$ in $T_0$ und jedes Polygon $P_i$ in sich selbst überführt. Dabei gehen je zwei Punkte $h_0$ und $k_0$ des Polygons $P_0$ in einander über, für welche

$$h + k \equiv 0 \text{ mod. } p + 1$$

ist, und daraus folgt, dass sich allgemein je zwei Punkte $h_i$ und $k_i$ vertauschen, für welche

$$h + k \equiv l^{(i)} \text{ mod. } p + 1$$

ist. Andererseits sollen aber auch die Punkte von $S_0$ und $T_0$ in einander übergehen; d. h.

$$0_i,\ r_i,\ 2r_i \ldots$$

resp. in

$$l_i^{(i)},\ (r - 1 + l^{(i)})_i,\ 2(r - 1 + l^{(i)})_i \ldots$$

und dies ist nur möglich, wenn $r = 0$ ist. Demnach folgt:

*Wenn $l$ relativ prim zu $p + 1$ ist, und die Zahlen $l$ und $r$ den Bedingungen*

$$l^{q+1} \equiv 1 \text{ mod. } p + 1,$$
$$r(l - 1) \equiv 0 \text{ mod. } p + 1$$

*genügen, so existirt eine Configuration $n_3$ mit transitiver Gruppe, welche aus einem Cyklus von $q + 1$ Polygonen von je $p + 1$ Seiten besteht, die einander ein- und umgeschrieben sind. Die Gruppe der Configurationen enthält im Allgemeinen $n$ Substitutionen, nämlich die Substitutionen $\mathfrak{P}^\alpha\,\mathfrak{S}^\beta$.*

*Ist $r = 0$, so enthält die Gruppe $2n$ Substitutionen; sie ist definirt durch $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}$, sowie eine Substitution $\mathfrak{U}$, welche $0_0$ unverändert lässt und je zwei Punkte $h_i$ und $k_i$ mit einander vertauscht, für welche*

$$h + k \equiv -(l + l^2 + \cdots + l^i) \bmod. p + 1$$

*ist.*

Ist $r$ relativ prim zu $p + 1$, so folgt aus der zweiten Bedingungscongruenz $l - 1 \equiv 0 \bmod. p + 1$; d. h. $l \equiv 1$; wir erhalten in diesem Fall nur die Configurationen des vorigen Paragraphen. Sollen sich andere Configurationen ergeben, so muss $r$ und $p + 1$ einen gemeinsamen Theiler haben. Ist derselbe $\delta$, und zwar

$$r = \varrho\delta, \quad p + 1 = \pi\delta,$$

so wird die obige Bedingung ausser durch $l = 1$ auch durch die Werthe

$$l = 1 + \pi, \quad 1 + 2\pi, \ldots, 1 + (\delta - 1)\pi$$

befriedigt, und jede dieser Zahlen, welche relativ prim zu $p + 1$ ist, und der ersten Congruenz genügt, liefert eine Configuration der betrachteten Art.

7. Bei den Configurationen der zweiten Art führt die Substitution $\mathfrak{S}$ die Polygone $P_i$ cyklisch so in einander über, dass

$$0_i\, 1_i \ldots p_i \quad \text{resp. in} \quad 0_{i+1}\, 1_{i+1} \ldots p_{i+1}$$

und

$$0_\varrho\, 1_\varrho \ldots p_\varrho \quad \text{resp. in} \quad r_0 (r-1)_0 \ldots (r-p)_0$$

übergeht. Bezeichnen wir den Cyklus von $\mathfrak{S}$, der mit $0_0$ beginnt, wieder durch $S$, so ist demnach

$$S = (0_0\, 0_1 \ldots 0_\varrho\, r_0\, r_1 \ldots r_\varrho)$$

und es folgt, dass allgemein die Substitution $\mathfrak{S}$ in lauter Cyklen

$$S^{(i)} = (i_0\, i_1 \ldots i_\varrho (r-i)_0\, (r-i)_1 \ldots (r-i)_\varrho)$$

zerfällt: jeder dieser Cyklen enthält im Allgemeinen $2\varrho$ Punkte; zwei dieser Cyklen können eventuell aus je $\varrho$ Punkten bestehen.

In Folge der Gleichung

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^l \mathfrak{S}$$

enthält die Gruppe im Ganzen $2n$ Substitutionen; ausser den Substitutionen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ ist für sie die Substitution

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{S}^\varrho$$

charakteristisch, welche aus lauter einfachen Transpositionen besteht, und jedes Polygon $P_i$ so in sich überführt, dass sich je zwei Punkte

$$h_i \quad \text{und} \quad (r-h)_i$$

in demselben vertauschen. Also:

*Wenn $l$ relativ prim zu $p + 1$ ist und die Zahlen $r$ und $l$ den Bedingungen*

$$l^{\varrho+1} \equiv -1 \bmod. p + 1,$$
$$rl \equiv r + l \bmod. p + 1$$

*genügen, so existirt eine Configuration $n_3$ mit transitiver Gruppe, be-*

*stehend aus einem Cyklus von* $q+1$ *Polygonen von je* $p+1$ *Ecken, die einander ein- und umgeschrieben sind. Die Ordnung der Gruppe ist* $2n$*; die sämmtlichen Substitutionen sind in der Formel*

$$\mathfrak{P}^{\alpha}\mathfrak{S}^{\beta}$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, p, \quad \beta = 0, 1, \ldots, 2q+1$$

*enthalten.*

Das einfachste Beispiel einer solchen Configuration ist die Desargues'sche Configuration $10_3$; sie entspricht dem speciellen Fall von zwei Fünfecken und den Werthen $l=3$, $r=4$. Ein anderes Beispiel ist die Configuration $21_3$, welche aus drei Siebenecken besteht und den Werthen $l=3$, $r=5$ entspricht. Sie ist gleichzeitig diejenige Configuration dieser Art, für welche, abgesehen von der Configuration $10_3$, $n$ den kleinsten Werth hat.

Es existirt keine Configuration dieser Art, welche dem Werth $r=0$ oder $l=1$ entspricht. Dagegen giebt es solche Configurationen für $l=-1$; alsdann muss $p+1$ und $q+1$ ungerade sein und $2r \equiv 1$. Die zu $l=-1$ gehörigen Configurationen dieser Art sind mit den § 5, 8 behandelten Configurationen identisch.

8. Wie bereits bemerkt, stimmen die vorstehend behandelten Configurationen für $l=\pm 1$ mit den Configurationen des vorigen Paragraphen überein. Die zu andern Werthen von $l$ gehörigen Configurationen werden im Allgemeinen keine Configurationsdreiecke enthalten. Sobald $q+1>3$ ist, ist dies unmittelbar evident; wenn dagegen $q+1$ den Werth 2 oder 3 hat, so können Configurationsdreiecke auftreten; jeder Punkt einer solchen Configuration kann aber höchstens in zwei Dreiecken vorkommen.

Es soll deshalb zunächst die in § 1 zurückgestellte Frage erledigt werden, ob es derartige Configurationen geben kann.

Es sei wieder 1 ein beliebiger Configurationspunkt, und

$$a_0 = 1\,1_0\,2_0, \quad a_1 = 1\,2_1\,2, \quad a' = 1\,1'\,1''$$

seien die drei durch ihn gehenden Geraden. Wenn zunächst der Punkt 1 in zwei Dreiecken vorkommt, so ist dies, wie leicht zu sehen, nur so möglich, dass zwei dieser Geraden, z. B. $a_0$ und $a_1$, je einen Punkt enthalten, welcher mit einem Punkte der dritten Geraden $a'$ verbunden ist; $1_0\,1'$ und $2_1\,1''$ sollen die beiden Paare verbundener Punkte sein.

Da über jeder Geraden zwei Dreiecke stehen, so steht auch über $2\,2_1$ ein Dreieck; es heisse $2\,2_1\,2'$. Der dritte Punkt von $2\,2'$ sei $2''$, so folgt leicht, dass $a'' = 2\,2'\,2''$ diejenige durch 2 gehende Gerade ist, welcher der durch 1 gehenden Geraden $a' = 1\,1'\,1''$ entspricht; d. h. auch über $2\,2''$ steht ein Dreieck. Ist $3_1$ die Spitze desselben und 3 der dritte Punkt von $2\,3_1$, so steht auch über $3\,3_1$ ein Dreieck.

Nennen wir dasselbe $3\,3_1\,3'$, so ist wieder $3\,3'\,3'' = a'''$ diejenige durch 3 gehende Gerade, welche der Geraden $a'$ durch 1 entspricht u. s. w.

Wenn wir auf diese Weise mit der Construction der Configurationspunkte fortfahren, so erhalten wir einen Linienzug $1\,2\,3\,4\ldots$, auf den Seiten desselben die Punkte $2_1\,3_1\,4_1\ldots$, und durch die Ecken desselben die Geraden $a'$, $a''$, $a'''$ .... Der Linienzug $1\,2\,3\,4\ldots$ muss sich aber schliessen, wenn eine Configuration dieser Art existirt; d. h. in der Configuration giebt es ein geschlossenes Polygon, welches die Eigenschaft hat, dass über jeder Seite desselben zwei Dreiecke stehen. Diese Dreiecke sind sämmtlich verschieden von einander.

Ist $m$ die Anzahl der Ecken des Polygons, so enthält dasselbe $4m$ Punkte, $4m$ Geraden und $2m$ Dreiecke. Die Punkte und Geraden können daher nicht sämmtlich verschieden von einander sein, sie müssen sich vielmehr auf $3m$ Punkte und $3m$ Geraden reduciren. Nun können aber von den Punkten $1\,2\,3\ldots$ resp. $1_1\,2_1\,3_1\ldots$ keine zwei zusammenfallen; deshalb müssen von den Punkten $1'\,2'\,3'\ldots$, $1''\,2''\,3''\ldots$ je zwei zusammenfallen; d. h. die Geraden $a'$, $a''$, $a'''$, ... bilden ein geschlossenes Polygon von $m$ Ecken, welches dem Polygon $1\,2\,3\ldots$ umschrieben ist.

Von den Seiten des Polygons $123\ldots$ und den Geraden $a'\,a''\,a'''\ldots$ können ebenfalls keine zwei zusammenfallen; daher müssen von den Geraden, welche von den Punkten $1_1\,2_1\,3_1\ldots$ ausgehen, je zwei identisch sein; d. h. diese Geraden bilden ein dem Polygon $1\,2\,3\ldots$ eingeschriebenes Polygon.

*Die Configuration besteht daher aus drei Polygonen, welche einander cyklisch ein- und umgeschrieben sind.*

9. Durch ähnliche Betrachtungen wird bewiesen, dass Configurationen, bei denen jeder Punkt nur in einem Dreieck vorkommt, überhaupt nicht möglich sind. Es lässt sich nämlich zunächst wiederum zeigen, dass wir durch fortgesetzte Construction von Configurationspunkten und Configurationsdreiecken zu einem geschlossenen Polygon $1\,2\,3\ldots$, zu den auf seinen Seiten liegenden Punkten $1_1\,2_1\,3_1\ldots$, sowie zu den durch die Ecken desselben gehenden Geraden $a'\,a''\,a'''\ldots$ gelangen. Die sich so ergebende Figur enthält $m$ Dreiecke; ihre Punkte und Geraden müssen sich daher auf je $3m$ reduciren lassen. Dies ist jedoch nicht anders möglich, als dass durch einen der Punkte $1\,2\,3\ldots$ oder $1_1\,2_1\,3_1\ldots$ mehr als drei verschiedene Geraden hindurchgehen.

10. Das Vorstehende zeigt, dass die Configurationen, welche an jedem Punkt zwei Dreiecke enthalten, jedenfalls unter den Configurationen dieses Paragraphen enthalten sind. Dieselben können Configurationen erster und zweiter Art sein. Es ist aber noch zu unter-

suchen, welche Werthe von $l$ und $r$ derartige Configurationen liefern.

Setzen wir wieder $n = 3m$, so enthält die bezügliche Configuration $2m$ Dreiecke. Dieselben gehen bei jeder Substitution der zugehörigen Gruppe in einander über. Nun ist die Anzahl der Substitutionen mindestens $n$, es giebt daher Substitutionen, welche ein beliebiges Dreieck in sich überführen, und daraus folgt, dass die Ordnung der Gruppe gleich $2n$ ist.

Als Configurationen erster Art können daher nur solche auftreten, für welche $r = 0$ ist; umgekehrt hat aber auch jede Configuration erster Art, für welche $q + 1 = 3$ und $r = 0$ ist, die Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte in zwei Dreiecken vorkommt. Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn wir — unter Anwendung der früheren Bezeichnung — die von $0_0$ ausgehenden Geraden betrachten.

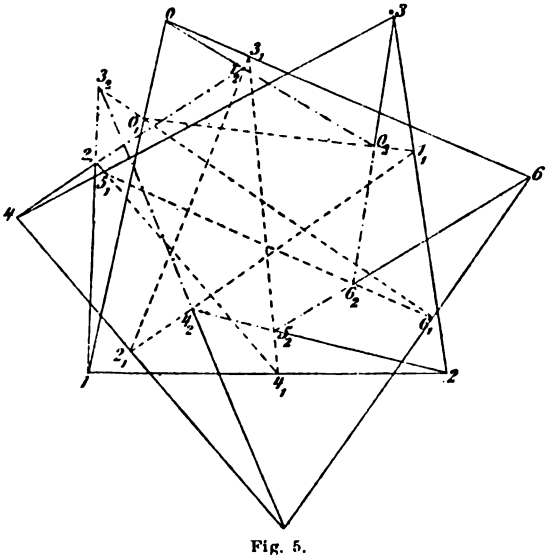


Fig. 5.

Beispiele hierfür sind eine Configuration $21_3$ (Fig. 5), welche den Werthen $p + 1 = 7$, $l = 4$ entspricht, und die Configuration $39_3$, die zu $p + 1 = 13$, $l = 3$ gehört.

11. Die Ermittelung der Configurationen zweiter Art ist etwas umständlicher. Wir betrachten dazu die drei durch den Punkt $r_0$ gehenden Geraden; dieselben enthalten ausser $r_0$ die Punkte

$$0_2\, 1_2,\ (r-1)_0\, (r-1)\, l_1,\ (r+1)_0\, r l_1.$$

Beachten wir, dass der Fall $l = \pm 1$ auszuschliessen ist, und dass $l$ relativ prim zu $p + 1$ ist, so ergiebt sich sofort, dass die Punkte

$$(r-1)_0\ (r+1)_0\ r l_1\ (r-1)\, l_1$$

sämmtlich getrennt von einander sind. Ferner ist aber auch $0_2$ und $1_2$ von $(r-1)_0$ und $(r+1)_0$ getrennt; es können daher die Punkte $0_2$ und $1_2$ nur mit einem der Punkte $rl_1$, $(r-1)\,l_1$, resp., da wegen $rl \equiv r+l$ auch $(r-1)\,l \equiv r$ ist, mit einem der Punkte $r_1$, $rl_1$ verbunden sein. Nun ist $0_2$ mit $0_1$ und $1_1$ verbunden, $1_2$ mit zwei Punkten $k_1$ und $(k+1)_1$, die so bestimmt sind, dass

$$kl \equiv 1 \text{ mod. } p+1$$

ist; es ist daher zu prüfen, ob $r$ einen der Werthe

$$0,\ 1,\ k,\ k+1$$

annehmen kann.

Wegen § 6, 7 ist $r=0$ auszuschliessen. Wird in der Congruenz $rl \equiv r+l$ mod. $p+1$ $r=1$ gesetzt, so ergiebt sich $l \equiv 1+l$, was unmöglich ist. Auch der Werth $r=k+1$ ist zu verwerfen; denn daraus würde $kl \equiv (r-1)\,l \equiv r$ folgen, und dies ist, da $kl \equiv 1$ ist, unmöglich.

Dagegen ist der Werth

$$r=k$$

zulässig; aus ihm folgt $kl \equiv rl$, also

$$rl \equiv r+l \equiv 1,$$

d. h. es ist $0_2$ mit $rl_1$ und $1_2$ mit $k_1$ verbunden.

Wie die letzte Congruenz eine Folge der vorletzten ist, so ist auch umgekehrt die vorletzte eine Folge der letzten; es folgt daher, dass *jede Configuration $n_3$ zweiter Art, welche aus drei einander ein- und umschriebenen Polygonen besteht, und der Bedingung $r+l \equiv 1$ genügt, $2n$ Dreiecke enthält.*

Ein Beispiel hierfür ist die oben erwähnte (§ 6, 7) Configuration $21_3$, welche den Werthen $l=3$, $r=5$ entspricht. Diese Configuration ist übrigens mit der eben erwähnten Configuration erster Art $21_3$ (§ 6, 10) identisch. Bezeichnen wir in Fig. 5 die Punkte

$$0_1\ 1_1\ 2_1\ 3_1\ 4_1\ 5_1\ 6_1,\quad 0_2\ 1_2\ 2_2\ 3_2\ 4_2\ 5_2\ 6_2$$

resp. durch

$$0'\ 6''\ 5'\ 4'\ 3'\ 2'\ 1',\quad 4''\ 5''\ 6''\ 0''\ 1''\ 2''\ 3'',$$

so erhalten wir diejenige Benennung der 21 Punkte, welche die Figur in die Configuration zweiter Art überführt.

12. Die Configuration $21_3$ ist nicht die einzige Configuration, welche sich sowohl als Configuration erster Art, wie als Configuration zweiter Art auffassen lässt; es *existirt vielmehr unter den Configurationen $n_3$ mit $2n$ Dreiecken eine ganze Classe, welcher diese Eigenschaft zukommt.*

Sei nämlich $n_3 = (3m)_3$ eine Configuration erster Art mit $2n$ Dreiecken, also

$$p+1=m,\quad l^3 \equiv 1 \text{ mod. } p+1,$$

so ist auch

$$(-l)^3 \equiv -1 \text{ mod. } p+1,$$

d. h. es existirt auch eine Configuration $n_3$ zweiter Art, welche aus drei einander ein- und umschriebenen $m$-ecken besteht. Nun ist

$$l^3 - 1 \equiv (l-1)(l^2+l+1) \equiv 0 \text{ mod. } p+1.$$

Wenn daher $l-1$ relativ prim zu $p+1$ ist, so ist

$$l^2 + l + 1 \equiv 0 \text{ mod. } p+1.$$

Ersetzen wir nun $-l$ durch $l'$, so folgt

$$l'(1-l') \equiv 1 \text{ mod. } p+1$$

und wenn noch

$$1 - l' \equiv r$$

gesetzt wird, so ergiebt sich

$$r + l' \equiv rl' \equiv 1,$$

d. h. die Configuration $n_3$ erster Art lässt sich auch als eine Configuration zweiter Art auffassen.

Es wäre von Interesse, zu untersuchen, ob es auch für andere Werthe von $q+1$ Configurationen giebt, welche gleichzeitig als Configurationen erster und zweiter Art betrachtet werden können. Es ist evident, dass dies nur für ungerade Werthe von $q+1$ der Fall sein kann.

Göttingen, October 1887.

# Ueber die Euler'sche $\varphi$-Function.

Von

E. Busche in Bergedorf bei Hamburg.

Die Gauss'sche Gleichung

$$\sum_{x} \varphi(x) = m \qquad (m \equiv 0, \text{ mod. } x), \tag{1}$$

enthält bekanntlich eine charakteristische Eigenschaft der Function $\varphi(x)$, welche die Anzahl der zu $x$ theilerfremden Zahlen angiebt, die kleiner als $x$ sind. Diese Eigenschaft lässt sich als besonderer Fall einer allgemeineren darstellen in folgender Weise.

Wenn die Gleichungen (1) für $m = 1, 2, \ldots, \nu$ summirt werden, so ergiebt sich

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \cdot \left[\frac{\nu}{x}\right] = \frac{\nu \cdot (\nu+1)}{2}, \tag{2}$$

denn die Zahl $x$ tritt $\left[\frac{\nu}{x}\right]$ mal als Theiler der Zahlen $1, 2 \ldots \nu$ auf, wenn mit $[\alpha] \leqq \alpha$ die grösste in $\alpha$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet wird.

Setzt man in (2) einmal $\nu = n + n' + n'' + \cdots$, dann $\nu = n$, $\nu = n'$, ... und subtrahirt die letzteren Gleichungen von der ersten, so findet man

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \cdot \left( \left[\frac{n+n'+n''+\cdots}{x}\right] - \left[\frac{n}{x}\right] - \left[\frac{n'}{x}\right] - \cdots \right)$$
$$= \frac{1}{2}(n+n'+\cdots)^2 - \frac{1}{2}(n^2+n'^2+\cdots) = \sum nn',$$

wo die Summation rechts über alle Producte aus je zwei Zahlen $n$ zu erstrecken ist. Nun ist, wenn mit

$$\Re(\alpha) = \alpha - [\alpha] < 1$$

der positive Bruchrest von $\alpha$ bezeichnet wird,*)

*) Ich wähle die Bezeichnung $\Re(\alpha)$, weil Herr Kronecker mit $R(\alpha)$ den absolut kleinsten Bruchrest bezeichnet.

$$\left[\frac{n+n'+n''+\cdots}{x}\right]-\left[\frac{n}{x}\right]-\left[\frac{n'}{x}\right]-\cdots=\left[\Re\left(\frac{n}{x}\right)+\Re\left(\frac{n'}{x}\right)+\cdots\right],$$

so dass folgende Gleichung besteht:

$$\sum_{x=1}^{\infty}\varphi(x)\cdot\left[\Re\left(\frac{n}{x}\right)+\Re\left(\frac{n'}{x}\right)+\cdots\right]=\sum nn'. \tag{3}$$

Diese Gleichung enthält das Gauss'sche Theorem und andere Eigenschaften der $\varphi$-Function als specielle Fälle.

Setzt man z. B. $n=n'=n''=\cdots=1$, so kommt man, wenn $\nu$ die Anzahl der Zahlen $n$ ist, nach Addition von $\varphi(1)\cdot\left[\frac{\nu}{1}\right]=\nu$, wieder zu der Gleichung (2). Für $n'=n''=\cdots=n$ hat man

$$\sum_{x=1}^{\infty}\varphi(x)\cdot\left[\nu\cdot\Re\left(\frac{n}{x}\right)\right]=\frac{\nu\cdot(\nu-1)}{2}n^2. \tag{4}$$

Setzt man hierin $\nu-1$ statt $\nu$ und subtrahirt die entstehende Gleichung, so folgt

$$\sum_{x=1}^{\infty}\varphi(x)\cdot\left(\left[\nu\cdot\Re\left(\frac{n}{x}\right)\right]-\left[\nu\,\Re\left(\frac{n}{x}\right)-\Re\left(\frac{n}{x}\right)\right]\right)=(\nu-1)n^2.$$

Der Coefficient von $\varphi(x)$ ist $=0$ oder $=1$, je nachdem

$$\Re\left(\nu\cdot\Re\left(\frac{n}{x}\right)\right)\gtreqless\text{ oder }<\Re\left(\frac{n}{x}\right)$$

ist. Da

$$\Re\left(\nu\cdot\Re\left(\frac{n}{x}\right)\right)=\Re\left(\frac{\nu\cdot n}{x}\right) \tag{5}$$

ist, so ist also

$$\sum\varphi(x)=(\nu-1)\cdot n^2, \tag{6}$$

*wenn $x$ alle Werthe annimmt, welche die Bedingung*

$$\Re\left(\frac{n}{x}\right)>\Re\left(\frac{\nu\cdot n}{x}\right)$$

*erfüllen.* Die Zahlen $x>n$, welche der Bedingung genügen, sind offenbar diejenigen Theiler der Zahlen $(\nu-1)n+1, (\nu-1)n+2,\ldots,\nu.n$, welche grösser als $n$ sind. Für $n=1$ geht (6) in die Gauss'sche Gleichung (1) über, wenn man $\varphi(1)=1$ addirt, denn nur wenn $\nu\equiv 0\ (\text{mod. } x)$, ist $\frac{1}{x}>\Re\left(\frac{\nu}{x}\right)$.

Vertauscht man in (4) $\nu$ und $n$ mit einander und subtrahirt die entstandene Gleichung von (4), so erhält man

$$\sum_{x=1}^{\infty}\varphi(x)\left(\left[\nu\,\Re\left(\frac{n}{x}\right)\right]-\left[n\,\Re\left(\frac{\nu}{x}\right)\right]\right)=\frac{\nu\cdot n(\nu-n)}{2}.$$

Nun ist wegen (5)

$$\left[\nu\,\Re\left(\frac{n}{x}\right)\right]-\left[n\,\Re\left(\frac{\nu}{x}\right)\right]=\nu\,\Re\left(\frac{n}{x}\right)-n\,\Re\left(\frac{\nu}{x}\right),$$

da rechts die beiden Bruchreste sich forthebeu, folglich, wenn durch $\nu\,.\,n$ dividirt wird,

$$(7)\qquad \sum_{x=1}^{\infty}\varphi(x)\left(\frac{1}{n}\,\Re\left(\frac{n}{x}\right)-\frac{1}{\nu}\,\Re\left(\frac{\nu}{x}\right)\right)=\frac{\nu-n}{2}\,.$$

Sind in (3) nur die zwei Zahlen $n$ und $n'$ von Null verschieden, so lässt sich diese Gleichung in anderer Weise schreiben. In diesem Falle ist nämlich

$$\left[\Re\left(\frac{n}{x}\right)+\Re\left(\frac{n'}{x}\right)\right]=0 \text{ oder } =1,$$

und es lässt sich leicht eine Bedingung dafür aufstellen, wann der eine, wann der andere Fall eintritt. Man nenne $\delta$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $n$ und $n'$ und setze:

$$n=r\cdot\delta,\quad n'=r'\cdot\delta.$$

Sind dann $\frac{y}{r}$ und $\frac{y'}{r'}>\frac{y}{r}$ zwei auf einander folgende Brüche der Reihen $\frac{1}{r},\ \frac{2}{r}\cdots\frac{r-1}{r}$ und $\frac{1}{r'},\ \frac{2}{r'}\cdots\frac{r'-1}{r'}$, so dass

$$\frac{y'}{r'}-\frac{y}{r}=\frac{y'r-yr'}{rr'}<\frac{1}{r},\ \frac{1}{r'}$$

(d. h. kleiner als die kleinste der Zahlen $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r'}$),

so liegt zwischen $\frac{y}{r}$ und $\frac{y'}{r'}$ ein und nur ein Bruch mit dem Nenner $r+r'$; es ist nämlich

$$\frac{y}{r}<\frac{y+y'}{r+r'}<\frac{y'}{r'}$$

und die positiven Differenzen

$$\frac{y+y'}{r+r'}-\frac{y}{r}=\frac{y'r-yr'}{r(r+r')}\quad\text{und}\quad\frac{y'}{r'}-\frac{y+y'}{r+r'}=\frac{y'r-yr'}{r'(r+r')}$$

sind beide kleiner als $\frac{1}{r+r'}$. Zwischen $\frac{y}{r}$ und $\frac{y+1}{r}$ und zwischen $\frac{y'}{r'}$ und $\frac{y'+1}{r'}$ liegt offenbar mindestens je ein Bruch mit dem Nenner $r+r'$. Das Intervall von 0 bis 1 zerfällt hiernach in $2(r+r'-1)$ Theilintervalle, deren jedes einerseits von einem Bruche mit dem Nenner $r+r'$, andererseits von einem Bruche mit einem der Nenner $r$ oder $r'$ begrenzt wird. Wenn nun $\Re\left(\frac{\delta}{x}\right)$ die Bedingung

$$\frac{y+y'-1}{r+r'}\leqq\Re\left(\frac{\delta}{x}\right)<\frac{y}{r},\ \frac{y'}{r'}$$

erfüllt, d. h. wenn $\Re\left(\frac{\delta}{x}\right)$ in einem Theilintervall liegt, welches mit einem Bruche des Nenners $r + r'$ anfängt, so ist

$$\left[\frac{(r+r')\delta}{x}\right] = y + y' - 1, \quad \left[\frac{r\delta}{x}\right] = y - 1, \quad \left[\frac{r'\delta}{x}\right] = y' - 1,$$

also der Coefficient von $\varphi(x)$, nämlich

$$\left[\Re\left(\frac{r\delta}{x}\right) + \Re\left(\frac{r'\delta}{x}\right)\right] = \left[\frac{(r+r'\delta)}{x}\right] - \left[\frac{r\delta}{x}\right] - \left[\frac{r'\delta}{x}\right] = 1.$$

Liegt dagegen $\Re\left(\frac{\delta}{x}\right)$ in einem mit einem Bruche des Nenners $r + r'$ schliessenden Intervall, ist also z. B.

$$\frac{y'-1}{r'}, \ \frac{y}{r} \lessgtr \Re\left(\frac{\delta}{x}\right) < \frac{y+y'}{r+r'},$$

so ist

$$\left[\frac{(r+r')\delta}{x}\right] = y + y' - 1, \quad \left[\frac{r\delta}{x}\right] = y, \quad \left[\frac{r'\delta}{x}\right] = y' - 1,$$

mithin der Coefficient von $\varphi(x)$ gleich Null. Es ist folglich

$$\sum \varphi(x) = r \,.\, r' \cdot \delta^2, \tag{8}$$

*wenn $x$ alle Werthe annimmt, welche die Bedingungen*

$$\frac{y+y'-1}{r+r'} \lessgtr \Re\left(\frac{\delta}{x}\right) < \frac{y}{r}, \ \frac{y'}{r'} \quad (y = 1,2 \ldots r, \ y' = 1,2 \ldots r')$$

*erfüllen.* Wir hatten vorausgesetzt, dass $\frac{y}{r}$, $\frac{y'}{r'}$ zwei auf einander folgende Brüche der Nenner $r$ und $r'$ wären; diese Voraussetzung braucht der Bedingung nicht hinzugefügt zu werden, denn dieselbe wird offenbar sicher nicht erfüllt, wenn zwischen $\frac{y}{r}$ und $\frac{y'}{r'}$ noch ein Bruch des Nenners $r$ oder $r'$ liegt. Die Gleichung (8) gilt, beiläufig bemerkt, in genau derselben Form, wenn $r$ und $r'$ nicht relativ prim sind. Für $\delta = n$, $r' = 1$, $r = \nu - 1$ geht (8) über in

$$\sum \varphi(x) = (\nu - 1) \cdot n^2,$$

$$\frac{y}{\nu} \lessgtr \Re\left(\frac{n}{x}\right) < \frac{y}{\nu - 1} \qquad (y = 1, 2, \ldots \nu - 1).$$

Es ist nicht schwer nachzuweisen, dass die Bedingung dieser Gleichung mit der Bedingung von Gleichung (6) congruirt. Insbesondere ist für $n = 1$ nur dann

$$\frac{y}{\nu} < \frac{1}{x} < \frac{y}{\nu - 1},$$

oder

$$\nu - 1 < xy \lessgtr \nu,$$

wenn $x$ ein Theiler von $\nu$ ist, so dass auch aus (8) durch Specialisirung

wieder das Gauss'sche Theorem erhalten wird. Für $r = r' = 1$, $\delta = n$ ergiebt sich aus (8):

*Es ist*

$$\sum \varphi(x) = n^2,$$

*wenn $x$ alle Zahlen durchläuft, für welche der Bruchrest von $\frac{n}{x} \geq \frac{1}{2}$ ist.*

Durch andere Specialisirungen der willkürlichen Zahlen $n, n' \ldots$ kann man aus der Gleichung (3) andere und andere Eigenschaften der Function $\varphi$ ableiten, die aber, soweit ich sie untersucht habe, kein besonderes Interesse beanspruchen können.

Bergedorf, im August 1887.

# Ueber algebraische Beziehungen zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen für eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

---

In meinen „algebraischen Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" habe ich nachgewiesen, dass für eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung nie eine algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen derselben bestehen darf, und in einer in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit wird diese Frage für beliebige algebraische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung erörtert. Schwieriger ist die Frage, ob für irreductible Differentialgleichungen zwischen den particulären Integralen und deren Ableitungen algebraische Relationen bestehen können und welcher Natur dieselben sind, und in der vorliegenden Arbeit soll die Antwort hierauf für lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung gegeben werden.

Sei zunächst die irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Normalform

$$y'' = f(x) \cdot y \tag{1}$$

vorgelegt, worin $f(x)$ eine algebraische Function bedeutet, und untersuchen wir zuerst, ob für eine solche Differentialgleichung zwischen zwei Fundamentalintegralen derselben, der Ableitung *eines* dieser Integrale und der unabhängigen Variabeln eine algebraische Beziehung

$$y_1' = \omega(x, y_1, y_2) \tag{2}$$

bestehen kann.

Bringt man (2) auf die Form

$$y_2 = \Omega(x, y_1, y_1'), \tag{3}$$

so dass nach (1)

$$y_2' = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1'} f(x) y_1 \tag{4}$$

wird, dann ergiebt sich durch Einsetzen der Ausdrücke (3) und (4)

in die bekannte für irgend zwei particuläre Integrale stattfindende Relation

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = a, \tag{5}$$

worin $a$ eine bestimmte Constante bedeutet,

$$y_1\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1'} f(x) y_1\right) - y_1'\Omega(x, y_1, y_1') = a; \tag{6}$$

da aber die Differentialgleichung (1) als irreductibel vorausgesetzt wurde, also $y_1$ nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen darf, so wird (6) eine in $x$, $y_1$, $y_1'$ identische Gleichung sein müssen, und also auch bestehen bleiben, wenn man statt $y_1$ *irgend* ein Integral $\eta_1$ der Differentialgleichung (1) setzt.

Dann nimmt aber (6) die Form an

$$\eta_1 \frac{d\Omega(x, \eta_1, \eta_1')}{dx} - \eta_1'\Omega(x, \eta_1, \eta_1') = a,$$

oder es findet, wenn

$$\eta_2 = \Omega(x, \eta_1, \eta_1')$$

gesetzt wird, die Beziehung statt

$$\eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1' = a,$$

oder endlich noch anders ausgesprochen, es ist, wenn $\mu_1$ und $\mu_2$ willkürliche Constanten bedeuten, der Ausdruck

$$\eta_2 = \Omega(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2') \tag{7}$$

ein Integral der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2)\frac{d\eta}{dx} - (\mu_1 y_1' + \mu_2 y_2')\eta = a. \tag{8}$$

Nun ist aber das allgemeine Integral der Differentialgleichung (8) offenbar in der Form

$$\eta = m_1 y_1 + m_2 y_2 \tag{9}$$

enthalten, wenn $m_1$, $m_2$, $\mu_1$, $\mu_2$ durch die Gleichung mit einander verbunden sind,

$$\mu_1 m_2 - m_1 \mu_2 = 1, \tag{10}$$

da mit Berücksichtigung von (10)

$$(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2)(m_1 y_1' + m_2 y_2') - (\mu_1 y_1' - \mu_2 y_2')(m_1 y_1 + m_2 y_2) = a$$

folgt, und eine der Constanten $m_1$ oder $m_2$ beliebig bleibt; es wird daher, da $\eta_2$ ein Integral der Differentialgleichung (8) ist, $\eta_2$ in der Form $m_1 y_1 + m_2 y_2$, worin $\mu_1 m_2 - m_1 \mu_2 = 1$ ist, enthalten sein, und wir finden somit,

> *dass, wenn zwischen zwei Fundamentalintegralen $y_1$ und $y_2$ einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung* (1) *und der Ableitung eines derselben eine algebraische Beziehung besteht, diese erhalten bleibt, wenn man das eine Fundamental-*

*integral nebst seiner Ableitung durch ein beliebiges Integral* $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$ *ersetzt, während man für das andere Fundamentalintegral ein Integral der Form*

$$m_1 y_1 + \frac{1+m_1\mu_2}{\mu_1} y_2 \quad \text{oder} \quad \frac{\mu_1 m_2 - 1}{\mu_2} y_1 + m_2 y_2$$

*substituirt, worin* $m_1$ *resp.* $m_2$ *eine bestimmte Function von* $\mu_1$ *und* $\mu_2$ *darstellt.*

Setzt man in (3) $\mu_1 y_1$ statt $y_1$, also $m_1 y_1 + \frac{1}{\mu_1} y_2$ statt $y_2$, so folgt mit Hülfe von (3) selbst

$$(11)\quad m_1 y_1 + \frac{1}{\mu_1} y_2 = \Omega(x, \mu_1 y_1, \mu_1 y_1') = m_1 y_1 + \frac{1}{\mu_1}\Omega(x, y_1, y_1'),$$

und da die Differentialgleichung (1) irreductibel sein sollte, $y_1$ also nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung genügen darf, so ist es gestattet, die letzte Gleichung, die somit eine identische sein muss, nach $y_1$ und $y_1'$ zu differentiiren, woraus

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{\partial\Omega(x, \mu_1 y_1, \mu_1 y_1')}{\partial \mu_1 y_1}\mu_1 = m_1 + \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial\Omega(x, y_1, y_1')}{\partial y_1} \\ \frac{\partial\Omega(x, \mu_1 y_1, \mu_1 y_1')}{\partial \mu_1 y_1'}\mu_1 = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial\Omega(x, y_1, y_1')}{\partial y_1'} \end{cases}$$

folgt. Differentiirt man ferner (11) nach $\mu_1$, so ergiebt sich

$$\frac{\partial\Omega(x, \mu_1 y_1, \mu_1 y_1')}{\partial \mu_1 y_1} y_1 + \frac{\partial\Omega(x, \mu_1 y_1, \mu_1 y_1')}{\partial \mu_1 y_1'} y_1' = y_1 \frac{dm_1}{d\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2}\Omega(x, y_1, y_1'),$$

oder mit Hülfe von (12)

$$(13)\quad y_1 \frac{\partial\Omega(x, y_1, y_1')}{\partial y_1} + y_1' \frac{\partial\Omega(x, y_1, y_1')}{\partial y_1'} = \left(\mu_1^2 \frac{dm_1}{d\mu_1} - \mu_1 m_1\right) y_1 - \Omega(x, y_1, y_1'),$$

und es wird somit das allgemeine Integral dieser Gleichung, welche vermöge ihrer Identität in $y_1$ und $y_1'$ als eine partielle Differentialgleichung in den unabhängigen Variabeln $y_1$ und $y_1'$ und der zu bestimmenden Function $\Omega$ aufgefasst werden kann, bekanntlich in der Form dargestellt sein

$$(14)\quad \Omega(x, y_1, y_1') = \frac{1}{y_1}\varphi\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right) + \left(\mu_1^2 \frac{dm_1}{d\mu_1} - \mu_1 m_1\right)\frac{y_1}{2},$$

worin $\varphi\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right)$ eine beliebige algebraische Function von $x$ und $\frac{y_1'}{y_1}$ sein kann. Es wird somit

$$(15)\quad y_2 = \frac{1}{y_1}\varphi\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right) + \left(\mu_1^2 \frac{dm_1}{d\mu_1} - \mu_1 m_1\right)\frac{y_1}{2}.$$

oder da die Beziehung von der willkürlichen Grösse $\mu_1$ frei sein muss*), wenn die numerische Constante $\mu_1^2 \frac{dm_1}{d\mu_1} - \mu_1 m_1 = 2c$ gesetzt wird,

(16) $y_2 = \frac{1}{y_1}\varphi\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right) + cy_1$, oder $y_1' = y_1\omega(x, y_1(y_2 - cy_1))$.

Setzt man in diese Gleichung $y_2$ statt $y_1$, so wird nach dem obigen Satze, weil $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ ist, statt $y_2$ der Ausdruck $-y_1 + m_2 y_2$ zu substituiren sein, und man erhält somit

$$y_2' = y_2\omega\left(x, y_2(-y_1 + (m_2 - c)y_2)\right),$$

oder da $m_2 - c = k$ wieder eine numerische Constante sein muss,

(17) $$y_2' = y_2\omega(x, y_2(-y_1 + ky_2)).$$

Aus (16) und (17) folgt vermöge der Beziehung (5)

(18) $$y_1 y_2\{\omega(x, y_2(-y_1 + ky_2)) - \omega(x, y_1(y_2 - cy_1))\} = a,$$

und diese Gleichung muss eine in $x, y_1, y_2$ identische sein, da eine algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen bekanntlich für eine irreductible lineare Differentialgleichung nicht statthaben kann. Setzt man nun in (18) $y_2 = cy_1$, wobei $c$ von Null verschieden angenommen wird, so folgt, wenn $cy_1^2 = z$ gesetzt wird, für beliebige $z$

$$\omega(x, (kc-1)z) = \frac{a}{z} + \omega(x, 0)^{**})$$

oder

$$\omega(x, t) = \frac{a(kc-1)}{t} + \omega(x, 0),$$

welche Gleichung offenbar unmöglich ist; es müsste also in (18) $c = 0$ sein, und die Gleichung somit übergehen in

(19) $$y_1 y_2\{\omega(x, y_2(-y_1 + ky_2)) - \omega(x, y_1 y_2)\} = a.$$

*) Man kann auch direct den in (14) gefundenen Ausdruck in (11) einsetzen und erhält

$$m_1 y_1 + \frac{1}{\mu_1 y_1}\varphi\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right) + \left(\mu_1 \frac{dm_1}{d\mu_1} - m_1\right)\frac{y_1}{2} = \frac{1}{\mu_1 y_1}\varphi\left(x, \frac{y_1'}{y_1}\right) + \left(\mu_1^2 \frac{dm_1}{d\mu_1} - \mu_1 m_1\right)\frac{\mu_1 y_1}{2}$$

oder

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(\mu_1 \frac{dm_1}{d\mu_1} - m_1\right)(\mu_1^2 - 1)$$

oder

$$\frac{dm_1}{d\mu_1} \cdot \frac{1}{m_1} = \frac{\mu_1^2 + 1}{\mu_1(\mu_1^2 - 1)},$$

woraus durch Integration

$$m_1 = c\,\frac{\mu_1^2 - 1}{\mu_1}$$

also

$$\mu_1^2 \frac{dm_1}{d\mu_1} - \mu_1 m_1 = 2c$$

folgt, worin $c$ eine numerische Constante bedeutet.

**) Die Annahme $kc - 1 = 0$ ist mit der Irreductibilität unvereinbar.

Setzt man hierin $y_1 = ky_2$, wenn wiederum $k$ von Null verschieden vorausgesetzt wird, so folgt

$$\omega(x, z) = \omega(x, 0) - \frac{a}{z},$$

also wiederum unmöglich, es muss also auch $k = 0$ sein, so dass die Gleichungen (16) und (17) die Form annehmen

(20) $$y_1' = y_1 \omega(x, y_1 y_2)$$

und

(21) $$y_2' = y_2 \omega(x, -y_1 y_2).$$

Setzt man endlich in (20) $y_1 + y_2$ statt $y_1$, so muss wiederum nach dem oben bewiesenen Satze statt $y_2$ wegen $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$ der Ausdruck $m_1 y_1 + (1+m_1) y_2$ substituirt werden, und man erhält

(22) $$y_1' + y_2' = (y_1+y_2)\omega\{x, (y_1+y_2)(m_1(y_1+y_2)+y_2)\},$$

oder vermöge (20) und (21) die wieder in $y_1$ und $y_2$ nothwendig identische Gleichung

$$y_1\omega(x, y_1y_2) + y_2\omega(x, -y_1y_2) = (y_1+y_2)\omega\{x, (y_1+y_2)(m_1(y_1+y_2)+y_2)\};$$

setzt man in dieser $y_2 = 0$, so folgt

$$y_1\omega(x, 0) = y_1\omega(x, m_1 y_1^2),$$

und somit wieder $m_1 = 0$, so dass (22) übergeht in

(23) $$y_1' + y_2' = (y_1+y_2)\omega(x, (y_1+y_2)y_2),$$

oder wiederum vermöge (20) und (21) in

$$y_1\omega(x, y_1y_2) + y_2\omega(x, -y_1y_2) = (y_1+y_2)\omega(x, (y_1+y_2)y_2),$$

woraus sich für $y_1 = 0$

$$y_2\omega(x, 0) = y_2\omega(x, y_2^2)$$

ergiebt, und somit die Unmöglichkeit der Existenz einer Beziehung von der Form (3) oder (2) erwiesen ist.

Wir erhalten daher zunächst den folgenden Satz:

*Für eine in der Normalform gegebene lineare homogene irreductible Differentialgleichung zweiter Ordnung kann nie zwischen zwei Fundamentalintegralen und der Ableitung eines derselben eine algebraische Beziehung bestehen;*

daraus folgt aber wieder unmittelbar,

*dass für eine in der Normalform gegebene lineare homogene irreductible Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Fundamentalintegralen und den Ableitungen derselben nie eine andere algebraische Beziehung bestehen kann als die stets gültige $y_1y_2' - y_2y_1' = a$, oder eine algebraisch aus dieser hergeleitete;*

denn eine Elimination von $y_1'$ oder $y_2'$ zwischen einer solchen etwa bestehenden Relation und der eben angeführten stets gültigen würde

eine algebraische Beziehung zwischen den beiden Fundamentalintegralen und der Ableitung *eines* derselben oder nur zwischen den beiden Integralen liefern, und das erstere ist nach dem eben bewiesenen Satze, das letztere bekanntlich für irreductible lineare Differentialgleichungen ebenfalls nicht statthaft.

Der eben bewiesene Satz gilt aber nicht bloss für die angegebenen Differentialgleichungen in ihrer Normalform sondern auch für beliebige lineare homogene irreductible Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Denn handelt es sich um die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0, \tag{24}$$

und bestehe für dieselbe eine algebraische Beziehung zwischen zwei particulären Fundamentalintegralen und deren Ableitungen

$$F(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = 0, \tag{25}$$

so differentiire man diese Relation und erhalte mit Benutzung von (24)

$$F_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = 0. \tag{26}$$

Wir wollen zeigen, dass diese Beziehung die linke Seite von (25) nicht identisch enthält; denn wäre identisch

$$\frac{dF(x, y_1, y_1', y_2, y_2')}{dx} = F(x, y_1, y_1', y_2, y_2') \cdot P, \tag{27}$$

so ist unmittelbar zu sehen, dass $P$, da (24) linear ist, eine algebraische Function von $x$ sein wird, und dass, weil (27) identisch sein soll, dieselbe also auch bestehen bleibt, wenn $y_1$ und $y_2$ durch $\mu_{11}y_1 + \mu_{12}y_2$ und $\mu_{21}y_1 + \mu_{22}y_2$ ersetzt werden, die Beziehung statthat

$$\frac{dF(x, \mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2, \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2', \mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2, \mu_{21}y_1'+\mu_{22}y_2')}{dx} \tag{28}$$

$$= F(x, \mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2, \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2', \mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2, \mu_{21}y_1'+\mu_{22}y_2') \cdot P,$$

welche mit (27) zusammengestellt für beliebige Werthe der $\mu$ als identische*) Gleichung

$$F(x, \mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2, \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2', \mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2, \mu_{21}y_1'+\mu_{22}y_2') \tag{29}$$
$$= C \cdot F(x, y_1, y_1', y_2, y_2')$$

liefert, worin $C$ eine von den $\mu$ abhängige Constante bedeutet. Daraus würde sich aber für $F$ die Form ergeben

$$F(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = M\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}^p, \tag{30}$$

worin $M$ eine ganze Function von $x$ bedeutet, und dies wäre mit (25) nicht vereinbar, da

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = a e^{-\int f_1(x)\,dx} \tag{31}$$

*) Wäre sie nicht identisch, so würde sie nach dem Folgenden als zweite Relation zu (25) hinzutreten.

ist. Es wäre somit gezeigt, dass (25) und (26) zwei selbständige algebraische Beziehungen zwischen den beiden particulären Integralen und deren Ableitungen darstellen, wenn (26) überhaupt bestünde und nicht eine an sich identische Gleichung wäre; für diesen Fall aber würde (26) auch bestehen, wenn $y_1$ und $y_2$ wiederum durch $\mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2$, $\mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2$ ersetzt würden, und die Gleichung

$$F_1(x,\mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2,\ \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2',\ \mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2,\ \mu_{21}y_1'+\mu_{22}y_2')=0$$

würde die Beziehung

$$(32)\quad F(x,\mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2,\ \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2',\ \mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2,\ \mu_{21}y_1'+\mu_{22}y_2')=K$$

hervorrufen, worin $K$ eine Constante bedeutet. Diese Gleichung kann nun einerseits nicht für alle $\mu$ identisch erfüllt sein, weil es dann auch (25) sein müsste, andererseits kann die Gleichung (32) die Function $F$ der Gleichung (25) nicht identisch enthalten, weil, wenn

$$(33)\quad F(x,\mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2,\ \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2',\ \mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2,\ \mu_{21}y_1'+\mu_{22}y_2')-K = MF(x,y_1,y_1',y_2,y_2')$$

wäre, worin $K$ und offenbar auch $M$ nur von den $\mu$ abhängige Grössen bedeuten, sich, wenn $F(x,0,0,0,0)=L$ gesetzt wird,

$$L-K=ML$$

oder

$$K=L-ML,$$

und hieraus nach (33) durch Substitution von

$$(34)\qquad F(x,y_1,y_1',y_2,y_2')-L=f(x,y_1,y_1',y_2,y_2')$$

sich

$$(35)\quad f(x,\mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2,\ \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2',\ \mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2,\ \mu_{21}y_1'+\mu_{22}y_2') = Mf(x,y_1,y_1',y_2,y_2')$$

ergäbe und somit

$$f(x,y_1,y_1',y_2,y_2')=N\begin{vmatrix}y_1 & y_1'\\ y_2 & y_2'\end{vmatrix}^p;$$

daraus würde aber

$$F(x,y_1,y_1',y_2,y_2')=N\begin{vmatrix}y_1 & y_1'\\ y_2 & y_2'\end{vmatrix}^p+L$$

folgen, was wiederum nicht angeht.*)

Für den Fall also, dass die Gleichung (26) eine identische ist, würde die Beziehung (32) an ihre Stelle treten, so dass jedenfalls aus

*) Der Fall nämlich, in welchem $f_1(x)$ das logarithmische Differential einer algebraischen Function ist, bedarf überhaupt keiner besonderen Behandlung, da die für die Normalform der Differentialgleichungen zweiter Ordnung geltende Beziehung $y_1y_2'-y_2y_1'=a$ hier nur in $y_1y_2'-y_2y_1'=a\varphi(x)$ übergeht, worin $\varphi(x)$ eine algebraische Function von $x$ ist, und die früheren Schlüsse also sämmtlich bestehen bleiben.

der Existenz einer algebraischen Beziehung (25) zwischen den beiden Fundamentalintegralen und deren Ableitungen noch eine andere eben solche sich ergiebt, und sich somit jedenfalls mit Hülfe dieser beiden und der Determinantenrelation eine algebraische Beziehung von der Form

$$y_1' = \omega\left(x, y_1, e^{\int f_1(x)\,dx}\right) \tag{36}$$

ableiten lassen würde.

Wendet man nun aber auf die Differentialgleichung (24) die Substitution

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)\,dx}\, z \tag{37}$$

an, so geht diese in die reducirte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$z'' = \left[\tfrac{1}{4} f_1(x)^2 + \tfrac{1}{2} f_1'(x) - f_2(x)\right] z = Pz \tag{38}$$

über, die, wie sich leicht einsehen lässt, ebenso wie (24) irreductibel ist; denn die Annahme der Reductibilität der Differentialgleichung (38) hat nach den in meinen „allg. Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen“ bewiesenen Sätzen zur Folge, dass dieselbe ein Integral $z_1$ besitzt, welches einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dZ}{dx} = QZ$$

genügt, worin $Q$ eine algebraische Function von $x$ ist, und es wird, wenn

$$Z = e^{\frac{1}{2}\int f_1(x)\,dx}\, Y$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung

$$Y' = \left(Q - \tfrac{1}{2} f_1(x)\right) Y$$

mit der Differentialgleichung (24) das der Substitution

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)\,dx}\, z_1$$

entsprechende Integral gemein haben, also würde auch gegen die Annahme die Differentialgleichung (24) reductibel sein.

Bezeichnet man nun das dem Integrale $y_1$ entsprechende Integral der Differentialgleichung (38) mit $z_1$, so wird aus

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)\,dx}\, z_1, \quad y_1' = e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)\,dx}\, z_1' - \tfrac{1}{2} f_1(x) e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)\,dx}\, z_1$$

und der Gleichung (36) die Beziehung folgen

(39) $$\Phi(x, e^{\int f_1(x)\,dx}, z_1, z_1') = 0$$

oder

(40) $$e^{\int f_1(x)\,dx} = \Omega(x, z_1, z_1'),$$

und es bleibt zu untersuchen, ob für eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung (38) eine derartige Beziehung bestehen kann. Differentiirt man die Gleichung (40), so dass nach (38)

(41) $$f_1(x)e^{\int f_1(x)\,dx} = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} z_1' + \frac{\partial\Omega}{\partial z_1'} Pz$$

wird, so folgt aus diesen beiden Gleichungen

(42) $$\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} z_1' + \frac{\partial\Omega}{\partial z_1'} Pz = f_1(x)\Omega,$$

welche Gleichung wegen der Irreductibilität der Differentialgleichung (38) identisch sein muss, also auch bestehen wird, wenn $z_1$ und $z_1'$ durch irgend ein anderes Integral $\zeta_1$ dieser Differentialgleichung und $\zeta_1'$ ersetzt werden. Bildet man nun die Gleichung

(43) $$M = \Omega(x, \zeta_1, \zeta_1'),$$

worin $M$ zu bestimmen sein wird, so folgt

(44) $$\frac{dM}{dx} = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial \zeta_1} \zeta_1' + \frac{\partial\Omega}{\partial \zeta_1'} P\zeta_1,$$

und weil (42) durch $\zeta_1$ und $\zeta_1'$ erfüllt werden, ergiebt sich

$$\frac{dM}{dx} = f_1(x) M$$

und daher

$$M = Ce^{\int f_1(x)\,dx} = C \cdot \Omega(x, z_1, z_1')$$

worin $C$ eine Constante bedeutet. Stellt man diese Gleichung mit (43) zusammen und bemerkt, dass $\zeta_1 = m_1 z_1 + m_2 z_2$ ist, wenn $z_1$ und $z_2$ zwei Fundamentalintegrale der Differentialgleichung (38) bedeuten, so folgt für beliebige Werthe von $m_1$ und $m_2$

(45) $$\Omega(x, m_1 z_1 + m_2 z_2, m_1 z_1' + m_2 z_2') = C \cdot \Omega(x, z_1, z_1'),$$

worin $C$ von $m_1$ und $m_2$ abhängt. Eine solche algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen für eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Normalform kann aber nach dem Vorigen nur dann bestehen, wenn sie durch

$$z_1 z_2' - z_2 z_1' = a$$

identisch befriedigt wird, oder es müsste die Gleichung

(46) $$\Omega\left(x, m_1 z_1 + m_2 z_2, \frac{m_2 a}{z_1} + \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{z_1} z_1'\right) = C\Omega(x, z_1, z_1')$$

bestehen für willkürliche Werthe von $m_1, m_2, z_1, z_2, z_1'$; da aber für eine feste Wahl von $z_1$ und $z_1'$ die rechte Seite bestimmt ist, während die linke noch von dem Werthe von $z_2$ abhängt, und wenn z. B. $m_1 z_1 + m_2 z_2 = z_1$ gesetzt wird, eine algebraische Beziehung von der Form

$$\Omega\left(x, z_1, \frac{m_2 a}{z_1} + z_1'\right) = C\Omega(x, z_1, z_1')$$

nicht bestehen kann, so ist die Unmöglichkeit der Beziehung (40) nachgewiesen, also auch die der Gleichung (36) und daher auch die von (25); es ergiebt sich somit als Resultat der vorhergehenden Untersuchung der nachfolgende Satz:

*Zwischen zwei Fundamentalintegralen einer linearen homogenen irreductibeln Differentialgleichung zweiter Ordnung und deren Ableitungen kann nur dann eine algebraische Beziehung stattfinden, wenn $f_1(x)$ der logarithmische Differentialquotient einer algebraischen Function ist, und dann ist*

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = a e^{-\int f_1(x)\,dx}$$

*die einzige algebraische Relation.*

Die Ausdehnung dieser Untersuchungen auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung wird nächstens im Journal für Mathematik erscheinen.

# Ueber eine besondere Art von Strahlensystemen.

Von

R. v. Lilienthal in Bonn.

Denkt man sich jedem Punkt einer Fläche die durch ihn hindurchgehende Normale sowie die beiden durch ihn hindurchgehenden Tangenten der Krümmungslinien zugeordnet und legt nun durch jeden Flächenpunkt eine Gerade, welche mit den drei ihm zugeordneten Geraden constante Winkel bildet, so entsteht ein Strahlensystem, das wir *covariant* in Bezug auf die betrachtete Fläche nennen wollen. Analytisch besagt dies Folgendes. Sind $x, y, z$ die Coordinaten der Punkte einer Fläche, $\xi, \eta, \zeta$ die Richtungscosinus des durch den Punkt $(x, y, z)$ hindurchgehenden Strahls, $X, Y, Z$ die Richtungscosinus der Flächennormalen, $A_1, B_1, C_1$, diejenigen der Tangente der zum Hauptkrümmungshalbmesser $\varrho_1$, $A_2, B_2, C_2$ diejenigen der Tangente der zum Hauptkrümmungshalbmesser $\varrho_2$ gehörenden Krümmungslinie, so ist das Strahlensystem $(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ covariant in Bezug auf die Fläche $(x, y, z)$, wenn in den Gleichungen

$$\sum \xi X = c_0, \quad \sum \xi A_1 = c_1, \quad \sum \xi A_2 = c_2$$

die rechten Seiten constant ausfallen.

Der Fall $c_0 = 1$ liefert die gewöhnliche Krümmungstheorie der Flächen; die Fälle $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ ergeben die Theorie der Tangentensysteme der Krümmungslinien einer Fläche, welche im § 1 behandelt werden soll. Dieselbe steht in inniger Beziehung zu der Krümmungstheorie der Krümmungsmittelpunktsflächen. (Vergl. diese Annalen Bd. 30, S. 1) Zugleich spielen hier die Abscissen der Brennpunkte $R_1$ und $R_2$ eine Hauptrolle, Grössen, die sowohl mit den Böcklen'schen *Polstrecken der beiden Hauptschnitte* (Archiv, Theil 41, S. 32, und Kroneckers Journal Bd. 96, S. 152), als mit den geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien zusammenfallen.

Im § 2 sollen einige Sätze in Betreff der Grössen $R_1$ und $R_2$ entwickelt und die Bedeutung der letzteren für die Lehre von den geodätischen Linien dargethan werden. Endlich wird im § 3 die allgemeine

Theorie unserer Strahlensysteme, soweit sie von Interesse zu sein scheint, aufgestellt. Abwickelbare Flächen und in Curven ausartende Krümmungsmittelpunktsflächen seien im Folgenden ausgeschlossen.

## § 1.

**Die Strahlensysteme $(x, y, z, A_1, B_1, C_1)$ und $(x, y, z, A_2, B_2, C_2)$.**

Die von der Fläche $(x, y, z)$ als ausgehend betrachteten Strahlen des Systems mögen mit den Tangenten der zu $\varrho_1$ gehörenden Krümmungslinien zusammenfallen, sodass: $\xi = A_1$, $\eta = B_1$, $\zeta = C_1$ wird.

Unter Anwendung der in diesen Annalen Bd. 30, S. 1 u. ff. benutzten Bezeichnungen ergiebt sich dann:

$$\sum\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)^2 = L_1, \quad \sum \frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q} = M_1, \quad \sum\left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)^2 = N_1.$$

Nennen wir ein Strahlensystem ein Kummer'sches, wenn die Determinante $\sum\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)^2 \sum\left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)^2 - \left(\sum \frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)^2$ von Null verschieden ist, so haben wir es nur dann nicht mit einem Kummer'schen Strahlensystem zu thun, wenn der Ausdruck:

$$L_1 N_1 - M_1^2 = (T_2\sqrt{L}\cos\sigma - T_1\sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi))^2$$

verschwindet, d. h. wenn die zu $\varrho_1$ gehörende Krümmungsmittelpunktsfläche der Fläche $(x, y, z)$ abwickelbar ist. Schliessen wir diesen Fall aus, so muss also, wenn:

$$Q_1 = T_2\sqrt{L}\cos\sigma - T_1\sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi)$$

gesetzt wird, $Q_1$ von Null verschieden sein.

Die auf das betrachtete Strahlensystem bezogenen Kummer'schen Grössen:

$$e = \sum \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial p}, \; f = \sum \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial p}, \; f' = \sum \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q}, \; g = \sum \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial q}$$

sollen mit $e_1$, $f_1$, $f_1'$ und $g_1$ bezeichnet werden. Dann ist:

$$e_1 = \varrho_2 T_1\sqrt{L}\sin\sigma, \quad f_1 = \varrho_2 T_1\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi),$$
$$f_1' = \varrho_2 T_2\sqrt{L}\sin\sigma, \quad g_1 = \varrho_2 T_2\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi).$$

Die Gleichung $f_1 = f_1'$ kann nur bestehen, wenn:

$$T_2\sqrt{L}\sin\sigma - T_1\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi) = 0$$

ist, d. h. das betrachtete Strahlensystem hat nur dann die Eigenschaft, aus den Normalen einer Fläche zu bestehen, wenn die zu $\varrho_2$ gehörende Krümmungsmittelpunktsfläche abwickelbar ist, ein Fall, der ebenfalls ausgeschlossen werden soll. Nehmen wir:

$$Q_2 = T_2\sqrt{L}\sin\sigma - T_1\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi),$$

so ist also $Q_2$ als von Null verschieden zu betrachten.

Führt man endlich noch die Bezeichnung:

$$Q_0 = \sqrt{L}\sqrt{N}\sin\varphi$$

ein, wo auch $Q_0$ von Null verschieden ist, da sonst die Fläche $(x, y, z)$ abwickelbar wäre, so ergiebt sich für die Abscissen der Grenzpunkte der kürzesten Abstände eines Strahls von seinen benachbarten Strahlen die Gleichung:

$$r^2 - \varrho_2 \frac{Q_0}{Q_1} r - \varrho_2^2 \frac{Q_2^2}{4 Q_1^2} = 0. \tag{1}$$

Da die Fläche $(x, y, z)$ eine Brennfläche des betrachteten Strahlensystems ist, so wird die Abscisse des einen Brennpunktes Null, die des anderen soll mit $R_1$ bezeichnet werden. Dann erhält man:

$$R_1 = \frac{\varrho_2 Q_0}{Q_1}. \tag{2}$$

Gehen wir jetzt zum Strahlensysteme $(x, y, z, A_2, B_2, C_2)$ über, welches von den Tangenten der zu $\varrho_2$ gehörenden Krümmungslinien gebildet wird. Hier wird:

$$\sum\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)^2 = L_2, \quad \sum \frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q} = M_2, \quad \sum\left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)^2 = N_2.$$

Da $L_2 N_2 - M_2^2 = Q_2^2$, so gehört unser Strahlensystem nur dann nicht zu den Kummer'schen, wenn die zu $\varrho_2$ gehörende Krümmungsmittelpunktsfläche der Fläche $(x, y, z)$ abwickelbar ist.

Die Grössen $e$, $f$, $f'$ und $g$ sollen hier mit $e_2$, $f_2$, $f_2'$ und $g_2$ bezeichnet werden. Dann folgt:

$$e_2 = -\varrho_1 T_1 \sqrt{L}\cos\sigma, \quad f_2 = -\varrho_1 T_1 \sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi),$$
$$f_2' = -\varrho_1 T_2 \sqrt{L}\cos\sigma, \quad g_2 = -\varrho_1 T_2 \sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi),$$

woraus ersichtlich ist, dass nur in dem Fall das Normalensystem einer Fläche vorliegt, wenn die zu $\varrho_1$ gehörende Krümmungsmittelpunktsfläche der Fläche $(x, y, z)$ abwickelbar ist.

Für die Abscissen der Grenzpunkte der kürzesten Abstände eines Strahls von seinen benachbarten Strahlen erhält man die Gleichung:

$$r^2 - \varrho_1 \frac{Q_0}{Q_2} r - \frac{\varrho_1^2}{4}\frac{Q_1^2}{Q_2^2} = 0, \tag{3}$$

und wenn die Abscisse des nicht mit dem Punkt $(x, y, z)$ zusammenfallenden Brennpunktes mit $R_2$ bezeichnet wird, so folgt:

$$R_2 = \frac{\varrho_1 Q_0}{Q_2}. \tag{4}$$

Bei Anwendung von (2) und (4) gehen die Gleichungen (1) und (3) über in die folgenden:

$$r^2 - R_1 r - \frac{\varrho_1^2}{4}\frac{R_1^2}{R_2^2} = 0, \tag{5}$$

$$r^2 - R_2 r - \frac{\varrho_2^2}{4}\frac{R_2^2}{R_1^2} = 0. \tag{6}$$

Es soll nun gezeigt werden, dass die Grössen $R_1$ und $R_2$ mit den von Herrn Böcklen *Polstrecken der beiden Hauptschnitte* genannten Grössen übereinstimmen. Zu diesem Zweck ist zunächst der Ausdruck für eine Polstrecke überhaupt in unseren Bezeichnungen aufzustellen. Setzt man zur Abkürzung:

$$H_1 = \sqrt{L}\cos\sigma\, dp + \sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi)\, dq,$$
$$H_2 = \sqrt{L}\sin\sigma\, d\varphi + \sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi)\, dq),$$

so wird nach U. § 4, (3):

$$dx = -\varrho_1 A_1 H_1 - \varrho_2 A_2 H_2.$$

$H_1 = 0$ ist die Gleichung der zu $\varrho_2$, $H_2 = 0$ die Gleichung der zu $\varrho_1$ gehörenden Krümmungslinien.

Bezeichnet man die Richtungscosinus der Tangente, welche zu der durch $dx$, $dy$, $dz$ bestimmten Tangente conjugirt ist, mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, so entsteht:

$$\cos\alpha = \frac{A_1 H_2 - A_2 H_1}{\sqrt{H_1^2+H_2^2}},\quad \cos\beta = \frac{B_1 H_2 - B_2 H_1}{\sqrt{H_1^2+H_2^2}},\quad \cos\gamma = \frac{C_1 H_2 - C_2 H_1}{\sqrt{H_1^2+H_2^2}},$$

wo der Quadratwurzel das Vorzeichen von $C_1 H_2 - C_2 H_1$ beizulegen ist. Hieraus folgt, dass $\frac{H_2}{\sqrt{H_1^2+H_2^2}}$ und $\frac{-H_1}{\sqrt{H_1^2+H_2^2}}$ die Cosinus der Winkel sind, welche die fragliche conjugirte Tangente mit den Tangenten der Krümmungslinien bildet. Nennt man diese Winkel $\psi_1$ und $\psi_2$, so wird:

$$\cos\alpha = A_1\cos\psi_1 + A_2\cos\psi_2.$$

Es sind nun die Richtungscosinus der benachbarten conjugirten Tangente zu bilden, welche durch den Punkt $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ hindurchgeht. Da:

$$dA_1 = -A_2(T_1 dp + T_2 dq) - XH_1,$$
$$dA_2 = \quad A_1(T_1 dp + T_2 dq) - XH_2,$$

$$d\cos\psi_1 = -\cos\psi_2 \frac{H_1 dH_2 - H_2 dH_1}{H_1^2+H_2^2},\quad d\cos\psi_2 = \cos\psi_1 \frac{H_1 dH_2 - H_2 dH_1}{H_1^2+H_2^2},$$

so wird, wenn man:

$$S = T_1 dp + T_2 dq - \frac{H_1 dH_2 - H_2 dH_1}{H_1^2+H_2^2}$$

setzt:

$$d\cos\alpha = S(A_1\cos\psi_2 - A_2\cos\psi_1).$$

In dem Ausdruck $T_1 dp + T_2 dq$ sind die Grössen $R_1$ und $R_2$ bereits enthalten. Aus den Gleichungen:

$$T_2\sqrt{L}\cos\sigma - T_1\sqrt{N}\cos(\sigma-\varphi) = Q_1,$$
$$T_2\sqrt{L}\sin\sigma - T_1\sqrt{N}\sin(\sigma-\varphi) = Q_2,$$

folgt nämlich:

$$T_1\,dp + T_2\,dq = \frac{Q_2 H_1 - Q_1 H_2}{Q_0},$$

d. h. nach (2) und (4):

$$T_1\,dp + T_2\,dq = \frac{\varrho_1 H_1}{R_2} - \frac{\varrho_2 H_2}{R_1}.$$

Die beiden benachbarten conjugirten Tangenten schneiden sich nun in einem Punkt, dessen Abscisse in Bezug auf den Punkt $(x\,y\,z)$ mit $\overline{R}$ bezeichnet werden möge. Dann ist:

$$\overline{R} = -\frac{\varrho_1 H_1^2 + \varrho_2 H_2^2}{S \cdot \sqrt{H_1^2 + H_2^2}}.$$

Fallen die beiden dem Punkt $(xyz)$ benachbarten Punkte, welche die betrachteten conjugirten Tangenten bestimmen, in die zu $\varrho_1$ gehörende Krümmungslinie, so verschwindet $H_2$ und $dH_2$, $S$ wird gleich $\frac{\varrho_1 H_1}{R_2}$. Die Quadratwurzel im Nenner von $\overline{R}$ wird $-H_1$, und $\overline{R}$ selbst geht in $R_2$ über.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich $\overline{\overline{R}} = R_1$, wenn die benachbarten conjugirten Tangenten durch Punkte auf der zu $\varrho_2$ gehörenden Krümmungslinie bestimmt werden.

## § 2.

## Die Grössen $R_1$ und $R_2$.

1) Gauss hat bekanntlich gezeigt, dass:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{Q_0}{P_0}$$

ist, wenn $P_0$ die mit dem geeigneten Vorzeichen versehene Quadratwurzel aus $EG - F^2$ bedeutet. Hiernach ergeben die Gleichungen (2) und (4) des vorigen Paragraphen:

$$\frac{1}{\varrho_1 R_1} = \frac{Q_1}{P_0}, \quad \frac{1}{\varrho_2 R_2} = \frac{Q_2}{P_0}.$$

Jedem Punkt $P$ der Fläche $(x, y, z)$ entsprechen nun drei Punkte (0), (1), (2) auf der Gauss'schen Einheitskugel, welche zu den drei Kugelhalbmessern gehören, die den positiven Theilen der Normalen und der beiden Tangenten der Krümmungslinien parallel sind. Das den Punkt $(x, y, z)$ umgebende Flächenelement möge mit $K$, hingegen die zu den Punkten (0), (1), (2) gehörenden Elemente der Einheitskugel mit $K_0$, $K_1$, $K_2$ bezeichnet werden. Man hat dann abgesehen vom Vorzeichen:

$$\frac{Q_0}{P_0} = \frac{K_0}{K}, \quad \frac{Q_1}{P_0} = \frac{K_1}{K}, \quad \frac{Q_2}{P_0} = \frac{K_2}{K},$$

sodass die reciproken Werthe der Producte $\varrho_1 R_1$ und $\varrho_2 R_2$ eine ähnliche geometrische Bedeutung besitzen, wie $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$.

2) Bezeichnet man das Krümmungsmass der Fläche $(x, y, z)$ mit $\varkappa$, ferner die auf die Fläche $(x', y', z')$ bezogenen Grössen $\varrho_1, \varrho_2, R_1, R_2, \varkappa$ mit $\varrho_1', \varrho_2', R_1', R_2', \varkappa'$, so wird, wenn $x', y', z'$ die Coordinaten einer zur Fläche $(x, y, z)$ parallelen Fläche sind:

$$\frac{1}{\varrho_1' R_1'} = \frac{1}{\varrho_1 R_1}\frac{\varkappa'}{\varkappa}, \qquad \frac{1}{\varrho_2' R_2'} = \frac{1}{\varrho_2 R_2}\frac{\varkappa'}{\varkappa},$$

wenn aber $x' = mx$, $y' = my$, $z' = mz$, — wo $m$ eine Constante bedeutet —, so entsteht bei positivem $m$:

$$R_1' = \frac{R_1}{m}, \qquad R_2' = \frac{R_2}{m},$$

bei negativem:

$$R_1' = -\frac{R_2}{m}, \qquad R_2' = -\frac{R_1}{m}.$$

3) Nennen wir die geodätische Krümmung $K_g$, so ist bekanntlich:

$$K_g = \frac{\Sigma X(dy\,d^2z - dz\,d^2y)}{ds^3}.$$

Da nun:

$$d^2x = -A_1(d\varrho_1 H_1 + \varrho_2 H_2 T) - A_2(d\varrho_2 H_2 - \varrho_1 H_1 T) + X(\varrho_1 H_1^2 + \varrho_2 H_2^2),$$

wo

$$T = \frac{\varrho_1 H_1}{R_2} - \frac{\varrho_1 H_2}{R_1}$$

gesetzt ist, so wird:

$$(1) \qquad K_g = \frac{\varrho_2 H_2 d\varrho_1 H_1 - \varrho_1 H_1 d\varrho_2 H_2 + (\varrho_1^2 H_1^2 + \varrho_2^2 H_2^2) T}{(\sqrt{\varrho_1^2 H_1^2 + \varrho_2^2 H_2^2})^3}.$$

Dieser Ausdruck liefert sofort einen Satz über die geodätische Krümmung der isogonalen Trajectorien der Krümmungslinien. Längs einer solchen Trajectorie bilden die Tangenten constante Winkel mit den Tangenten der Krümmungslinien, so dass, wenn:

$$\sum A_1 \frac{dx}{ds} = c_1, \qquad \sum A_2 \frac{dx}{ds} = c_2$$

gesetzt wird, sich die Gleichungen:

$$\frac{-\varrho_1 H_1}{\sqrt{\varrho_1^2 H_1^2 + \varrho_2^2 H_2^2}} = c_1, \qquad \frac{-\varrho_2 H_2}{\sqrt{\varrho_1^2 H_1^2 + \varrho_2^2 H_2^2}} = c_2$$

ergeben. Daher wird:

$$\varrho_2 H_2 d\varrho_1 H_1 - \varrho_1 H_1 d\varrho_2 H_2 = 0$$

die Differentialgleichung jener Trajectorien, und wenn wir die geodätische Krümmung im betrachteten Fall mit $K_g'$ bezeichnen, folgt:

$$(2) \qquad K_g' = \frac{c_2}{R_1} - \frac{c_1}{R_2}.$$

Letztere Gleichung zeigt, dass $R_1$ und $R_2$ die geodätischen Krümmungs-

radien der zu $\varrho_2$ resp. $\varrho_1$ gehörenden Krümmungslinien sind, ein Resultat, welches Herr Gremigni (Sulla Theoria delle linee di curvatura, Pisa 1878) auf geometrischem Wege gefunden hat.

Denken wir uns einen Punkt $(x, y, z)$ der betrachteten Trajectorie, die wir der Kürze halber $\mathfrak{C}_1$ nennen wollen. Dann lassen sich der Curve $\mathfrak{C}_1$ zwei durch den Punkt $(x, y, z)$ gehende Curven $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$ folgendermassen zuordnen. Die Tangente $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{C}_1$ besitzt im betrachteten Punkt eine conjugirte Tangente $\mathfrak{T}_2$, welche mit den Tangenten der zu $\varrho_1$ resp. $\varrho_2$ gehörenden Krümmungslinien die Winkel $\psi_1$ und $\psi_2$ bilden möge, sodass:

$$\cos\psi_1 = \frac{c_2\varrho_1}{\sqrt{c_2^2\varrho_1^2 + c_1^2\varrho_2^2}}, \quad \cos\psi_2 = \frac{-c_1\varrho_2}{\sqrt{c_2^2\varrho_1^2 + c_1^2\varrho_2^2}}.$$

$\mathfrak{T}_2$ ist nun Tangente einer isogonalen Trajectorie, welche $\mathfrak{C}_2$ heissen möge. Ihre geodätische Krümmung im Punkt $(x, y, z)$ sei $K_g''$. Es entsteht dann:

$$K_g'' = \frac{-1}{\sqrt{c_2^2\varrho_1^2 + c_1^2\varrho_2^2}} \cdot \left(\frac{c_1\varrho_2}{R_1} + \frac{c_2\varrho_1}{R_2}\right). \tag{3}$$

Ist $\tau$ der Winkel zwischen den Tangenten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, so hat man:

$$\sin\tau = -\frac{c_1^2\varrho_2 + c_2^2\varrho_1}{\sqrt{c_1^2\varrho_2^2 + c_2^2\varrho_1^2}},$$

also wird:

$$K_g'' = \frac{\sin\tau}{c_1^2\varrho_2 + c_2^2\varrho_1}\left(\frac{c_1\varrho_2}{R_1} + \frac{c_2\varrho_1}{R_2}\right). \tag{4}$$

Die Tangente $\mathfrak{T}_2$ bestimmt weiter eine Curve $\mathfrak{C}_3$, deren conjugirte Tangenten mit den Tangenten der Krümmungslinien dieselben constanten Winkel bilden, wie die Tangenten von $\mathfrak{C}_1$. Man hat daher jetzt:

$$\frac{H_2}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}} = c_1, \quad \frac{-H_1}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}} = c_2,$$

und allgemein wird die Differentialgleichung einer Curve mit der betrachteten Eigenschaft:

$$H_1 dH_2 - H_2 dH_1 = 0.$$

Bezeichnen wir hier die geodätische Krümmung mit $K_g'''$, so wird:

$$K_g''' = \frac{c_1c_2(\varrho_1 d\varrho_2 - \varrho_2 d\varrho_1) - (\varrho_1^2c_2^2 + \varrho_2^2c_1^2)\left(\frac{\varrho_1c_2}{R_2} + \frac{\varrho_2c_1}{R_1}\right)\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}{(\sqrt{\varrho_1^2c_2^2 + c_1^2\varrho_2^2})^3\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}. \tag{5}$$

Die Curven $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$ fallen im Allgemeinen nur auf den Flächen zusammen, welche die Eigenschaft $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \text{Const.}$ besitzen. Dann ist also jede Curve, deren conjugirte Tangenten einem in Bezug auf die

Fläche covarianten Tangentensystem angehören, eine isogonale Trajectorie der Krümmungslinien.

Wir werden im folgenden Paragraphen sehen, dass der reciproke Werth des Factors von $\sin\tau$ auf der rechten Seite der Gleichung (4) gerade die Abscisse des Schnittpunktes von $\mathfrak{T}_1$ mit der benachbarten conjugirten Tangente von $\mathfrak{S}_3$ ist.

Als Gleichung der geodätischen Linien erhalten wir die folgende:

$$(6)\quad \varrho_2 H_2 d\varrho_1 H_1 - \varrho_1 H_1 d\varrho_2 H_2 + (\varrho_1^2 H_1^2 + \varrho_2^2 H_2^2)\left(\frac{\varrho_1 H_1}{R_2} - \frac{\varrho_2 H_2}{R_1}\right) = 0.$$

Dieselbe lehrt, dass, wenn eine isogonale Trajectorie der Krümmungslinien zugleich eine geodätische Linie ist, längs ihr die Grössen $R_1$ und $R_2$ in constantem Verhältniss stehen. Ist eine zu $\varrho_1$ resp. $\varrho_2$ gehörende Krümmungslinie auch geodätische Linie, so wird längs derselben $R_2$ resp. $R_1$ unendlich. Sind sämmtliche zu $\varrho_1$ bez. $\varrho_2$ gehörende Krümmungslinien gleichzeitig geodätische Linien, so folgt der Satz des Herrn Hoppe (Archiv, Theil 63, S. 205), dass dann die zu $\varrho_2$ resp. $\varrho_1$ gehörende Krümmungsmittelpunktsfläche abwickelbar ist.

Die Gleichung (6) lässt eine, soviel ich weiss, neue geometrische Eigenschaft der kürzesten Linien erkennen.

Unter der Abscisse eines Punktes in Bezug auf eine Ebene wollen wir die Zahl verstehen, deren absoluter Werth mit der Längeneinheit multiplicirt den senkrechten Abstand des Punktes von der Ebene darstellt, deren Vorzeichen + oder − ist, je nachdem der Punkt auf der positiven oder negativen Seite der Ebene liegt. Dabei sollen alle Raumpunkte als auf der positiven oder negativen Seite einer Ebene liegend betrachtet werden, die den positiven resp. negativen Theilen der Normalen der Ebene angehören, falls die letzteren als durch die Ebene getheilt gedacht sind.

Dann bedeutet $a_1 = -\varrho_2 H_2$ die Abscisse des Punktes $(x + dx, y + dy, z + dz)$ in Bezug auf die Ebene des zu $\varrho_1$, hingegen $a_2 = -\varrho_1 H_1$ die Abscisse desselben Punktes in Bezug auf die Ebene des zu $\varrho_2$ gehörenden Hauptschnitts. Hiernach nimmt die Gleichung (6) die Form an:

$$a_2 da_1 - a_1 da_2 = \frac{ds^2}{R_1 R_2}(a_1 R_2 - a_2 R_1),$$

worin sich eine einfache metrische Eigenschaft der geodätischen Linien ausspricht.

4) Ist $\varrho'$ der Krümmungsradius einer Curve $H_2 = 0$ und sind $r_1$ und $r_2$ die Wurzeln der Gleichung (6) § 1, so hat man:

$$\varrho' = \frac{\varrho_1 R_1}{r_1 - r_2}.$$

## § 3.

### Die allgemeinen in Bezug auf eine Fläche covarianten Strahlensysteme.

Für die Richtungscosinus der Strahlen dieser Systeme erhält man gemäss ihrer Definition die Ausdrücke:

$$\xi = c_0 X + c_1 A_1 + c_2 A_2,$$
$$\eta = c_0 Y + c_1 B_1 + c_2 B_2,$$
$$\zeta = c_0 Z + c_1 C_1 + c_2 C_2.$$

Hier sind die Grössen $c_0, c_1, c_2$ constant und genügen der Beziehung:

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1.$$

Nimmt man:

$$\sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)^2 = \mathsf{H}, \quad \sum \frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q} = \Phi, \quad \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)^2 = \Psi,$$

so wird

$$\mathsf{H}\Psi - \Phi^2 = (c_0 Q_0 + c_1 Q_1 + c_2 Q_2)^2,$$

wo

$$c_0 Q_0 + c_1 Q_1 + c_2 Q_2 = \Delta_0$$

gesetzt werden möge.

Der Ausdruck $\Delta_0$ kann im Allgemeinen nur längs einer bestimmten Curve verschwinden, die ausser von der Beschaffenheit der Fläche $(xyz)$ noch von der Wahl der Grössen $c$ abhängt.

Für die Grössen $e$, $f$, $f'$ und $g$ erhalten wir die Gleichungen:

$$e = c_1 e_1 + c_2 e_2 - c_0 \Theta, \quad f = c_1 f_1 + c_2 f_2 - c_0 \Theta',$$
$$f' = c_1 f_1' + c_2 f_2' - c_0' \Theta', \quad g = c_1 g_1 + c_2 g_2 - c_0 \Theta''.$$

Der Ausdruck $f - f'$ nimmt somit die Gestalt an:

$$-c_1 \varrho_2 Q_2 + c_2 \varrho_1 Q_1,$$

sodass ausser bei $c_0 = 1$ nur dann in Bezug auf die Fläche $(x, y, z)$ covariante Strahlensysteme existiren können, welche aus den Normalen einer Fläche bestehen, wenn die Grössen $R_1$ und $R_2$ ein constantes Verhältniss besitzen.

Unter der Voraussetzung, dass $\Delta_0$ von Null verschieden ist, erhält man nun für die Abscissen der Grenzpunkte der kürzesten Abstände eines Strahls von seinen Nachbarstrahlen die Gleichung:

$$(1)\quad \begin{cases} 4\left\{\frac{c_0}{\varrho_1\varrho_2} + \frac{c_1}{\varrho_1 R_1} + \frac{c_2}{\varrho_2 R_2}\right\}^2 r^2 \\ -4r\left\{\frac{c_0}{\varrho_1\varrho_2} + \frac{c_1}{\varrho_1 R_1} + \frac{c_2}{\varrho_2 R_2}\right\}\left\{c_0^2 \frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_1\varrho_2} + \frac{c_0 c_1}{R_1} + \frac{c_0 c_2}{R_2} + \frac{c_1^2}{\varrho_1} + \frac{c_2^2}{\varrho_2}\right\} \\ +4\left\{\frac{c_0}{\varrho_1\varrho_2} + \frac{c_1}{\varrho_1 R_1} + \frac{c_2}{\varrho_2 R_2}\right\} c_0 - \left(\frac{c_1}{R_2} - \frac{c_2}{R_1}\right)^2 = 0, \end{cases}$$

die Abscissen der Brennpunkte aber werden die Wurzeln der Gleichung:

$$(2)\qquad \left\{\frac{c_0}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{c_1}{\varrho_1 R_1}+\frac{c_2}{\varrho_2 R_2}\right\}R^2 - R\left\{c_0^2\,\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{c_0c_1}{R_1}+\frac{c_1c_2}{R_2}+\frac{c_1^2}{\varrho_1}+\frac{c_2^2}{\varrho_2}\right\}+c_0=0.$$

Dieselbe gestattet folgende Bemerkung. Hat man $c_0=0$, so wird: $R=\frac{c_1^2\varrho_2+c_2^2\varrho_1}{c_1\varrho_2R_2+c_2\varrho_1R_1}R_1R_2$, d. h. $R$ ist der Ausdruck für die Polstrecke einer Curve, deren conjugirte Tangenten dem betrachteten Strahlensystem angehören. Gleichzeitig erhellt die Richtigkeit der Behauptung in Betreff der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen. Ist $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ constant und negativ, so wird nach U. S. 32 der Ausdruck $\frac{c_1^2}{\varrho_1}+\frac{c_2^2}{\varrho_2}$ gleich Null, wenn das Strahlensystem aus den Tangenten einer der beiden Schaaren der Asymptotenlinien besteht. Alsdann fallen beide Brennflächen mit der Fläche $(xyz)$ zusammen, welche gleichzeitig die Mittelpunktsfläche des Strahlensystems wird. Die Gleichung (1) hat in diesem Falle die Wurzeln $r=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}$.

Jede durch den Punkt $(x, y, z)$ gehende Gerade bestimmt nun ein in Bezug auf die Fläche $(x, y, z)$ covariantes Strahlensystem. Durch letzteres werden auf der Geraden vier Punkte festgelegt, die beiden Grenzpunkte der kürzesten Abstände der Geraden von den Nachbargeraden und die beiden Brennpunkte. Fasst man daher die Gesammtheit aller durch den Punkt $(x, y, z)$ gehender Geraden in's Auge, so bilden die genannten Grenzpunkte einerseits, die Brennpunkte andererseits je eine Fläche. Die erstere ist von der vierten Ordnung und hat die Gleichung:

$$(3)\quad \begin{cases} 4\left\{\frac{\mathfrak{z}}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{\mathfrak{x}}{\varrho_1R_1}+\frac{\mathfrak{y}}{\varrho_2R_2}\right\}^2\left\{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2\right\} \\ -4\left\{\frac{\mathfrak{z}}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{\mathfrak{x}}{\varrho_1R_1}+\frac{\mathfrak{y}}{\varrho_2R_2}\right\}\left\{\mathfrak{z}^2\,\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}{R_1}+\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}{R_2}+\frac{\mathfrak{x}^2}{\varrho_1}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\varrho_2}\right\} \\ +4\left\{\frac{\mathfrak{z}}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{\mathfrak{x}}{\varrho_1R_1}+\frac{\mathfrak{y}}{\varrho_2R_2}\right\}\mathfrak{z}-\left(\frac{\mathfrak{x}}{R_2}-\frac{\mathfrak{y}}{R_1}\right)^2=0, \end{cases}$$

die Fläche der Brennpunkte ist von der dritten Ordnung und hat folgende Gleichung:

$$(4)\qquad \left\{\frac{\mathfrak{z}}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{\mathfrak{x}}{\varrho_1R_1}+\frac{\mathfrak{y}}{\varrho_2R_2}\right\}\left\{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2\right\} - \left\{\mathfrak{z}^2\,\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}{R_1}+\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}{R_2}+\frac{\mathfrak{x}^2}{\varrho_1}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\varrho_2}\right\}+\mathfrak{z}=0.$$

Hier ist die Gerade $(A_1, B_1, C_1)$ zur Axe der $\mathfrak{x}$-, die Gerade $(A_2, B_2, C_2)$ zur Axe der $\mathfrak{y}$-, die Gerade $(X, Y, Z)$ zur Axe der $\mathfrak{z}$-Coordinaten, der Punkt $(x, y, z)$ zum Coordinatenanfangspunkt genommen.

Denkt man sich bei dem gewählten Coordinatensystem die Gleichung der Fläche in der Form:

$$\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

so ergiebt sich für den Anfangspunkt der Coordinaten:

$$\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^2 \partial \mathfrak{y}} = \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

$$\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x} \partial \mathfrak{y}^2} = -\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Bonn, im Juli 1887.

# Zur algebraischen Erzeugung sämmtlicher, auch der zerfallenden ebenen rationalen Curven vierter Ordnung.

Von

FRANZ MEYER in Tübingen.

Im Folgenden wende ich die nämlichen Principien an, deren ich mich in meiner früheren Arbeit (diese Annalen, Band 29) zur Erzeugung*) der rationalen Raumcurven vierter Ordnung „$R_4$" bedient habe, — und die inzwischen (diese Annalen, Band 30) im Connex mit allgemeineren Reducibilitätsfragen eingehender von mir studirt worden sind, — um die entsprechenden ebenen Curven „$R_4$" *ohne Ausnahme* zu erhalten. Dies stösst auf gewisse Schwierigkeiten, die hauptsächlich daher rühren, dass gewisse Ausnahmefälle eine besondere und zugleich tiefer eindringende Untersuchung erheischen (während solche bei den räumlichen Curven ausgeschlossen werden konnten).

Die Arbeit zerlegt sich demgemäss in zwei Abschnitte, von denen der erste den *„allgemeinen"*, der zweite den *„singulären"* $R_4$ gewidmet ist.

Im ersten handelt es sich überwiegend um die Aufstellung der *„erzeugenden Zerlegungen zweiten Grades"* (d. i. geometrisch, der die $R_4$ erzeugenden Classenkegelschnitte), deren linke, wie rechte Seite in verschiedene Formen gebracht werden (§§ 1—4). Für die combinantentheoretische Entwicklung erscheint dabei massgebend, dass „das *Schnittpunkttheorem*" der $R_4$ d. h. die Bedingung, unter welcher drei Punkte der Curve in gerader Linie liegen, zweier, formal durchaus verschiedener, Gestaltungen fähig ist (§ 1). Das bezügliche Verfahren

*) Vergl. die Arbeit von Herrn Brill „Ueber rationale Curven vierter Ordnung", diese Annalen, Band 12. Das dort eingeschlagene Verfahren, die $R_4$ durch quadratische Transformation aus einem Kegelschnitte zu erzeugen, ist viel mühsamer (wegen der mancherlei Grenzbetrachtungen), als das im Texte gewählte: zudem war die Ausschliessung der „singulären" $R_4$ erforderlich.

deckt sich mit der Lösung der auch sonst häufig auftauchenden Frage nach den geradlinigen Erzeugenden einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung.

In § 5 wird der Begriff einer „allgemeinen" $R_4$ dahin abgegrenzt, dass sie aufhört, es zu sein, und damit in eine „singuläre" übergeht, sobald die Invariante „$\Delta$" verschwindet (i. e. das Criterium für die Existenz eines dreifachen Punktes der Curve).

Den Schluss des Abschnitts (§ 6) bildet die Aufstellung der erzeugenden Zerlegungen dritten Grades in einer Form, die allen Ausartungen der (sc. nicht zerfallenden) $R_4$ trotzt.

Der zweite Abschnitt wird eröffnet mit einer Discussion der mannigfaltigen Bedeutungen, welche der Grenzbedingung $\Delta = 0$ innewohnen. (§ 7). Dies giebt Gelegenheit, gewisse Zweifel zu zerstreuen, ob nicht überhaupt die Entwicklungen des ersten Abschnitts beim Eintreten des Grenzfalles $\Delta = 0$ völlig zu verwerfen sind. Sobald man aber erkennt, dass dort eine gewisse Function „$\nu$" gleichzeitig zwei verschiedene Rollen spielt, deren eine hier fallen zu lassen ist, gelingt die Rettung vom nahezu ganzen Inhalt des Vorangegangenen. Die Schaar der früher erzeugenden Kegelschnitte conçentrirt sich jetzt auf den einen dreifachen Punkt (der dann in Verbindung mit einer der oben erwähnten Curven dritter Classe die $R_4$ hervorbringt) in der Art, dass auf beiden Seiten der bezüglichen Zerlegung ein in zwei Parametern bilinearer Factor heraustritt.

Dieser Factor wird in § 8 durch Rechnung ermittelt, und es bleibt dieselbe, wie § 9 erkennen lässt, gerade so lange in Kraft, als die singuläre $R_4$ noch eine „*eigentliche*" ist d. h. nicht zerfällt. Damit ist denn zugleich der Begriff der singulären $R_4$ seiner vollen Ausdehnung nach präcisirt.

Der Schluss des zweiten Abschnittes (§ 10) lehrt, wie auf Grund einer, selbst wieder *allgemeinen* (nicht bloss canonischen) Repräsentation der singulären $R_4$ eine selbstständige und elegante Behandlung der letzteren ermöglicht wird, die mit der des ersten Abschnittes in den wesentlichen Zügen ganz gleichartig ist.

In einem selbständigen Anhange (§ 11) werden die verschiedenerlei Entartungen der $R_4$ in „uneigentliche" i. e. zerfallende Curven in systematischem Aufbau geordnet und durch scharfe Criterien von einander abgegrenzt.

Die hierbei leitenden Gesichtspunkte dürften für die rationalen Curven überhaupt als typisch gelten.

Um den Leser nicht durch häufige Verweise auf frühere Arbeiten abzulenken, habe ich mich bemüht, die Redaction von jenen möglichst unabhängig zu gestalten. Nur bei Beginn und am Schluss von zusammenhängenden Entwickelungen sind solche citirt worden, und zwar meine

Tübinger Schrift von 1883 unter „Apolarität", sowie die im 29ten und 30ten Annalenbande erschienenen Arbeiten unter „Algebraische Processe"*) und „Reducibilität"**).

---

## Erster Abschnitt.

### Die Erzeugung der „allgemeinen" $R_4$.

### § 1.

### Die zur $R_4$ perspectivischen Classencurven $P_{\nu'}$.***)

Es sei eine „*eigentliche*" (ebene) $R_4$ definirt durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \varrho x_i = f_i(\overset{4}{\lambda}) = a_{i0} + a_{i1}\lambda + \cdots + a_{i4}\lambda^4 \quad (i=1,2,3).$$

Hier bedeuten die $\varrho x_i$ homogene Punktcoordinaten, die $f_i(\lambda)$ ganze Functionen vierten Grades in $\lambda$, welche der dreifachen Beschränkung†) unterliegen, weder linear abhängig zu sein, noch einen gemeinschaftlichen Theiler in $\lambda$ zu besitzen, noch endlich in die Form $f_i(\overset{2}{\lambda'})$ gebracht werden zu können, wo $\lambda'$ selbst wieder eine rationale Function zweiten Grades von $\lambda$ wäre.

Soll dann die $R_4$ (eventuell noch zusammen mit einer Anzahl von Geraden††) *erzeugt* gedacht werden als Ort der Punkte, in denen sich die Tangenten zweier, projectivisch auf einander bezogenen, rationalen Classencurven $P_{\nu_1'}$, $P_{\nu_2'}$ (von den resp. Classen $\nu_1'$, $\nu_2'$, wo $\nu_1' + \nu_2' \geqq 4$) treffen, so führt dies, wie in § 1 der „Algebr. Processe" gezeigt, unmittelbar zu der umfassenderen Aufgabe, bei gegebenem Grade $\nu'$ sämmtliche Systeme dreier ganzer Functionen $\varphi_i(\overset{\nu'}{\mu})$ eines Parameters $\mu$ zu ermitteln, welche einer (für alle Werthe von $\lambda$, $\mu$ gültigen) Identität von der Form genügen:

$$(2) \qquad f_1(\overset{4}{\lambda})\,\varphi_1(\overset{\nu'}{\mu}) + f_2(\overset{4}{\lambda})\,\varphi_2(\overset{\nu'}{\mu}) + f_3(\overset{4}{\lambda})\,\varphi_3(\overset{\nu'}{\mu}) \equiv (\lambda-\mu)\,\Phi(\overset{3}{\lambda}, \overset{\nu'-1}{\mu}),$$

wo $\Phi$ als eine weitere unbekannte ganze Function von $\lambda, \mu$ (zu den bezeichneten Geraden) anzusehen ist. Ist dies geschehen, so liefert (für $\sigma u_i$ als homogene Liniencoordinaten) die Formel

$$(3) \qquad \sigma u_i = \varphi_i(\overset{\nu'}{\mu})$$

---

*) Die daselbst (pag. 447) angekündigte Arbeit von Herrn W. Stahl ist inzwischen erschienen („Journal für Mathematik", Band 101).

**) Daselbst sind bereits die wichtigsten Formeln der vorliegenden Abhandlung mitgetheilt, zum Theil ohne Beweis.

***) Die Accentuirung des Index $\nu$ dient zur Unterscheidung von dem später (Formel (16)) in ganz anderer Bedeutung gebrauchten $\nu$.

†) Ueber die Begründung derselben siehe § 11.

††) cf. die Anmerkung in „Algebr. Processe", pag. 449.

sämmtliche, die $R_4$ *„erzeugenden"* d. i. zur $R_4$ *„perspectivischen"* Curven der Classe $\nu'$. In demselben Sinne heissen die $\varphi_i(\overset{\nu'}{\mu})$ die *„erzeugenden"**) Functionen ($\nu'^{\text{ten}}$ Grades) der $f_i(\lambda)$.

Dabei ist an die Durchführung der hiermit gekennzeichneten Aufgabe, wenn anders die Lösung auch formal eine vollständige sein soll, die Anforderung zu stellen, die linke Seite von (2) als directe *„ternäre"***) Combinantenbildung aus den $f_i(\lambda)$ entspringen zu lassen.

Diese Aufgabe ist (cf. l. c.) auf die wesentlich einfachere zurückführbar, ausschliesslich die Fälle $\nu' < 4$ zu untersuchen. Und zwar ist der *„allgemeine"* Fall durch $\nu_1' = \nu_2' = 2$, sämmtliche Ausartungen dagegen, wie sich des Näheren ergeben wird, durch das Paar $\nu_1' = 1$, $\nu_2' = 3$ charakterisirt.

Denn ist man erst einmal im Besitze der diesbezüglichen Functionen $\varphi_i(\overset{\nu'}{\mu})$, so kann man, wie l. c. erhärtet, sofort die gesammte Schaar der $\varphi_i(\overset{\nu'}{\mu})$ für $\nu' \geqq 4$ hinschreiben.

Endlich lehrt eine geringe Modification der Schlussbetrachtung von § 1 der citirten Arbeit, dass die Mannigfaltigkeit der erzeugenden Functionensysteme $\varphi_i(\overset{\nu'}{\mu})$, — und damit der erzeugenden $\mathsf{P}_{\nu'}$ — für $\nu' \geqq 3$, *selbst bei beliebigen Besonderheiten der* (eigentlichen) $f_i(\lambda)$ (1), stets durch die Anzahl

$$M_{\nu'} = 2\nu' - 1 \tag{4}$$

angegeben wird. Bei „allgemeinen" $f_i(\lambda)$ gilt dies auch für den niedrigsten Grad $\nu' = 2$: sobald aber $M_2 = 0$ wird, d. h. eine eigentliche $\mathsf{P}_2$ nicht mehr existirt (und damit die oben angedeuteten Ausnahmefälle eintreten) kommt $M_1 = 0$. Es giebt dann immer eine, und nur eine $\mathsf{P}_1$, die im Verein mit irgend einer (eigentlichen) $\mathsf{P}_3$ die $R_4$ erzeugt.

Die Mannigfaltigkeitsparameter treten linear (und isolirt) in die $\varphi_i(\overset{\nu'}{\mu})$ ein, oder genauer, die $\varphi_i(\overset{\nu'}{\mu})$ setzen sich mittelst willkürlicher Constanten linear und homogen aus $M_{\nu'} + 1$ ebensolchen ganzen Functionen zusammen, welche, hinsichtlich der Coefficienten der $f_i(\lambda)$, als *„rational bekannte"* Grössen figuriren. (Man vergleiche hierzu die allgemeinen Entwicklungen in § 5 der „Reducibilität".)

---

*) cf. „Reducibilität" § III, pag. 38.

**) cf. „Algebr. Processe" pag. 455.

## § 2.

### Das Schnittpunkttheorem der $R_4$ in erster und zweiter Form.

Es soll das „*Schnittpunkttheorem*" der $R_4$ d. i. die (nothwendige und hinreichende) Bedingung, unter welcher drei Punkte der $R_4$ in gerader Linie liegen, in zwei verschiedenen Formen aufgestellt werden. *Auf eine geeignete Combinirung beider* stützt sich vorzugsweise die Entwicklung der §§ 3 u. f.

Den Ausgang bildet wieder die zu den $f_i(\lambda)(1)$ gehörige „Gordan'sche*) Grundform" d. i. — für irgend drei Argumente $\lambda$, $\lambda_1$, $\mu$ — die dreireihige Determinante:

$$F(\lambda, \lambda_1, \mu) = |f_i(\lambda),\ f_i(\lambda_1),\ f_i(\mu)| \quad (i=1, 2, 3). \tag{5}$$

Seien $\lambda$, $\lambda_1$, $\mu$ die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$\lambda^3\sigma_0 - \lambda^3\sigma_1 + \lambda^2\sigma_2 - \sigma_3 = 0, \tag{6}$$

so bietet sich die „*erste Form des Schnittpunkttheorems*" der $R_4$ ohne Weiteres dar, nämlich:

$$\text{I} \qquad \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\mu)(\lambda_1-\mu)} F(\lambda, \lambda_1, \mu) = \sum_{i=0}^{i=3}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=3} Q_{i\varkappa}\sigma_i\sigma_\varkappa \equiv Q_{\sigma^2} = 0,$$

wo sich die $Q_{ik}$ in einfacher Weise aus den dreireihigen Determinanten der $a$ in (1):

$$\Delta_{lm\varkappa} = \begin{vmatrix} a_{l1} & a_{m1} & a_{\varkappa 1} \\ a_{l2} & a_{m2} & a_{\varkappa 2} \\ a_{l3} & a_{m3} & a_{\varkappa 3} \end{vmatrix} \tag{7}$$

linear und homogen zusammensetzen.

Es kommt nun darauf an, die rechte Seite $Q_{\sigma^2}$ von I als zweireihige Determinante d. h. in der Gestalt:

$$Q_{\sigma^2} = \begin{vmatrix} \mathsf{A}_0 & \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{B}_0 & \mathsf{B}_1 \end{vmatrix} \tag{8}$$

darzustellen, wo die $\mathsf{A}_0$, $\mathsf{A}_1$, $\mathsf{B}_0$, $\mathsf{B}_1$ in den $\sigma$ linear sind, und damit die Form I des Schnittpunkttheorems zu ersetzen durch Paare von, *in den $\sigma$ linearen Gleichungen:*

$$\begin{cases} \mathsf{A}_0 - \mu'\mathsf{A}_1 = 0, & \mathsf{B}_0 - \mu'\mathsf{A}_1 = 0, \\ \text{resp. } \mathsf{A}_0 - \nu\,\mathsf{B}_0 = 0, & \mathsf{A}_1 - \nu\,\mathsf{B}_1 = 0, \end{cases} \tag{8'}$$

die noch je einen (als lineare, gebrochene Function der $\sigma$ sich ausdrückenden) beweglichen Parameter $\mu'$ resp. $\nu$ mit sich führen.

---

*) cf. „Algebr. Processe" § 2.

Die gemeinte Ueberführung liesse sich leicht direct ausführen, indessen ziehe ich folgende, den §§ 2—5 der „Apolarität" entnommene Ableitung als die durchsichtigere vor.

Es schneide eine Gerade:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{9}$$

ausser einem Restpunkte $\mu$ noch die drei weiteren $\lambda_1$, $\lambda_1'$, $\lambda_1''$ aus. (Die neue Bezeichnung wird sich in § 3 rechtfertigen).

Dann sind diese vier Werthe die Wurzeln der Gleichung:

$$u_1 f_1(\lambda) + u_2 f_2(\lambda) + u_3 f_3(\lambda) = \lambda^4 s_0 - \lambda^3 s_1 + \lambda^2 s_2 - \lambda s_3 + s_4 = 0. \tag{10}$$

Somit sind die $s_i$ proportional linearen und homogenen Functionen der $u$, und die Elimination der letzteren führt zu zwei Relationen von der Gestalt:

$$\begin{cases} \alpha_0 s_0 - \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 - \alpha_3 s_3 + \alpha_4 s_4 \equiv \alpha_s = 0, \\ \beta_0 s_0 - \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 - \beta_3 s_3 + \beta_4 s_4 \equiv \beta_s = 0, \end{cases} \tag{11}$$

wo (die abwechselnden Vorzeichen aus Zweckmässigkeitsgründen eingeführt, und) die $\alpha_i$, $\beta_i$, oder richtiger, beliebige lineare Combinationen derselben, durch die zwei Tripel evidenter Beziehungen:

$$\begin{cases} a_{i0}\alpha_0 + a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + a_{i4}\alpha_4 = 0, \\ a_{i0}\beta_0 + a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + a_{i3}\beta_3 + a_{i4}\beta_4 = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{12}$$

charakterisirt sind. Dabei entstehen die linken Seiten von (11), $\alpha_s$, $\beta_s$ aus den binären Formen:

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda^4} = \alpha_0 - 4\alpha_1\lambda + 6\alpha_2\lambda^2 - 4\alpha_3\lambda^3 + \alpha_4\lambda^4, \\ \beta_{\lambda^4} = \beta_0 - 4\beta_1\lambda + 6\beta_2\lambda^2 - 4\beta_3\lambda^3 + \beta_4\lambda^4 \end{cases} \tag{13}$$

durch successive Polarisation nach $\lambda_1$, $\lambda_1'$, $\lambda_1''$, $\mu$:

$$\alpha_s = \alpha_{\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''\mu}, \quad \beta_s = \beta_{\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''\mu}, \tag{14}$$

und es lassen sich die Formen (13) auch definiren als irgend zwei (lineare unabhängige) „*zu den $f_i(\lambda)$ conjugirte*" d. h. solche, für die:

$$\{f_i(\lambda), \alpha_{\lambda^4}\}^4 = 0, \quad \{f_i(\lambda), \beta_{\lambda^4}\}^4 = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Die Relationen (11) involviren bereits die in Aussicht gestellte Abänderung des Schnittpunkttheorems I: wir haben nur noch die Grösse $\mu$ von den anderen $\lambda_1$, $\lambda_1'$, $\lambda_1''$ zu *isoliren*. Lassen wir die drei letzteren Werthe — die in ihrer Art gerade so beliebig sind, wie die in I auftretenden $\lambda$, $\lambda_1$, $\mu$ —, um neue Bezeichnungen zu vermeiden, gleichfalls die Wurzeln der Gleichung (6) sein, so geht aus (11) sofort „*die zweite Form des Schnittpunkttheorems*" hervor:

$$\alpha_s \equiv \mathsf{A}_0 - \mu\mathsf{A}_1 = 0, \quad \beta_s \equiv \mathsf{B}_0 - \mu\mathsf{B}_1 = 0, \tag{IIa}$$

wo $\mu$ den mit $\lambda_1$, $\lambda_1'$, $\lambda_1''$ auf gerader Linie gelegenen Restpunkt der $R_4$ bezeichnet, und die $\mathsf{A}_0$, $\mathsf{A}_1$, $\mathsf{B}_0$, $\mathsf{B}_1$ die Bedeutung haben:

$$(15') \quad \begin{cases} A_0 = \alpha_0\sigma_0 - \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 - \alpha_3\sigma_3 = \alpha_{\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''\infty}, \\ A_1 = \alpha_1\sigma_0 - \alpha_2\sigma_1 + \alpha_3\sigma_2 - \alpha_4\sigma_3 = -\alpha_{\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''0}, \\ B_0 = \beta_0\sigma_0 - \beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2 - \beta_3\sigma_3 = \beta_{\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''\infty}, \\ B_1 = \beta_1\sigma_0 - \beta_2\sigma_1 + \beta_3\sigma_2 - \beta_4\sigma_3 = -\beta_{\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''0}. \end{cases}$$

(Die rechten Seiten sind Nichts Anderes, als die nach den $\lambda_1$, $\lambda_1'$ $\lambda_1''$ polarisirten ersten Differentialquotienten der Formen (13)). Der Formel IIa geben wir noch für das Folgende drei parallele Einkleidungen. Wir schreiben einmal:

IIb $$A_0 - \nu B_0 = 0, \quad A_1 - \nu B_1 = 0.$$

Hier figurirt $\nu$ als ein neuer, willkürlicher, mit $\mu$ gleichberechtigter Parameter, dessen wahre Bedeutung jedoch erst in § 3 ins Licht treten wird.

Der Inhalt des in IIa, IIb niedergelegten Schnittpunkttheorems zweiter Art ist, dem durch I ausgedrückten erster Art gegenüber, als ein erweiterter anzusehen; während das letztere überhaupt nur (in einer Bedingung) aussagt, wann drei Punkte $\lambda_1$, $\lambda_1'$, $\lambda_1''$ der $R_4$ in gerader Linie liegen, liefert jenes (vermöge zweier Bedingungen) das Criterium dafür, dass das fragliche Ereigniss so eintritt, dass zugleich der Hülfsparameter $\mu$ resp. $\nu$ je einen vorgegeben gedachten Werth annimmt.

Für manche Zwecke erscheint die Contraction von IIa und IIb in die eine Formel zweckmässig:

IIc $$(A_0 - \mu A_1) - \nu(B_0 - \mu B_1) = 0,$$

die dann immer, als in $\nu$ identisch befriedigt aufgefasst werden soll. Diese gestaltet sich noch durchsichtiger bei Ersetzung der einzelnen Formen (13) durch ihre ganze „zu der Schaar der aus den $f_i(\lambda)$, linear componirten Formen conjugirte" Schaar, nämlich:

(16) $$v_{\lambda^4} = \alpha_{\lambda^4} - \nu\beta_{\lambda^4}.$$

Denn damit geht IIc sofort über in:

IId $$v_{\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''\mu} = 0.$$

Denken wir uns andererseits — und es ist wohl darauf zu achten, dass die nunmehr zu explicirende Auffassung von der soeben, im Anschluss an die Formeln IIa, b, c, d vertretenen (wie auch von der durch I dargebotenen) gedanklich scharf zu sondern ist — irgend drei Werthe (Punkte) $\lambda_1$, $\lambda_1'$, $\lambda_1''$ bereits als dem Schnittpunkttheorem I $Q_{\sigma^2} = 0$ unterworfen (d. h. geometrisch einen Punkt ($\sigma$) auf der Fläche*) $Q_{\sigma^2} = 0$), so wird in IIa sowohl, wie in IIb je eine der

*) Die Einführung dieses Bildes (das sich darbietet, sobald man die $\sigma_i$ als homogene Coordinaten eines Raumpunktes ansieht) erweist sich auch für den weiteren Verlauf des Textes als ein zweckmässiges Hülfsmittel. Dies spricht sich deutlich durch den evidenten Satz aus: „Jede Zerlegung von der Form:

bezüglichen Relationen überflüssig, und es erscheinen dann die Hülfsparameter $\mu$, $\nu$ als lineare, gebrochene Functionen der $\sigma_i$:

$$(17) \qquad \mu = \frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1}, \quad \nu = \frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} \quad (Q_{\sigma^2} = 0).$$

Werden jetzt diese Grössen $\mu$, $\nu$ gleichzeitig als Parameter zu Grunde gelegt, so darf von den vier Gleichungen IIa, IIb — unter Voraussetzung von $Q_{\sigma^2} = 0$ — nur eine weggelassen werden, und die drei restirenden dienen umgekehrt zur eindeutigen Bestimmung des einem beliebigen Werthsysteme $\mu$, $\nu$ correspondirenden Systems $(\sigma_i)$. Dies hat den Satz zur Folge:

*„Solange, bei irgendwie vorgegebenen Werthen $\mu$, $\nu$, die eindeutige Bestimmung der $\sigma_i$ aus den Relationen* IIa, IIb — *unter Zuhülfenahme von* I $Q_{\sigma^2} = 0$ — *möglich ist, lässt sich auch den in* IId *auftretenden Grössen $\mu$, $\nu$ die in* (17) *ausgesprochene Bedeutung unterlegen, und umgekehrt."*

Dies ist nun im ersten Abschnitte der Arbeit durchgängig der Fall, und der eben formulirte Satz giebt uns das Recht trotz der verschiedenen Bedeutungen der Grössen $\mu$, $\nu$, es bei einer einzigen Bezeichnung für dieselben bewenden zu lassen.

Versagt dagegen, wie im zweiten Abschnitte, die gemeinte Bestimmung der $\sigma$, und es wird sich diese Anomalie mit der anderen decken, dass die durch (17) definirten Functionen $\mu$, $\nu$ nicht mehr unabhängig von einander sind, so werden die in der (völlig unversehrt bleibenden) Gleichung IId figurirenden, nach wie vor ganz unabhängig von einander existirenden Grössen $\mu$, $\nu$ (oder mindestens eine derselben, $\nu$) ganz andere, wie sie (17) liefert.

---

$$\varphi_1(\mu,\nu)\overset{4}{f_1}(\lambda) + \varphi_2(\mu,\nu)\overset{4}{f_2}(\lambda) + \varphi_3(\mu,\nu)\overset{4}{f_3}(\lambda) \equiv \overset{1}{F_1}(\lambda)\overset{3}{F_2}(\lambda)$$

wo die $\varphi_i(\mu,\nu)$ ganze Functionen ihrer Argumente, und die letzteren durch irgend eine algebraische Relation $\varphi(\mu,\nu) = 0$ verbunden sind (cf. „Reducib" § 5) ist (vermöge Nullsetzens des Factors $F_2$) vollständig und eindeutig repräsentirt durch eine gewisse, auf der Fläche $Q_{\sigma^2} = 0$ gelegene *algebraische* Raumcurve, und umgekehrt führt *jede* solche Raumcurve zu einer Zerfällung der gemeinten Art."

Irgend zwei solche Raumcurven auf der Fläche stehen vermöge der sie treffenden Geraden der einen Schaar ($\mu$ = const.) in einer gewissen *Punktcorrespondenz*, die umgekehrt dazu dienen kann, die Fläche (nebst einer Anzahl irrelevanter Ebenen) zu *erzeugen*: genau so erzeugen die beiden Bildclassencurven in der Ebene der $R_4$ die letztere bis auf eine Anzahl irrelevanter Geraden (cf. „Reducib." Schluss).

Beispielsweise werden die Tangenten der $P_2$ resp. $P_3$ abgebildet durch die Punkte der Geradenschaar $\nu$ = const., resp. der auf der Fläche gelegenen Kegelschnitte u. s. f.

Auch die *Ausartungen* der $R_4$ werden so treffend veranschaulicht: den „singulären" $R_4$ entsprechen Kegel (zweiter Ordnung): einer $R_4 = R_3(R_1)$ (cf. § 11) ein Ebenenpaar mit einem „sommet", einer $R_4 = R_2(R_2')$ ein Ebenenpaar ohne sommet, etc.

Dann ist (cf. § 7) eine neue Untersuchung erforderlich.

Nach dieser, durchaus nicht zu umgehenden Abschweifung, gelingt die in (8) angedeutete Umformung der linken Seite $Q_{\sigma^2}$ von I ohne Weiteres, sobald man $\mu$ resp. $\nu$ aus IIa resp. IIb wieder eliminirt. Mit Hülfe der Ausdrücke $A_0, A_1, B_0, B_1$ in (15) kommt, wenn $\tau$ einen (gleich zu ermittelnden) constanten Factor bezeichnet:

$$\tau Q_{\sigma^2} = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

In der That sind, wie bekannt*), auf Grund der Verknüpfungen (12) die $\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_\varkappa \\ \beta_i & \beta_\varkappa \end{vmatrix}$ den $\Delta_{lmn}$ in (7) proportional, wenn unter $i, \varkappa$; $l, m, n$ zusammen die fünf Zahlen $0, 1, \ldots, 4$ (und zwar je in natürlicher Reihenfolge genommen) verstanden werden.

Der bezügliche Proportionalitätsfactor (und mit ihm der Factor $\tau$ in (18)) hängt noch ganz davon ab, wie wir die Formen $\alpha_{\lambda^4}$, $\beta_{\lambda^4}$ (13) aus der Schaar (16) herauswählen. Da wir aber weiterhin (behufs verschiedener Controllen über die Grade, bis zu welchen die $\Delta_{lmn}$ in den späteren Bildungen auftreten) einer absoluten Fixirung jenes Factors bedürfen, so greifen wir etwa innerhalb der Schaar (16) zwei *solche* Formen — sie seien wiederum mit $\alpha_{\lambda^4}$, $\beta_{\lambda^4}$ bezeichnet — heraus, dass, wenn noch zur Abkürzung gesetzt wird:

$$p_{ik} = \Delta_{lmn} \tag{7'}$$

(wo die Indices die soeben angegebene Regel befolgen) man hat:

$$\begin{cases} \alpha_0 = p_{r0}, & \alpha_1 = p_{r1}, & \alpha_2 = p_{r2}, & \alpha_3 = p_{r3}, & \alpha_4 = p_{r4}, \\ \beta_0 = p_{s0}, & \beta_1 = p_{s1}, & \beta_2 = p_{s2}, & \beta_3 = p_{s3}, & \beta_4 = p_{s4} \end{cases} \tag{19}$$

wenn $r, s$ zwei beliebige der Zahlen 0 bis 4 bedeuten, und $p_{rr} = p_{ss} = 0$ ist. Dann ergiebt eine einfache Rechnung, dass

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_\varkappa \\ \beta_i & \beta_\varkappa \end{vmatrix} = p_{rs} \cdot p_{i\varkappa} \tag{20}$$

und demnach der Factor $\tau$ in (18) gleich $p_{rs}$ wird:

$$\tau = p_{rs}. \tag{21}$$

*) cf. „Apolarität" § 1. Wie aus dem Beweise dieses Hülfssatzes ersichtlich, verliert der letztere seine Bedeutung, wenn sämmtliche $\Delta_{lmn}$ verschwinden (vgl. §§ 7, 11), wenn also die $f_i(\lambda)$ linear abhängig werden. Dann sind nicht etwa auch die $\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_\varkappa \\ \beta_i & \beta_\varkappa \end{vmatrix}$ gleich Null d. h. die Formen $\alpha_{\lambda^4}$, $\beta_{\lambda^4}$ proportional, sondern gerade umgekehrt bilden in diesem Falle die zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Formen eine zweifache Mannigfaltigkeit. Ueberhaupt liegt auf der Hand, dass bei *gegebenen* $f_i(\lambda)$ die Möglichkeit des Verschwindens sämmtlicher $\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_\varkappa \\ \beta_i & \beta_\varkappa \end{vmatrix}$ völlig ausgeschlossen ist.

## § 3.

## Die erzeugenden Kegelschnitte $P_2$ des allgemeinen Falles.

Wir haben alle Identitäten vom Typus (2) für $\nu' = 2$ aufzusuchen. Diese setzen sich, nach dem Schlusse von § 1, aus zwei solchen:

$$(22) \qquad \sum_{i=1}^{i=3} f_i(\overset{4}{\lambda})\,\overset{(d)}{\varphi_i}(\overset{2}{\mu}) \equiv (\lambda-\mu)\,\Phi^{(d)}(\overset{3}{\lambda},\overset{1}{\mu}) \quad (d=1,2)$$

mittelst eines willkürlichen Parameters linear zusammen.

Da die Gordan'sche Grundform, nach zuvoriger Division mit $\lambda_1 - \mu$:

$$(5') \qquad \frac{1}{\lambda_1-\mu} F(\lambda, \lambda_1, \mu) = \frac{1}{\lambda_1-\mu} |f_i(\lambda), f_i(\lambda_1), f_i(\mu)|$$

selbst die linke Seite einer Identität (2) für $\nu' = 3$ formirt, so haben wir aus ihr, nach dem Muster von § 4 der „Algebr. Processe" durch Anwendung von Division und Ueberschiebung, eine analoge Identität, aber von einem, um Eins herabgedrückten Grade in $\mu$, herzuleiten.

Wir ersetzen die Form (5) durch eine allgemeinere, indem wir an die Stelle der $f_i(\lambda)$ ganz beliebige Grössen $x_i$ treten lassen und bedienen uns der Schreibweise:

$$(23) \qquad \frac{1}{\lambda_1-\mu} F(x_i, \lambda_1, \mu) = Q_{\lambda_1^3}(\overset{1}{x_i},\overset{3}{\mu}) = Q_{\lambda_1^3}(x_i) = Q_{\lambda_1^3}{}^*),$$

die verdeutlichen soll, dass wir im Folgenden mit dieser Form, als einer binären, cubischen in $\lambda_1$, operiren.

Dann liefert die Gleichung $Q_{\lambda_1^3}=0$ durch ihre Wurzeln $-\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''$ — gerade die drei Punkte der $R_4$, welche durch die Verbindungsgerade von $\mu$ mit dem beliebigen Punkte der Ebene $(x_i)$ ausgeschnitten werden. Jene drei Werthe $\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''$ *genügen daher auch der zweiten Form des Schnittpunkttheorems* d. h. das Resultat der Substitution von $\lambda, \lambda_1', \lambda_1''$ in die linke Seite von IId, oder, was dasselbe ist, die dritte Ueberschiebung der beiden Formen $Q_{\lambda_1^3}$ und $\nu_{\lambda_1^3\omega}$, verschwindet für $\omega = \mu$ identisch, ist also durch $\omega - \mu$ theilbar, oder in Zeichen:

$$(24) \qquad (Q_{\lambda_1^3}, \nu_{\lambda_1^3\omega})^3 \equiv (\omega-\mu)\,R(\overset{1}{x_i},\overset{2}{\mu}).$$

Hier ist es erlaubt, die ganz willkürliche Grösse $\omega$ gleich $\lambda_1$ selbst zu nehmen, so wird:

$$(25) \qquad (Q_{\lambda_1^3}, \nu_{\lambda_1^3})^3 \equiv (\lambda_1-\mu)\,R(\overset{1}{x_i},\overset{2}{\mu}).$$

Führt man nunmehr statt der $x_i$ wieder die $f_i(\lambda)$ ein, so wird

---

*) Die Bezeichnung $Q_{\lambda_1^3}$ soll auch dann noch beibehalten werden, wenn, wie in Formel (26), die $x_i$ wieder durch die $f_i(\lambda)$ ersetzt sind.

$R\{f_i(\lambda), \mu\}$ theilbar durch $\lambda - \mu$ (denn $F(\lambda, \lambda_1, \mu)$ besitzt diesen Factor für jeden Werth von $\lambda_1$), und wir sind zu dem Resultate gelangt:

„*Man entwickele die Form* $\frac{1}{\lambda_1 - \mu} F(\lambda, \lambda_1, \mu)$ *nach den* $f_i(\lambda)$ *und erhalte:*

$$(26) \qquad \frac{1}{\lambda_1 - \mu} |f_i(\lambda), f_i(\lambda_1), f_i(\mu)| = Q_{\lambda_1^2} - \sum_{i=1}^{i=3} f_i(\lambda) Q_{i\lambda_1^2},$$

*dann sind die zur* $R_4$ *perspectivischen Classenkegelschnitte* $\mathsf{P}_2$ *dargestellt durch:*

$$(27) \qquad \sigma u_i = \varphi_i(\overset{2}{\mu}) = \frac{1}{\lambda_1 - \mu} (Q_{i\lambda_1^2}, \nu_{\lambda_1^2})^3,$$

*wo*

$$(16) \qquad \nu_{\lambda^2} = \alpha_{\lambda^2} - \nu \beta_{\lambda^2}$$

*die Schaar der zu den* $f_i(\lambda)$ *conjugirten Formen bedeutet.*“

Damit ist die gewünschte Herleitung der für den niedrigsten Grad (sc. zwei) in $\mu$ im Allgemeinen existirenden Zerlegungen (2) — wir nennen sie nach § 3 der „Reducib.“ die „*Fundamentalzerlegungen*“ — geleistet, denn ihre linke Seite drückt sich aus durch:

$$(28) \qquad \sum f_i(\lambda) \varphi_i(\overset{2}{\mu}) = \frac{1}{\lambda_1 - \mu} (Q_{\lambda_1^2}, \nu_{\lambda_1^2})^3 = R\{\overset{1}{f_i}(\lambda); \overset{2}{\mu}, \overset{1}{\nu}\},$$

wo die rechte Seite die Gestalt einer Combinante der $f_i(\lambda)$ besitzt.

Und hieraus fliesst nach § 6 der eben citirten Arbeit sofort die Gesammtheit der „erzeugenden“ Zerlegungen (2) von beliebigem Grade $\nu'$ in $\mu$ — und damit zugleich die Gesammtheit der erzeugenden $\mathsf{P}_{\nu'}$, — sobald man den Parameter $\nu$ ersetzt durch eine willkürliche rationale Function von $\mu$, des Grades $\nu' - 2$:

$$(29) \qquad \nu = \frac{\overset{\nu'-2}{\nu_1(\mu)}}{\overset{\nu'-2}{\nu_2(\mu)}}.$$

Zusatz. Daher lautet der gedrungenste Ausdruck unserer Fundamentalzerlegung:

$$(30) \qquad R\{\overset{1}{f_i}(\lambda); \overset{2}{\mu}, \overset{1}{\nu}\} \equiv (\lambda - \mu) R'(\overset{3}{\lambda}; \overset{1}{\mu}, \overset{1}{\nu}).$$

Auf die Form $R'$ wird § 4 näher eingehen.

## Fortsetzung.

### Explicite Darstellung der Form $R$.

Der geschilderte Ueberschiebungsprocess, dem die durch (26) definirte Function $R = R\{\overset{1}{f_i}(\lambda); \overset{2}{\mu}, \overset{1}{\nu}\}$ ihre Entstehung verdankt, scheint noch nicht durchsichtig genug zu sein, um gewisse, weiter

unten sich aufdrängende Ausnahmefälle der Behandlung in praxi zugänglich zu machen.

Wir entwickeln daher den Ausdruck $R$ so weit, dass man erkennt, wie er abhängt von den dritten Ueberschiebungen der — als binäre cubische Formen in $\mu$ aufzufassenden — Entwickelungscoefficienten $Q_{i\mu^3}$ (26) von $Q_{\lambda_i^3}$ über die ersten Differentialquotienten $\alpha_{1\mu^3}$, $\alpha_{2\mu^3}$, $\beta_{1\mu^3}$, $\beta_{2\mu^3}$ der Formen $\alpha_{\mu^3}$, $\beta_{\mu^3}$ (13).

Wir setzen für den Augenblick zur Abkürzung:

$$(31) \qquad (Q_{i\mu^3},\ \alpha_{d\mu^3})^3 = \alpha_{di},\quad (Q_{i\mu^3},\ \beta_{d\mu^3})^3 = \beta_{di}.\quad (d=1,2).$$

Diese Grössen treten offenbar als Coefficienten auf, wenn man die Form $R\{\overset{1}{f_i}(\lambda);\ \overset{2}{\mu},\ \overset{1}{\nu}\}$ nach Potenzen von $\mu$ und $\nu$ ordnet. Aber sie sind nicht unabhängig von einander, sondern an gewisse (für beliebige Werthe von $\lambda$ gültige) lineare Identitäten gebunden (die später noch mehr von Bedeutung werden). Macht man nämlich linkerhand von (25) $\lambda_1 = \mu$, so resultirt eine in $\mu$ identisch verschwindende biquadratische Form, für ganz willkürliche Werthe von $\nu$ (und ebenso $\lambda$). Dies aber ist äquivalent mit dem gemeinten Systeme von Identitäten:

$$(32) \qquad \begin{cases} \alpha_{10}=0,\ \alpha_{00}=\alpha_{11},\ \alpha_{01}=\alpha_{12},\ \alpha_{02}=\alpha_{13},\ \alpha_{03}=0, \\ \beta_{10}=0,\ \beta_{00}=\beta_{11},\ \beta_{01}=\beta_{12},\ \beta_{02}=\beta_{13},\ \beta_{03}=0. \end{cases}$$

Führen wir hier für die drei mittleren Paare von Grössen die je gemeinsame Bezeichnung ein:

$$(33) \qquad \begin{cases} A_1,\ A_2,\ A_3, \\ B_1,\ B_2,\ B_3 \end{cases}$$

(wo dies sämmtlich in den $f_i(\lambda)$ linearhomogene Functionen sind), so nimmt die Bildung $R\{\overset{1}{f_i}(\lambda);\ \overset{2}{\mu'},\ \overset{1}{\nu}\}$ ohne Weiteres die einfache Gestalt an:

$$(34) \qquad R = (\mu^2 A_1 + \mu A_2 + A_3) - \nu(\mu^2 B_1 + \mu B_2 + B_3).$$

## § 4.

## Die rechte Seite der Fundamentalzerlegung in selbstständiger Darstellung.

Aus dem soeben zu Anfang des letzten Absatzes namhaft gemachten Grunde erwächst auch das Bedürfniss einer, von den Ueberschiebungen des § 2 unabhängigen (und damit von selber explicit sich darlegenden) Ableitung der durch die rechte Seite von (30) i. e. durch $\frac{R}{\lambda-\mu} = R'$ formirten Function.

Zu dem Zwecke greifen wir auf die in IIa und IIb deponirten Variationen des „Schnittpunkttheorems der $R_4$ in der zweiten Form" zurück.

Versteht man unter $\varkappa$ einen Proportionalitätsfactor, so sind die angeführten Gleichungen auch äquivalent mit diesen:

$$\varkappa A_0 = \mu\nu, \quad \varkappa A_1 = \nu, \quad \varkappa B_0 = \mu, \quad \varkappa B_1 = 1. \tag{35}$$

Hier sind die linken Seiten ganz und linearhomogen in den $\sigma$ d. i. den Coefficienten der Gleichung (6):

$$\lambda^3\sigma_0 - \lambda^2\sigma_1 + \lambda\sigma_2 - \sigma_3 = 0. \tag{6}$$

Man eliminire die $\sigma$ aus den Gleichungen (6), (35).

Dann ist die Behauptung, dass das Eliminationsresultat nur um einen constanten Factor (der sich mit der Grösse $\tau$ in (21) als identisch herausstellen wird) unterschieden ist von der Form $R'$ i. e. der rechten Seite von (30).

In der That haben wir nur zu beachten, dass die Ausgangsgleichung (10) für die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden $u_i$ (9) mit der $R_4$ folgender Einkleidungen fähig ist:

$$\begin{aligned} u_f &\equiv u_1 f_1(\lambda) + u_2 f_2(\lambda) + u_3 f_3(\lambda) \\ &\equiv \lambda^4 s_0 - \lambda^3 s_1 + \lambda^2 s_2 - \lambda s_3 + s_4 \\ &\equiv (\lambda - \mu)(\lambda^3\sigma_0 - \lambda^2\sigma_1 + \lambda\sigma_2 - \sigma_3) = 0. \end{aligned} \tag{10'}$$

Hier soll nun die weitere Umformung vorgenommen werden, dass rechterhand an Stelle der abhängigen $\sigma$ eine passende Function „$\nu$" der letzteren als zweiter, von $\mu$ unabhängiger, Parameter eintritt, und auf diese Weise die ursprünglichen Coordinaten einer Geraden, nämlich die Verhältnisse der $u_i$ transformirt werden in zwei neue unabhängige Parameter $\mu$, $\nu$, die zur gegebenen $R_4$ selbst in unmittelbarer Beziehung stehen.

Hierzu wählen wir eben die mit $\mu$ gleichberechtigte Grösse $\nu$ (16). Dann wird man leicht erkennen, dass die Einführung der neuen „*Coordinaten*"*) $\mu$, $\nu$ anstatt der $u_i$ sich genau mit der in § 2 vorgenommenen Entwickelung, die schliesslich zur Fundamentalzerlegung (30) hinführte, deckt. Dies wird so bewiesen.

Es repräsentire $\lambda_1$ irgend eine der drei Wurzeln $\lambda_1$, $\lambda_1'$, $\lambda_1''$ von (6), so ersetzen wir zuvörderst die $u_i$ in (10) durch die Grössen $\lambda_1, \mu$ (weiterhin erst $\lambda_1$ durch $\nu$).

Da $u_f$ i. e. die linke Seite von (10) für $\lambda = \lambda_1$, und $\lambda = \mu$ verschwindet:

$$\sum u_i f_i(\lambda_1) = 0, \quad \sum u_i f_i(\mu) = 0, \tag{36}$$

so verwandelt sich $u_f$, einen von $\lambda$ unabhängigen Factor abgerechnet, in:

*) Man überzeugt sich leicht davon, dass die Correspondenz zwischen Werthsystemen $(\mu, \nu)$, $(u_1, u_2, u_3)$ eine ein-vierdeutige ist. Denn bei gegebener Geraden $(u_i)$ kann man noch jeden ihrer vier Schnittpunkte mit der $R_4$ als Punkt $\mu$ nehmen, wodurch dann $\nu$ immer völlig bestimmt ist.

$$(26)\qquad \frac{1}{\lambda_1-\mu}\,|f_i(\lambda)\,f_i(\lambda_1)\,f_i(\mu)| = Q_{\lambda_1^3} = \sum Q_{i\lambda_1^3} f_i(\lambda)$$
$$= \Omega_0\lambda_1^3 - \Omega_1\lambda_1^2 + \Omega_2\lambda_1 - \Omega_3.$$

Nun stimmen aber die Wurzeln von $Q_{\lambda_1^3}=0$ völlig mit denen der Gleichung (6) überein: soll daher in die linke Seite von (26) die Function $\nu$ statt der $\sigma$ resp. der $Q'$ eingeführt werden, so hat dies dadurch zu geschehen, dass in (16), oder auch in II d, die $\sigma$ durch die $Q'$ in (26) ersetzt werden. Eben dies hat der in (24) resp. (25) ausgeprägte Ueberschiebungsprocess geleistet.

Dieselbe Leistung — die Transformation der $u_i$ in die $\mu$, $\nu$ in der Form $u_f$ resp. der Gleichung $u_f=0$ —, nur auf *directem* Wege haben wir durch die zu Anfang dieses Paragraphen geschilderte Elimination der $\sigma$ aus (35) und (6) vollbracht.

Und da das Eliminationsresultat in den Veränderlichen $\lambda$; $\mu$, $\nu$ resp. zu den Geraden 3; 1, 1 ansteigt, so folgt sofort, dass es bis auf einen, ausschliesslich von den Coefficienten der $f_i(\lambda)$ abhängenden Factor $\tau'$ die rechte Seite $R'$ von (30) selbst sein muss, und es resultirt:*)

$$(37)\qquad \tau' R'(\overset{3}{\lambda},\overset{1}{\mu},\overset{1}{\nu}) = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \mu\nu \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \mu \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \nu \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 1 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Der Factor $\tau'$ bestimmt sich, sobald wir die $\alpha$, $\beta$, wie es in (19) geschehen ist, fixirt haben. Denn $R'$ ist linear sowohl in den $p_{ix}=\Delta_{lmn}$ (7') resp. (7), als in den $\alpha$ resp. $\beta$, somit in den $p_{ix}$ jetzt vom zweiten Grade: andererseits ist die rechte Seite von (37) bilinear in den

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_x \\ \beta_i & \beta_x \end{vmatrix} = p_{rs}\cdot p_{ix}$$

*) Kürzer hätte sich der Beweis für die Umformung (37) so führen lassen. Man weiss von vornherein durch Abzählung der Bedingungen, welche die Identität (22) involvirt (cf. Brill in den Münchener Berichten vom Mai 1885), dass in (30) noch ein Parameter $\nu$ linear auftreten muss. Andererseits stellen die Coefficienten der Potenzen von $\lambda$ in $R'(\overset{3}{\lambda};\overset{1,}{\mu},\overset{1}{\nu})$ (30) irgend ein Werthsystem $\sigma_i$ dar, welches der Gleichung I $Q_{\sigma^2}=0$ genügt. Man berechne also die $\sigma_i$ als bilineare Functionen der $\mu$, $\nu$ aus II i. e. aus (35), und setze die Werthe in $R'$ ein, so hat man die rechte Seite von (27) gewonnen.

(Auf diesem Wege lässt sich auch ein zweiter, noch durchsichtigerer Beweis für die Ueberführung des Schnittpunkttheorems I in die Gestalten II erbringen). Ist man einmal im Besitze der rechten Seite von (30), so lässt sich die linke d. h. die Coefficienten der $\varphi_i(\mu)$, durch Coefficientenvergleichung finden: so bin ich ursprünglich durch sehr mühsame Rechnung zur Identität (30) gelangt.

(nach (20)) und den $\alpha$ resp. $\beta$. Daraus geht hervor, dass in der That, wie früher angekündigt,

(21′) $$\tau' = \tau = p_{rs}.$$

## § 5.

### Begrenzung des allgemeinen Falles.

Es tritt nun die Frage heran, wie weit die Gültigkeit der bisher unter Annahme „allgemeiner" $f_i(\lambda)$ gewonnenen Sätze und Formeln, insonderheit des Hauptergebnisses (28), reicht. Man wird hier unter *„allgemeinen"* $f_i(\lambda)$ eben solche verstehen, für die eine wirkliche Schaar (27) *„eigentlicher"* erzeugender $\mathsf{P}_2$ existirt.

Dafür lässt sich bald ein analytischer Ausdruck finden.

Zunächst überzeugen wir uns leicht davon, dass sich nicht etwa die in Rede stehende Schaar dadurch auf eine einzige, eigentliche $\mathsf{P}_2$ zusammenziehen kann, dass die $\alpha$ und $\beta$ in (13) einander je proportional würden, d. h., dass die Formen $\alpha_\lambda$ und $\beta_\lambda$ nicht mehr linear unabhängig von einander sein könnten. Dies kann jedoch nie eintreten, (wie auch die $f_i(\lambda)$ degeneriren möchten): denn laut der Definition (12) existiren immer zwei, linear unabhängige, zu den $f_i(\lambda)$ conjugirte Formen.

Indessen könnten ev. noch andere Beziehungen zwischen den gegebenen Coefficienten der $f_i(\lambda)$ eintreten, vermöge deren die gemeinte Contraction verwirklicht würde.

Jedenfalls aber müssen in diesem Falle die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\lambda$ in der Form $R'$ (30) einen gemeinsamen Factor von der Gestalt $\nu - \nu_1$ haben (u. umg.).

Schreiben wir:

(30) $$R\{\overset{1}{f_i}(\lambda);\ \overset{2}{\mu},\ \overset{1}{\nu}\} \equiv (\lambda-\mu)(\lambda^3\Sigma_0 - \lambda^2\Sigma_1 + \lambda\Sigma_2 - \Sigma_3),$$

so liegt auf der Hand, dass, zufolge der Bedeutung der Relationen IIa, IIb, die $\Sigma_i$ den $\sigma_i$ proportional sein müssen, und somit würde unsere Annahme die Wirkung haben, dass die Gleichungen

$$\mathsf{A}_0 - \nu_1 \mathsf{B}_0 = 0, \quad \mathsf{A}_1 - \nu_1 \mathsf{B}_1 = 0$$

äquivalent werden, was wiederum zur Consequenz hat, dass die aus den Coefficienten der $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0, \mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1$ gebildete Determinante verschwinden müsste. Diese Ausartung überhaupt wird in § 8 und 9 ihre Erledigung finden. Dann wird sich ergeben, dass, sobald die $\sigma_i$, und damit die Form $R'$ (30) einen Factor $\nu - \nu_1$ besitzen, das Gleiche auch von einem Factor $\mu - \mu_1$ gilt. Thatsächlich geht dann die Schaar der $\mathsf{P}_2$ (27) in eine einzige, erzeugende $\mathsf{P}_1$ über (die nur für gewisse, uneigentliche $f_i(\lambda)$ identisch verschwindet).

Genau umgekehrt zieht die Existenz eines Factors $\mu - \mu_1$ in (27) einen zweiten $\nu - \nu_1$ nach sich.

Schliessen wir daher diese beiden Irregularitäten vor der Hand aus, so haben wir uns zu der noch verbleibenden Besonderheit zu wenden, dass ev. sämmtliche erzeugende $P_2$ in „uneigentliche" i. e. in $P_1$ ausarten. Hierfür bieten sich wieder zwei Möglichkeiten.

Man denke sich die $\varphi_i(\overset{2}{\mu}, \overset{1}{\nu})$ in (27) nach Potenzen von $\mu$ geordnet:

$$\sigma\mu_i = \varphi_i(\overset{2}{\mu}) = \mu^2\varphi_{i2} + \mu\varphi_{i1} + \varphi_{i0}, \tag{27'}$$

wo die Coefficienten $\varphi_{ix}$ selbst linear und ganz in $\nu$ sind. Dann hören die rechten Seiten von (27)' auf, eigentliche Functionen ihrer Art (in $\mu$) zu sein, wenn entweder die Determinante der $\varphi_{ix}$ identisch (in $\nu$) verschwindet (ohne dass die $\varphi_i(\mu)$ einen Factor in $\mu$ gemein haben) oder aber, wenn aus den drei Formen $\varphi_i(\mu)$ ein (und derselbe), in $\mu, \nu$ bilineare Factor heraustritt.

Nach der ersteren Annahme würde es nicht nur drei (doppelt zählende) $P_1$ unter den erzeugenden $P_2$ geben (wie im Allgemeinen) — dieselben repräsentiren augenscheinlich sonst die drei Doppelpunkte der $R_4$ — sondern sämmtlichen $P_2$ (27') käme diese Eigenschaft zu. Schon daraus geht hervor, dass die $R_4$ zu einem doppelt zählenden Kegelschnitt wird. Aber auch der rein algebraische Nachweis dafür ist leicht zu erbringen. Denn, sobald die Determinante der $\varphi_{ix}$ verschwindet, nehmen, wie man weiss (und fast unmittelbar einleuchtet) die $\varphi_i(\overset{2}{\mu})$ (für jeden Werth von $\nu$) die Form $\varphi_i(\overset{1}{\mu_1})$ an, wo $\mu_1$ selbst eine rationale Function zweiten Grades von $\mu$ angiebt. Demnach sind auch die $f_i(\overset{4}{\lambda})$ von der correspondirenden Gestalt $f_i(\overset{2}{\lambda_1})$. Dies verstösst aber gegen die Beschränkung, der wir die $f_i(\lambda)$ gleich im Anfang (cf. § 1) unterworfen haben. (Siehe Näheres unter § 11.) Verfolgen wir nunmehr die zweite Möglichkeit „uneigentlicher" $\varphi_i(\overset{2}{\mu})$, so reduciren sich, nach Abspaltung und Hebung des gemeinten, in $\mu, \nu$ bilinearen Factors, die erzeugenden Zerlegungen (28), bisher zweiten Grades in $\mu$, sofort auf eine einzige, bestimmte, erzeugende Zerlegung ersten Grades in $\mu$, von der Art:

$$\sum f_i(\lambda)\,\varphi_i(\overset{1}{\mu}) \equiv (\lambda - \mu)\,S(\overset{3}{\lambda};\overset{0}{\mu}). \tag{38}$$

Diese Identität ist, wie auf der Hand liegt, äquivalent mit der Existenz eines „dreifachen Punktes" der $R_4$ d. i. eines Werthetripels $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ (von denen auch zwei resp. alle drei zusammenrücken können) mit der Eigenschaft:

$$f_1(\delta_1) : f_2(\delta_1) : f_3(\delta_1) = f_1(\delta_2) : f_2(\delta_2) : f_3(\delta_2) = f_1(\delta_3) : f_2(\delta_3) : f_3(\delta_3). \tag{39}$$

Das Criterium für das Eintreten dieser Eventualität springt hervor, sobald man sich der zweiten Form $II^a$ des Schnittpunkttheorems der $R_4$ bedient. Denn sollen die Relationen $II^a$, unabhängig von $\mu$, für drei Werthe $\lambda_1 = \delta_1$, $\lambda_1' = \delta_2$, $\lambda_1'' = \delta_3$ erfüllt werden, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinante*) der Formen (15), $A_0$, $A_1$, $B_0$, $B_1$, verschwindet, also:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{40}$$

*Wir charakterisiren daher „allgemeine" $R_4$ durch die Bedingung***)

$$\Delta \gtrless 0; \tag{41}$$

*für solche gilt der Inhalt der* §§ 1 — 4 *ohne Einschränkung.*

Die Untersuchung des Falles $\Delta = 0$, sowie der darunter enthaltenen, noch specielleren Ausartungen der $R_4$, werden wir demnächst im zweiten Abschnitte in Angriff nehmen.

## § 6.

### Ueber eine selbstständige, ausnahmslos gültige Darstellung der erzeugenden Curven dritter Classe.

Solange die Fundamentalzerlegung (28) als „eigentliche" existirt, haben wir nur (wie daselbst angegeben) an Stelle von $\nu$ eine beliebige lineare, gebrochene Function von $\mu$ in (28) zu substituiren:

$$\nu = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta}, \tag{42}$$

um im Besitze sämmtlicher erzeugender $P_3$ zu sein. Specialisirt sich

*) Diese Determinante $\Delta$ lässt sich, als Combinante der $f_i(\lambda)$, ausdrücken als Simultaninvariante der beiden, zum System der $f_i(\lambda)$ gehörigen Gordan'schen Elementarcombinanten (sechsten resp. zweiten Grades in $\lambda$). Dies ist bereits in „Reducib." pg. 60 Anm. geschehen. Andererseits muss $\Delta$ auch darstellbar sein als directe Simultaninvariante der $f_i(\lambda)$ resp. der beiden conjugirten Formen $\alpha_{\lambda_i}$, $\beta_{\lambda_i}$. Beschränken wir uns hier auf das Letztere, und bezeichnen, wie üblich, mit $i, i'$; $H, H'$ die bezüglichen Invarianten zweiten Grades, und die Hesse'schen Covarianten (je mit den bekannten Zahlenfactoren versehen), und endlich mit $(HH')^4$ die vierte Ueberschiebung von $H, H'$, so findet man leicht, dass:

$$6(HH')^4 - ii' = 24\Delta.$$

Schliesslich ist $\Delta$ auch das Resultat der Elimination der Potenzen von $\lambda$ aus den sechs Gleichungen: $f_i(\lambda) = 0$, $\lambda f_i(\lambda) = 0$.

**) Zudem ist noch stillschweigend vorausgesetzt, dass die Determinante der $\varphi_{ix}$ in (27') nicht bez. $\nu$ identisch verschwindet.

aber (28), wie soeben in § 5 explicirt, in eine erzeugende Zerlegung ersten Grades in $\mu$ (i. e. eine $P_1$), so kann die $R_4$ nur noch vermittelst dieser $P_1$ und einer (sonst beliebigen, aber) eigentlichen $P_3$ erzeugt werden. Da alsdann die durch Formel (42) getragene Herleitung der $P_3$ aus (28) *versagt*, so müssen wir danach streben, eine von (28) ganz unabhängige und bei allen Ausartungen einer (eigentlichen) $R_4$ unangetastete Darstellung der gemeinten $P_3$ zu gewinnen.

Eine solche bietet sich dar mit Hülfe der Formel (26); man lege nur dem willkürlichen Parameter $\lambda_1$ andere und andere Werthe bei.

In der That, ordnen wir die Form $Q_{\lambda_1^3}$ nach Potenzen von $\lambda_1$:

$$(26)\quad \frac{1}{\lambda_1-\mu}\,|f_i(\lambda),\, f_i(\lambda_1),\, f_i(\mu)| = Q_{\lambda_1^3} = \lambda_1^{\,3}\Omega_0 - \lambda_1^{\,2}\Omega_1 + \lambda_1\Omega_2 - \Omega_3,$$

so hat man für jeden der Coefficienten $\Omega_\varkappa (\varkappa = 0, \cdots, 3)$ eine Identität von der nämlichen Form:

$$(43)\qquad \Omega_\varkappa = \sum f_i(\lambda)\,\varphi_i^{(\varkappa)}(\mu) \equiv (\lambda-\mu)\,\Omega_\varkappa'(\overset{3}{\lambda};\overset{2}{\mu}).$$

Multipliciren wir also diese vier Identitäten mit willkürlichen Constanten $\varepsilon_\varkappa$, und addiren, so werden wir auf eine ganze Schaar von erzeugenden Zerlegungen dritten Grades in $\mu$ (und damit correspondirender $P_3$) geführt:

$$(44)\quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=3}\Omega_\varkappa\varepsilon_\varkappa = \sum_{i=1}^{i=3} f_i(\lambda)\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=3}\varphi_i^{(\varkappa)}(\overset{3}{\mu})\,\varepsilon_\varkappa \equiv (\lambda-\mu)\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=3}\Omega_\varkappa'(\overset{3}{\lambda};\overset{2}{\mu})\,\varepsilon_\varkappa.$$

Diese Schaar von $P_3$ muss mit der — für beliebige, eigentliche $R_4$ nach Formel (4) immer existirenden dreifach unendlichen, linearen Schaar von erzeugenden $P_3$ — vollständig übereinstimmen, sobald der Nachweis*) gelingt, *dass zwischen den* $\Omega_\varkappa$ *keine lineare Identität* (mit constanten Coefficienten) *herrscht.* Dieser Nachweis lässt sich führen, wie folgt.

In § 3 wurde von der Bemerkung Gebrauch gemacht, dass auch die Gleichung $Q_{\lambda_1^3} = 0$ in gewisser Weise das Schnittpunkttheorem der $R_4$ repräsentirt, insofern ihre Wurzeln (bei beliebigen $\lambda, \mu$) drei auf einer Geraden liegende, im Uebrigen *ganz beliebige* Punkte der $R_4$ an-

*) Es wäre allerdings noch der eine Einwand möglich, dass (bei besonderen $f_i(\lambda)$) die $\Omega_\varkappa$ sämmtlich einen und denselben Factor $\mu-\mu_1$ erhielten, somit in lauter erzeugende $P_2$ übergehen würden. Aus der Definition der $\Omega_\varkappa$ in (26) erhellt indessen unmittelbar, dass dann die Grundform $|f_i(\lambda), f_i(\lambda_1), f_i(\mu)|$ für ganz beliebige Werthe von $\lambda$ und $\lambda_1$ den nämlichen Factor $\mu-\mu_1$ haben müsste. Folglich hätten ihn auch die Formen $f_i(\mu)$ gemein. Es deckt sich also die hier erörterte Eventualität vollständig mit der im Texte behandelten, dass die $\Omega_\varkappa$ linear abhängig werden.

geben, d. h. dass die $\Omega$ in (26) *nur andere Zeichen* für die $\sigma_i$ (in 6) sind. Demnach zöge eine lineare Identität zwischen den $\Omega$ eine ebensolche zwischen den $\sigma$ nach sich (und umg.) Dann aber müsste auch die Form (18):

$$\tau Q_{\sigma^2} = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix} \tag{18}$$

in zwei (gleiche oder ungleiche), in den $\sigma$ lineare Factoren zerfallen. Dies kann aber dann und nur dann eintreten (wie der Anhang des Näheren lehren wird), wenn die $f_i(\lambda)$ einen Factor in $\lambda$ (mindestens vom ersten Grade) gemein haben.

Es wäre noch der extremste Fall denkbar, dass die Zerlegung (44) identisch verschwindet. Hierzu ist offenbar das Verschwinden sämmtlicher Determinanten $\Delta_{lmn}$ (7) nothwendig und hinreichend, und dies würde Nichts Anderes aussagen, als dass zwischen den $f_i(\lambda)$ eine lineare Dependenz herrschen würde (u. umg.). Dies war indessen von vornherein ausgeschlossen. (cf. auch § 11).

*„Somit liefert die Formel* (44) *wirklich für eigentliche $R_4$ unter allen Umständen die vollständige Schaar der erzeugenden* $P_3$.“

Zum Schlusse führen wir noch den Beweis, dass in allen (sc. eigentlichen) Ausartungsfällen, wo $\Delta = 0$, thatsächlich immer eine einzige, bestimmte, erzeugende Zerlegung ersten Grades (in $\mu$) existirt (die dann in Verbindung mit einer der Zerlegungen (44) die $f_i(\lambda)$ hervorbringt).

Denn andernfalls müsste die gemeinte Zerlegung ersten Grades identisch (in $\lambda$ und $\mu$) verschwinden. Nun zeigt die wirkliche Berechnung des Factors $S(\lambda)$ in (38) (wie man sie in Formel (54) findet), dass das identische Verschwinden der Form $S$ äquivalent ist mit dem simultanen Verschwinden aller ersten Minoren der Determinante $\Delta$ (40).

Dies wird aber gerade nach dem Schluss von § 11 das Criterium dafür sein, dass die $f_i(\lambda)$ einen, in $\lambda$ quadratischen Factor gemein haben.

## Zweiter Abschnitt.

## Die Erzeugung der „singulären“ $R_4$.

### § 7.

### Discussion der Bedingung $\Delta = 0$.

Wir fassen alle, unter der Annahme:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{40}$$

noch möglichen, eigentlichen $R_4$ unter dem Namen „*singuläre*" zusammen. Dabei wird bereits stillschweigend vorausgesetzt, dass mindestens eine erste Unterdeterminante von $\Delta$ von Null verschieden sei, da andernfalls (cf. § 6) die $R_4$ in eine uneigentliche degeneriren würde.

In diesem Paragraphen sammeln wir alle Folgerungen von Belang, die sich aus der Formel (40) schöpfen lassen.

Der § 5 stellte bereits das Verschwinden von $\Delta$ als das Criterium dafür fest, dass eine bestimmte, erzeugende $P_1$ existirt, deren zugehörige Zerlegung aus der Fundamentalzerlegung (28) resp. (30) dadurch ableitbar sein muss, dass sich auf beiden Seiten ein (und derselbe) in $\mu, \nu$ bilinearer Factor abspaltet.

Dies ist näher zu untersuchen. Vorab indessen müssen wir dem berechtigten Zweifel begegnen, ob nicht beim Eintreten des Falles (40) überhaupt die ganze Herleitung der Formel (28) *versagt*, und damit eventuell auch die letztere selbst ihren Sinn verliert.

Da ist nun zunächst beachtenswerth, dass die (*im allgemeinen Falle unabhängigen*) Formen $\mu, \nu$, die auf Grund des Schnittpunkttheorems II$^a$ resp. II$^b$ die Bedeutung haben:

$$\mu = \frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1}, \qquad \nu = \frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1}, \tag{45}$$

vermöge (40) durch eine bilineare Verknüpfung an einander gefesselt werden. Man multiplicire nur die mit (45) äquivalenten Relationen (35):

$$\varkappa A_0 = \mu\nu, \quad \varkappa B_0 = \mu, \quad \varkappa A_1 = \nu, \quad \varkappa B_1 = 1 \tag{35}$$

mit den ersten Minoren etwa der $i^{\text{ten}}$ Verticalreihe von $\Delta$ — sagen wir $M_i, N_i, P_i, R_i$ —, und addire, so erhält die linke Seite des Resultats den verschwindenden Factor $\Delta$ und es kommt:

$$\mu\nu M_i + \mu N_i + \nu P_i + R_i = 0. \tag{46}$$

Somit wird zum Mindesten jetzt *diejenige Bedeutung hinfällig*, welche wir in § 4 dem Verfahren des § 2 untergelegt hatten; wir können nicht die zwei willkürlichen Coordinaten $\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}$ einer Geraden in zwei, von einander abhängige (45) $\mu, \nu$ transformiren, folglich auch nicht die Form $u_f$ (10)′ in die linke Seite von (30). Und desgleichen würde die Umgestaltung der rechten Seite von (30) in den Ausdruck (37) ihren Sinn verlieren. Das Letztere harmonirt auch mit der Thatsache, dass für $\Delta = 0$ die linearen Gleichungen (35) nicht mehr nach den $\sigma_i$ auflösbar sind.

Auf den ersten Anblick scheint also die in den §§ 2—4 geleistete Arbeit für die singulären $R_4$ eine *vergebliche* gewesen zu sein.

Indessen erkennt man bei schärferem Hinsehen bald, dass die Grösse $\nu$ eine *Doppelrolle* spielte: einmal und vorwiegend als die durch (16) fixirte Function der $\sigma$ (die natürlich immer an die Gleichung

$Q_{\sigma^2} \equiv \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix} = 0$ gebunden zu denken sind), sodann als Parameter der zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Schaar

$$v_{\lambda^4} = \alpha_{\lambda^4} - v\beta_{\lambda^4}. \tag{16}$$

Für die singulären $R_4$ d. h. sobald $\Delta = 0$, *spaltet sich* diese ancipite Eigenschaft von $v$ in zwei *nicht mehr vereinbare:* denn während $v$ im ersteren Sinne vermöge (46) eine Function von $\mu$ wird, bleibt der Parameter $v$ in (17), nach wie vor, *selbstständig bestehen*, und hat mit der Grösse $\mu$ i. e. dem Argument eines variabeln Punktes der $R_4$, absolut Nichts zu schaffen.

Wir setzen nun ein für alle Mal fest, dass der Variabeln $v$ in diesem zweiten Abschnitt *ausschliesslich* die zweite Bedeutung, als Parameter des Büschels (17) beigelegt werden soll.

Dann aber überzeugt man sich Schritt für Schritt, dass der Verlauf des in § 2 vorgenommenen Ueberschiebungsprocesses von der Einschränkung $\Delta = 0$ *völlig unberührt* bleibt, und damit auch die Form der Fundamentalzerlegung (28) oder (30):

$$\sum f_i(\lambda)\, \varphi_i(\overset{2}{\mu}) = \frac{1}{\lambda_1 - \mu}\, (Q_{\lambda_1^2}, v_{\lambda_1^4})^3 \tag{47}$$

$$= R\{\overset{1}{f_i}(\lambda);\ \overset{2}{\mu}, \overset{1}{v}\} \equiv (\lambda - \mu)\, R'(\overset{3}{\lambda};\ \overset{1}{\mu}, \overset{1}{v}).$$

Dagegen wissen wir aus § 5, dass diese Formel eine *wesentliche Modification* insofern erleidet, als ihre beiden Seiten durch den nämlichen, (nicht verschwindenden), Bilinearfactor in $\mu$, $v$ theilbar werden, und sie dadurch (47) zur erzeugenden Zerlegung der einen, für $\Delta = 0$ existirenden $P_1$ wird.

Diesen fraglichen Factor werden wir im nächsten Paragraphen auf Grund der (gleichfalls unversehrt bleibenden) Rechnung von § 3 direct vermitteln.

Dies wird zugleich zu dem eigenthümlichen Ergebniss führen, dass selbst die Hauptformel (37) des § 4 *keine formale Einbusse erfährt.*

Wir schliessen diesen Paragraphen mit einer letzten, aber nicht geringfügigsten, charakteristischen Eigenschaft der Gleichung $\Delta = 0$: es lassen sich dann (und nur dann) die Formen (13) $\alpha_{\lambda^4}$, $\beta_{\lambda^4}$ als zwei (unabhängige) erste Polaren einer binären Form fünften Grades (in $\lambda$) auffassen. Wir kommen in § 10 eingehender darauf zurück: es zeigt sich, dass gerade diese Auffassung eine naturgemässe und selbstständige Erzeugung der singulären $R_4$ nach sich zieht.

## § 8.

**Aufstellung des in der Fundamentalzerlegung (47) enthaltenen, bez. $\mu$, $\nu$ bilinearen Factors $[\mu, \nu]_i$.**

In § 3 hatte sich für die linke Seite von (47) der Ausdruck herausgestellt:

$$(34)\quad R\{\overset{1}{f_i}(\lambda);\ \overset{2}{\mu}, \overset{1}{\nu}\} = (\mu^2 A_1 + \mu A_2 + A_3) - \nu(\mu^2 B_1 + \mu B_2 + B_3),$$

wo man wegen der Bedeutung der $A_i$, $B_i$ auf die Formeln (31), (32), (33) recurriren möge.

Combiniren wir jetzt die Relationen (35) und (46), so liegt uns die, bezüglich der $\sigma_i$ identisch zu erfüllende Gleichung vor:

$$(46')\qquad \mathsf{A}_0 M_i + \mathsf{B}_0 N_i + \mathsf{A}_1 P_i + \mathsf{B}_1 R_i = 0.$$

Hier sind unter den $M_i$, $N_i$, $P_i$, $R_i$ die den Elementen der $i^{\text{ten}}$ Verticale ($i = 1, 2, 3, 4$) zugehörigen ersten Minoren von $\Delta$ zu verstehen: mindestens für einen Werth des Index $i$ verschwinden jene vier Grössen nicht gleichzeitig (cf. Anfang von § 7).

Die vier, mit (46') äquivalenten Gleichungen (die hervorgehen, wenn man die Factoren der $\sigma_i$ einzeln annullirt) lassen sich in die Form von linearen Identitäten zwischen den $A_i$, $B_i$ bringen. Man ersetze zu dem Behuf die $\sigma_i$ durch die ihnen gleichwerthigen $\Omega_i$ (26), und sehe das Resultat als eine in der Variabeln $\mu$ identisch zu befriedigende Gleichung dritten Grades an, dann kommt:

$$(48)\qquad \begin{cases} M_i A_1 + N_i B_1 + P_i \cdot 0 + R_i \cdot 0 = 0, \\ M_i A_2 + N_i B_2 + P_i A_1 + R_i B_1 = 0, \\ M_i A_3 + N_i B_3 + P_i A_2 + R_i B_2 = 0, \\ M_i \cdot 0 + N_i \cdot 0 + P_i A_3 + R_i B_3 = 0. \end{cases}$$

Die erste und letzte dieser Identitäten lehren die Proportionalität von $A_1$, $A_3$ mit resp. $B_1$, $B_3$. Um das etwaige Verschwinden einzelner der $M_i$, $N_i$, $P_i$, $R_i$ mit zu berücksichtigen, schreiben wir, unter Anwendung von Hülfsfactoren $\omega_1$, $\omega_3$, homogen:

$$(49)\qquad \begin{cases} A_1 = N_i \omega_1, & B_1 = -M_i \omega_1, \\ A_3 = R_i \omega_3, & B_3 = -P_i \omega_3. \end{cases}$$

Dadurch formen sich die beiden mittleren Gleichungen (48) um, wie folgt:

$$(50)\qquad \begin{cases} M_i A_2 + N_i B_2 - \omega_1 (M_i R_i - N_i P_i) = 0, \\ P_i A_2 + R_i B_2 + \omega_3 (M_i R_i - N_i P_i) = 0. \end{cases}$$

Hier führen wir die Voraussetzung ein, dass mindestens eine der (vier) Grössen $\mathsf{E}_i$ — so sei der Index $i$ jetzt zu nehmen —:

(51) $$\mathsf{E}_i = M_i R_i - N_i P_i \gtrless 0,$$

d. h. von Null verschieden sei. Dann lassen sich die in $A_2$, $B_2$ linearen Gleichungen (50) nach letzteren Grössen auflösen, und man erhält:

(52) $$A_2 = \omega_1 R_i + \omega_3 N_i, \quad -B_2 = \omega_1 P_i + \omega_3 M_i.$$

Die Substitution der so gefundenen Ausdrücke (49), (52) in (34) *lässt sofort das Zerfallen von R in zwei Factoren erkennen:*

(53) $$R\{\overset{1}{f_i}(\lambda);\ \overset{2}{\mu},\ \overset{1}{\nu}\} = (\omega_1\mu + \omega_3)(\mu\nu M_i + \mu N_i + \nu P_i + R_i).$$

Hierbei sind noch im ersten Factor für $\omega_1$, $\omega_3$ ihre Werthe aus (49) einzusetzen. Es ist evident, dass die letzteren Relationen für $\omega_1$, $\omega_3$ so lange bestimmte Werthe i. e. Functionen der $f_i(\lambda)$ liefern, als die Voraussetzung (51) erfüllt bleibt. (Es können z. B. zugleich $M_i$ und $R_i$ verschwinden, wenn es nur $N_i$ und $P_i$ dann nicht thun).

*„Damit geht für $\Delta = 0$, aber $\mathsf{E}_i \gtrless 0$, die Fundamentalzerlegung* (30) *über in die erzeugende Zerlegung ersten Grades der singulären $R_4$:*

(54) $$\omega_1\{\overset{1}{f_i}(\lambda)\}\,\mu + \omega_3\{\overset{1}{f_i}(\lambda)\} \equiv (\lambda - \mu)\,\mathsf{P}(\overset{3}{\lambda}).\text{“}$$

Der Factor P rechter Hand ist unmittelbar angebbar. Denn die Wurzeln von $\mathsf{P} = 0$ sind genau die Grössen $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ in (39), d. h. das gemeinschaftliche Lösungssystem der Gleichungen:

(55) $$\mathsf{A}_0 = 0, \quad \mathsf{A}_1 = 0, \quad \mathsf{B}_0 = 0, \quad \mathsf{B}_1 = 0$$

und daher die Coefficienten von $\mathsf{P}(\overset{3}{\lambda})$ einem Systeme von (nicht sämmtlich verschwindenden) ersten Minoren einer Horizontalreihe von $\Delta$ proportional. Sei ein solches etwa $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, so geht (54) über in:

(54) $$\omega_1\mu + \omega_3 \equiv (\lambda - \mu)\,(\lambda^3 M_1 - \lambda^2 M_2 + \lambda M_3 - M_4).$$

Nun lehrt aber eine einfache Ausrechnung, dass die Bildung (37) des § 4 auf Grund von $\Delta = 0$ (bis auf einen constanten Factor) gleichfalls zerfällt, und zwar in:

(55) $$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \mu\nu \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \mu \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \nu \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 1 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\mu\nu M_i + \mu N_i + \nu P_i + R_i)\,P(\overset{3}{\lambda}).$$

Das Resultat dieser Untersuchung lässt sich so aussprechen:

*„Die Fundamentalzerlegung* (30), *— wo die Function R′ rechts der Einkleidung* (37) *fähig ist, — welche für $\Delta \gtrless 0$ eine Schaar von*

*erzeugenden* $\mathsf{P}_2$ *darstellte, geht für* $\Delta = 0$ (*aber* $\mathsf{E}_i \gtrless 0$), *nach Weghebung des Factors*

$$\mu\nu M_i + \mu N_i + \nu P_i + R_i = [\mu, \nu]_i \tag{56}$$

*über in die Zerlegung* (54) *der einen erzeugenden* $\mathsf{P}_1$.“

Diese bildet dann, worauf bereits in § 6 hingewiesen ist, in Gemeinschaft mit einer beliebigen (jedoch eigentlichen) Zerlegung dritten Grades (44) „das Fundamentalsystem“ der singulären $R_4$, aus dem nach der in § 5 der „Reducib.“ aufgestellten Regel alle sonstigen Zerlegungen ableitbar sind (cf. auch daselbst pg. 61).

## § 9.

## Der extreme Fall $\mathsf{E}_i = 0$.

Sobald (ausser $\Delta = 0$) die Bildung $\mathsf{E}_i$:

$$\mathsf{E}_i = M_i R_i - N_i P_i = 0, \tag{51}$$

d. h. für alle Werthe von $i$ (= 1, 2, 3, 4) verschwindet (was insgesammt zwei Bedingungen äquivalent ist), sind die Gleichungen (50) nicht mehr nach den $A_2$, $B_2$ auflösbar, und die auf dieser Auflösung fussenden Schlüsse des letzten Paragraphen *verlieren ihre Kraft.*

Aber für $\mathsf{E}_i = 0$ (und a fortiori in allen noch specielleren Fällen) hören auch (cf. § 11) die $f_i(\lambda)$ in (1) auf, eigentliche ganze Functionen von $\lambda$ zu sein, da sie dann nicht mehr theilerfremd sind.

Wir ziehen in diesem Falle noch eine bemerkenswerthe Folgerung. Die Identitäten (48) vereinfachen sich jetzt zu:

$$\left\{\begin{array}{ll} M_i A_1 + N_i B_1 = 0, & P_i A_2 + R_i B_2 = 0 \\ M_i A_2 + N_i B_2 = 0, & P_i A_3 + R_i B_3 = 0 \end{array}\right\}. \tag{57}$$

Setzt man daher — um wieder homogen schreiben zu können —:

$$\frac{M_i}{N_i} = \frac{P_i}{R_i} = \frac{\zeta}{\eta}, \tag{58}$$

so wird:

$$A_i = \eta\omega_i, \quad B_i = -\zeta\omega_i \ (i = 1, 2, 3). \tag{59}$$

Die $A_i$, $B_i$ werden also einander je proportional i. e. die rechte Seite (27) resp. (34) der erzeugenden Zerlegungen zweiten Grades erlaubt die Abspaltung eines Factors von der Form $\nu - \nu_1$.

Nun haben wir früher (§ 5) erkannt, wie aus der letzteren Annahme *jedenfalls* das Verschwinden von $\Delta$ folgt, und damit auch die Existenz der Relationen (48), (50).

Andererseits ist sofort ersichtlich, wie man unter Voraussetzung sowohl der Gleichungen (50) als (59), von den letzteren rückwärts wieder zu (51) gelangt. Dann aber ist ja den $f_i(\lambda)$ ein gemeinsamer

Factor von der Gestalt $\lambda - \mu_1$ eigen, folglich ist die Form $Q_{\lambda_1}$ (26) durch $\mu - \mu_1$ theilbar und das Gleiche gilt von der rechten Seite von (34).

*„Trotzdem also für den Fall*

$$\Delta = 0, \quad \mathsf{E}_i = 0$$

*die Abspaltung des in $\mu, \nu$ bilinearen Factors, rechter Hand von* (27), *auf dem Wege des* § 8 *nicht mehr gelingt, haben wir doch mittelst des eben geschilderten Umweges das Resultat erzielt, dass ein solcher Factor existirt. Und zwar ist derselbe selbst wieder reducibel**), *nämlich vom Typus:*

$$(\mu - \mu_1)(\nu - \nu_1).\text{“} \tag{60}$$

In § 11 wird sich des Genaueren herausstellen, dass unter den obigen Voraussetzungen ($\Delta = 0$, $\mathsf{E}_i = 0$) die linke Seite von (46) gerade in die Form (60) übergeht, sobald nachgewiesen ist, dass jene Bedingungen genau das Criterium für die Zerfällbarkeit der „Schnittpunktsform“

$$\tau Q_{\sigma^2} = \begin{vmatrix} \mathsf{A}_0 & \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{B}_0 & \mathsf{B}_1 \end{vmatrix} \tag{18}$$

in zwei bez. der $\sigma$ lineare Factoren angeben.

Dies stimmt dann völlig mit der Thatsache überein, dass auf Grund von (51) die Constanten $M_i, N_i, P_i, R_i$ respectiven Werthen $uv, u, v, 1$ proportional gesetzt werden können, woraus der Uebergang des Factors $\mu\nu M_i + \mu N_i + \nu P_i + R_i$ in die Form $(\mu u + 1)(\nu v + 1)$ d. h. die Form (60) unmittelbar erhellt.

Eine letzte Bedeutung unserer Anomalie $\Delta = 0$, $\mathsf{E}_i = 0$ liefert der nächste Paragraph.

## § 10.

## Selbstständige Behandlung der singulären $R_4$.

Bis hierher erschien der Fall $\Delta = 0$ unter dem Gesichtspunkt eines speciellen, aus dem „allgemeinen“ des ersten Abschnitts durch eine Art Grenzübergang (§§ 7, 8) abzuleitenden.

Nunmehr *eliminiren* wir gewissermassen die Bedingung $\Delta = 0$, dadurch, dass wir die Gesammtheit der (eigentlichen) singulären $R_4$ selbst wiederum unter einer *allgemeinen* Form darstellen. Nämlich so, dass wir die zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Formen (13) $\alpha_{\lambda^i}, \beta_{\lambda^i}$ ersetzen

---

*) In der That ist ja $\mathsf{E}_i$ (51) Nichts Anderes, als die „Discriminante“ der Bilinearform $[\mu, \nu]_i$ (56), deren Verschwinden die besagte Zerfällung aussagt. Sobald $\Delta = 0$ ist, werden die $\mathsf{E}_i$ einander proportional.

durch irgend zwei, (linear unabhängige), erste Polaren einer binären Form fünften Grades: diese letztere ist ganz beliebig und darf nur nicht dahin ausarten, dass ihre Canonizante dritten Grades identisch verschwindet.

In der That, sei $g_{\lambda^5}$ eine Form fünften Grades:

(61) $g_{\lambda^5} = g_5\lambda^5 + 5g_4\lambda^4\lambda' + 10g_3\lambda^3\lambda'^2 + 10g_2\lambda^2\lambda'^3 + 5g_1\lambda\lambda'^4 + g_0\lambda'^5$,

(wo $\lambda'$ als homogener Hülfsparameter eingeführt ist), und

(62) $$G_1 = \frac{\partial g_{\lambda^5}}{\partial\lambda}, \quad G_2 = \frac{\partial g_{\lambda^5}}{\partial\lambda'},$$

so müssen sich, wenn die gedachte Darstellung möglich sein soll, die Verhältnisse von vier Grössen $m, n, p, r$ so bestimmen lassen, dass:

(63) $$m\alpha_{\lambda^4} + n\beta_{\lambda^4} \equiv G_1, \quad p\alpha_{\lambda^4} + r\beta_{\lambda^4} \equiv G_2$$

wird, und somit die Relationen gelten:

(64) $$\begin{cases} m\alpha_0 + n\beta_0 + p\alpha_1 + r\beta_1 = 0, \\ m\alpha_1 + n\beta_1 + p\alpha_2 + r\beta_2 = 0, \\ m\alpha_2 + n\beta_2 + p\alpha_3 + r\beta_3 = 0, \\ m\alpha_3 + n\beta_3 + p\alpha_4 + r\beta_4 = 0. \end{cases}$$

Daraus folgt:

„*Soll die Schaar der zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Formen*

(17) $$\alpha_{\lambda^4} - \nu\beta_{\lambda^4} = \nu_{\lambda^4}$$

*übereinstimmen mit der der ersten Polaren einer Form $g_{\lambda^5}$* (61), *so ist dazu nothwendig und hinreichend, einmal, dass die Determinante $\Delta$ der Gleichungen* (64) *verschwindet, sodann, dass wenigstens eine der Grössen $\mathsf{E}_i$* (51) *von Null verschieden ist:*

(51) $$\mathsf{E}_i = M_iR_i - N_iP_i \gtrless 0 \; (i = 1, 2, 3, 4).$$“

Denn für $\Delta = 0$ berechnen sich*) die $m, n, p, r$ aus den Gleichungen

*) Diese Berechnung erleidet nur dann eine wesentliche Modification, wenn sämmtliche ersten Unterdeterminanten $M_i$, $N_i$, $P_i$, $R_i$ von $\Delta$ verschwinden. Dann müssen die Verhältnisse der $m, n, p, r$ noch einen Parameter $\varkappa$ linear mit sich führen, und die Darstellung (63) ist noch auf unendlich viele Arten möglich.

In der That wird in § 11 nachgewiesen, dass dann die Schaar $\nu_{\lambda^4}$ aus zwei vierten Potenzen componirbar ist: $\alpha_{\lambda^4} = (\lambda - \alpha)^4$, $\beta_{\lambda^4} = (\lambda - \beta)^4$. Dann darf man offenbar setzen: $g_{\lambda^5} = (\lambda - \alpha)^5 + \varkappa(\lambda - \beta)^5$, denn man erhält:

$$\begin{cases} G_1 = \alpha_{\lambda^4} + \varkappa\beta_{\lambda^4} \\ -G_2 = \alpha\alpha_{\lambda^4} + \varkappa\beta\beta_{\lambda^4} \end{cases} \text{ i. e. } m : n : p : r = 1 : \varkappa : -\alpha : -\beta\varkappa,$$

und umgekehrt setzen sich $\alpha_{\lambda^4}$, $\beta_{\lambda^4}$ aus $G_1, G_2$ zusammen, wie folgt:

$$\begin{cases} \varkappa(\alpha - \beta) = \alpha G_1 + G_2, \\ -(\alpha - \beta) = \beta G_1 + G_2. \end{cases}$$

(64), unter Benützung der in (46′) zuerst vorkommenden Zeichen $M_i$, $N_i$, $P_i$, $R_i$, wie folgt:

$$m : n : p : r = M_i : N_i : P_i : R_i. \tag{65}$$

Die Ungleichungen (51) sagen demnach nichts Anderes aus, als dass die Identitäten (63) nach den $\alpha_{\lambda^s}$, $\beta_{\lambda^s}$ auflösbar seien, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die letzteren beiden Formen linear independent sind.

Am einfachsten nehmen wir daher für $\alpha_{\lambda^s}$, $\beta_{\lambda^s}$ die ersten Differentialquotienten von $g_{\lambda^s}$ selbst: wir setzen zweckmässig:

$$\alpha_{\lambda^s} = G_2, \quad \beta_{\lambda^s} = -G_1. \tag{66}$$

Dann werden die Functionen $\mu$, $\nu$ (45) *identisch* d. h. die linke Seite der bilinearen Relation, sowie der Factor (56) proportional mit $\mu - \nu$, weiter

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \end{vmatrix} = 0, \tag{67}$$

und endlich der Factor $\overset{3}{\mathsf{P}}(\lambda)$ in (54) proportional mit der Sylvester'schen Canonizante $T$ von $g_{\lambda^s}$, sodass die erzeugende Zerlegung ersten Grades (54), im Hinblick auf ihre ursprüngliche Gestalt (28), jetzt succ. lauten würde, wie folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=3} f_i(\lambda)\, \varphi_i(\mu) &= \overset{1}{\frac{1}{(\lambda_1 - \mu)(\mu - \nu)}}\, (Q_{\lambda_1^s}, v_{\lambda_1^s})^3, \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \mu)(\mu - \nu)}\, (Q_{\lambda_1^s}, g_{\lambda_1^s \nu})^3, \\ &= -\frac{1}{(\lambda_1 - \mu)^2}\, (Q_{\lambda_1^s}, g_{\lambda_1^s})^3 = (\lambda - \mu)\, \overset{3}{T}(\lambda). \end{aligned} \tag{68}$$

Um zu dieser einfacheren Repräsentation zu gelangen, bedarf man *keineswegs* der Entwickelung des § 8: denn das Schnittpunkttheorem in der Form II$^d$ geht bei unserer neuen Einkleidung der Formen $\alpha_{\lambda^s}$, $\beta_{\lambda^s}$ (66) über in:

$$g_{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_1'' \mu \nu} = 0, \tag{II′$^d$}$$

wo $\mu, \nu$ irgend zwei beliebigen (und vollkommen gleichberechtigten) Punkten der $R_4$ als Argumente angehören. Demnach muss die Bildung $(Q_{\lambda_1^s}, g_{\lambda_1^s \mu \nu})^3$ neben dem Factor $\mu - \lambda_1'$ auch den analogen $\nu - \lambda_1$ enthalten.

---

Dann verschwindet die Canonizante dritten Grades von $g_{\lambda^s}$ identisch: umgekehrt, wenn dies der Fall i. e. wenn alle ersten Minoren von $\Delta$ gleich Null sind, so ist dies bekanntlich das Criterium für die Darstellbarkeit von $g_{\lambda^s}$ als Summe zweier fünften Potenzen.

Zu dem über die erzeugenden Zerlegungen dritten Grades (44) früher Gesagten ist hier Nichts hinzuzusetzen.

Dass die Covariante $T(\lambda)^3$ von $g_{\lambda^4}$ nicht identisch verschwinden soll, wie oben postulirt, ist mit der gleichfalls schon im ersten Abschnitt (§ 5) erledigten Eventualität äquivalent, dass nicht sämmtliche ersten Minoren von $\Delta$ einen verschwindenden Werth annehmen (vgl. den Schluss der letzten Anmerkung).

Für eine etwaige Weiterführung*) in der combinantentheoretischen Untersuchung der singulären $R_4$ auf dem hier eingeschlagenen Wege finde folgende Schlussnotiz ihren Platz.

Wie neuere Untersuchungen ermittelt haben, finden alle (binär, wie ternär-) projectivischen Eigenschaften einer $R_4$ (resp. $R_n$) ihren algebraischen Ausdruck in binären, ternären Combinanten der $f_i(\lambda)$ (oder auch der zu letzteren conjugirten Formen $\alpha_{\lambda^4}$, $\beta_{\lambda^4}$), welche nach einfachen Vorschriften aus gewissen „Elementarcombinanten" zu deriviren sind. Die letzteren lassen sich wiederum (durch Polarenprocesse) zurückführen auf die rein binären, sogenannten Gordan'schen Elementarcombinanten, die in unserem Falle, bei beliebigen (eigentlichen) $f_i(\lambda)$ aus den beiden Formen sechsten resp. zweiten Grades bestehen:

$$(69) \qquad (\alpha_{\lambda^4}, \beta_{\lambda^4})^1 = (\alpha\beta)\,\alpha_{\lambda^2}\beta_{\lambda^2}, \quad (\alpha_{\lambda^4}, \beta_{\lambda^4})^3 = (\alpha\beta)^3\,\alpha_\lambda\beta_\lambda.$$

Nun ist sofort erkennbar, dass dieselben im Falle der singulären $R_4$ (66) übergehen in die von Salmon**) mit $H$ und $S$ bezeichneten Covarianten der Form $g_{\lambda^4}$.

Wir können daher sagen:

„Die singulären $R_4$ sind dadurch charakterisirt, dass ihre Gordan'sche Elementarcombinante sechsten Grades zusammenfällt mit der Hesse'schen Covariante einer binären Form fünfter Ordnung."

---

*) In dieser Richtung wäre vor Allem die Frage zu beantworten nach der invariantiven Abhängigkeit der zu $G_1$, $G_2$ (66) conjugirten Formen $f_i(\lambda)$ von der Form $g_{\lambda^4}$ (61). Wir stellen zu dem Behuf vorerst allgemein die Gruppe der $f_i(\lambda)$ rückwärts aus den beiden (nunmehr als gegeben gedachten) Gordan'schen Elementarcombinanten dar, indem wir auf diese geeignete Polarenprocesse anwenden. Bezeichnet man die letzteren Formen mit $W_{\lambda^6}$, $P_{\lambda^2}$, wie in „Reducib." pg. 59, wo die parallele Frage bez. der Darstellung der Schaar $\nu_{\lambda^4}$ (16) erledigt ist, so kommt auf demselben Wege, wie dort, das (übrigens leicht zu verificirende) Resultat:

$$|f_i(\lambda),\ f_i(\lambda_1),\ f_i(\mu)|$$
$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda_1-\mu)(\mu-\lambda)\left\{W_{\lambda^2\lambda_1^2\mu^2}-\frac{1}{10}[P_{\lambda^2}(\lambda_1-\mu)^2+P_{\lambda_1^2}(\mu-\lambda)^2+P_{\mu^2}(\lambda-\lambda_1)^2]\right\},$$

wo die linke Seite bei willkürlichen $\lambda_1, \mu$ die ganze Schaar der $f_i(\lambda)$ repräsentirt. Im vorliegenden Specialfalle (66) hat man nur für $W_{\lambda^6}$, $P_{\lambda^2}$ die beiden Covarianten $H, S$ von $g_{\lambda^4}$ zu substituiren (cf. den Text).

**) Vgl. Salmon-Fiedler, „Algebra" art. 224.

Somit gehören alle für die singulären $R_4$ erforderlichen Combinanten in gewissem Sinne einem Theile der Invariantentheorie von $g_{12}$ an.

Der in Rede stehende Specialfall von (69) ist, nach der rein binären Seite, von Herrn Lindemann*) einer eingehenden Untersuchung unterworfen worden, womit die angedeutete Fortschreitungsrichtung gegeben ist.

## Anhang.

### § 11.

### Systematische Untersuchung der uneigentlichen $R_1$.

In den beiden vorangegangenen Abschnitten haben wir die „eigentlichen" $R_4$ in zwei *Hauptgattungen* eingetheilt, und genaue Criterien für dieselben aufgestellt: die erste Gattung der *„allgemeinen"* $R_4$ war völlig definirt durch die Ungleichung (41) $\Delta \gtrless 0$, wenn noch die Beschränkung hinzutrat, dass die „Determinante" der erzeugenden Classenkegelschnitte $P_2$ (27′) hinsichtlich des Parameters $v$ nicht identisch verschwinden sollte. Dem gegenüber stand die zweite Gattung, der *„singulären"* $R_4$, deren Charakteristik durch: (51) $\Delta = 0$, $E_i \gtrless 0$ (wenigstens für *einen* Werth 1, 2, 3, 4 des Index $i$) getroffen war. *Diese beiden Gattungen enthielten die Gesammtheit der eigentlichen i. e. nicht zerfallenden* $R_4$. Wurden irgendwie die gezogenen Grenzlinien überschritten (und schliesst man jetzt den Fall aus, dass dabei nur die erste Gattung in die zweite übergeht), so zerfällt die $R_4$, und die $f_i(\overset{4}{\lambda})$ (1) werden „uneigentlich" d. h. nach § 1, sie erhalten entweder einen gemeinsamen Factor in $\lambda$, oder sie sind von der Form $f_i(\overset{2}{\lambda'})$ (wo $\lambda'$ selbst wieder rational und vom zweiten Grade in $\lambda$ ist), oder endlich, sie hören auf, linear unabhängig zu sein. Und zwar dachten wir uns die gemeinten Ueberschreitungen *auf dem Gebiete der erzeugenden Classencurven* $P_3$, $P_2$, $P_1$ — auf diese niedrigsten Classen darf man sich beschränken — *vorgenommen*, indem wir je eine vollständige Schaar der letzteren Curven in lauter „uneigentliche" degeneriren liessen.

Nunmehr schlagen wir den *umgekehrten* Weg ein: die $f_i(\lambda)$ mögen in einer der drei angegebenen Weisen „uneigentlich" werden (wobei die hervorragendsten Unterfälle durch scharfe Criterien von einander zu isoliren sind): welche Modificationen erleiden dadurch die erzeugenden Classencurven?

*) Diese Annalen Band 21.

Jedenfalls müssen wir so — und dies dient zu einer vollständigen Controlle — zu den früher direct eingesehenen Ausartungsmöglichkeiten zurückgelangen. Dabei bietet sich von selbst Gelegenheit, einige, damals durch offen gelassene Beweise entstandenen Lücken auszufüllen.

Fast alle Entwickelungen des Folgenden lassen entsprechende *Erweiterungen* auf (ebene, wie räumliche u. s. f.) $R_n$ zu.

Zunächst befreien wir die zu Beginn von § 1 festgesetzte Definition der „eigentlichen" $R_4$ von jeder Willkür durch den Nachweis, dass dieselbe coincidirt mit der der „*nicht zerfallenden*" $R_4$. In der That, soll die $R_4$ zerfallen, d. h. sollen die $f_i(\overset{4}{\lambda})$ in (1) ganzen Functionen niedrigeren, als vierten Grades eines Parameters proportional werden (sc. ohne dabei in Constante überzugehen), so kann dies nur so vor sich gehen, dass entweder ein und derselbe Factor (in $\lambda$) aus allen $f_i(\lambda)$ heraustritt, oder aber, dass die $f_i$ in Wirklichkeit Functionen geringeren Grades eines Zwischenparameters $\lambda'$ werden, der selbst wieder rational von $\lambda$ abhängt.

Eine etwaige Combination nämlich der beiden Eventualitäten, in dem Sinne, dass die $f_i(\overset{4}{\lambda})$ den Typus $f_i(\overset{m}{\lambda'})$ aufwiesen, wo $\lambda'$ eine rationale Function $n^{\text{ten}}$ Grades von $\lambda$, und $mn > 4$ wäre, folglich die $f_i(\overset{mn}{\lambda})$ wiederum eine ganze Function, des Grades $mn - 4$ in $\lambda$, als Theiler gemein haben müssten, führt, wie leicht zu sehen, zu nichts Neuem.

Denn, sobald die $f_i(\overset{mn}{\lambda})$ durch einen Linearfactor von der Form $\lambda - \lambda_1$ theilbar sind, sind es auch die $f_i(\overset{m}{\lambda'})$ durch einen solchen von der Form $\lambda' - \lambda_1'$: man kommt also succ. zum Falle $mn = 4$ zurück.

Aus dem eben Gesagten folgt bereits, dass die früher erwähnte, dritte Möglichkeit uneigentlicher $R_4$ (die in einer linearen Dependenz zwischen den $f_i(\lambda)$ ihren Ausdruck fand) den beiden ersten (resp. einer derselben) als Specialfall subsummirt werden können muss.

Im letzten Abschnitt wird sich dies noch deutlicher herausstellen.

Demnach unterscheiden wir fünf Gattungen uneigentlicher $R_4$, jenachdem die $f_i(\lambda)$ eine ganze Function ersten, zweiten, dritten Grades (in $\lambda$) gemein haben, oder ganze Functionen zweiten resp. ersten Grades einer rationalen Function zweiten resp. vierten Grades von $\lambda$ sind. Von diesen Fällen wird der zu dritt genannte nur wieder einen Specialfall des letzten ausmachen.

Die übrigen vier Gattungen theilen wir, je nachdem die Invariante $\Delta$ von Null verschieden ist, oder nicht, in zwei Hauptpartien ein.

I. $\quad \Delta \gtrless 0. \quad R_4 = (R_2)^2$ Constantenanzahl*) $= 7.$

Hier existirt nur eine Gattung von $R_4$, d. i. die sämmtlicher, doppeltzählender, *nicht zerfallender* Kegelschnitte $R_2$:

$$\varrho x_i = f_i(\overset{4}{\lambda}) = f_i'(\overset{2}{\lambda'}), \quad \lambda' = \mathsf{P}(\overset{2}{\lambda}), \tag{70}$$

(wo die $f_i'(\overset{2}{\lambda'})$ „*eigentliche*" Functionen zweiten Grades in $\lambda'$ sind, und Zähler und Nenner der rationalen Function**) $\mathsf{P}(\overset{2}{\lambda})$ bez. $\lambda$ theilerfremd sind).

Damit dieser Fall eintritt, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass die Determinante der erzeugenden $\mathsf{P}_2$:

$$\sigma u_i = \varphi_i(\overset{2}{\mu}; \overset{1}{\nu}) = \varphi_{i0}(\overset{1}{\nu}) + \varphi_{i1}(\overset{1}{\nu})\mu + \varphi_{i2}(\overset{1}{\nu})\overset{2}{\mu}, \tag{27'}$$

nämlich die in $\nu$ cubische binäre Form:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{10} & \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{20} & \varphi_{21} & \varphi_{22} \\ \varphi_{30} & \varphi_{31} & \varphi_{32} \end{vmatrix} = \nu^3\Phi_0 + \nu^2\Phi_1 + \nu\Phi_2 + \Phi_3 = 0. \tag{71}$$

identisch verschwindet, oder dass einzeln:

$$\Phi_0 = 0, \ \Phi_1 = 0, \ \Phi_2 = 0, \ \Phi_3 = 0. \tag{71'}$$

Dabei denken wir uns die $\Phi$ bereits von ihrem gemeinsamen***) Factor $\Delta$ befreit. *Dann stimmt* (71), wie leicht zu beweisen†), *gerade überein mit der Invariante $j$ der, zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Schaar* (16) $v_{\lambda^6} = \alpha_{\lambda^6} - \nu\beta_{\lambda^6}$.

*) Die Constantenanzahl d. h. die Maximalanzahl der den Typus I oder (70) begleitenden willkürlichen Constanten ist aus der Darstellung (70) sofort abzulesen. Denn die $R_2$ hängt von fünf Constanten ab, während weitere fünf in der rationalen Function $\mathsf{P}(\overset{2}{\lambda})$ figuriren. Von letzteren kommen aber, auf Rechnung einer linearen Transformation von $\lambda$ drei in Abzug: man hat also $5+(5-3)=7$.

Ebenso erledigen sich die übrigen Gattungen.

**) Die einmalige Erklärung des Zeichens $\mathsf{P}$ möge genügen.

Eine canonische Form des Typus I wird geliefert durch:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda'^2 : \lambda' : 1, \quad \lambda' = \lambda^2.$$

***) Dass die $\Phi_i$ in (71) den Factor $\Delta$ enthalten müssen, folgt daraus, dass die Form (71), wie aus der Zerlegung (55) hervorgeht, auch dann identisch verschwindet, wenn $\Delta = 0$.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $\Delta$ in keiner höheren, als der ersten Potenz auftritt.

†) Der Beweis beruht auf der bekannten Eigenschaft einer biquadratischen Form $v_{\lambda^6}$, dann und nur dann als Summe zweier vierter Potenzen darstellbar zu sein, wenn ihre Invariante $j$ verschwindet.

Die erzeugenden $P_2$ (27') werden genau so uneigentlich, wie die $f_i(\lambda)$ selbst, denn es kommt:

$$\sigma u_i = \varphi_i'(\overset{1}{\mu'}, \overset{1}{\nu}), \quad \mu' = \mathsf{P}(\overset{2}{\mu}), \tag{72}$$

und es sind dies die erzeugenden Zerlegungen (in $\mu'$) ersten Grades (und damit das *Fundamentalsystem* cf. „Reducib.“ pg. 55) der $R_2$

$$\varrho x_i = f_i'(\overset{2}{\lambda'}).$$

Würden die $f_i(\overset{2}{\lambda'})$ ihrerseits aufhören, eigentlich zu sein (sodass entweder nur ihre Determinante verschwände oder ein gemeinschaftlicher Factor von der Form $\lambda' - \lambda_1'$ existirte), so wären die $f_i(\lambda)$ entweder von der Gestalt $f_i''(\overset{1}{\lambda''})$, $\lambda'' = \mathsf{P}'(\overset{4}{\lambda})$, oder sie besässen einen und denselben quadratischen Factor in $\lambda$. Beide Fälle gehören aber der zweiten Hauptpartie an, wo $\Delta = 0$.

## II. $\Delta = 0$.

Erste Gattung. Die $R_4$ wird zur $R_3 : R_1 = R_3 \cdot (R_1)$.*) Constantenanzahl $= 9$.

Die Darstellung ist:

$$\varrho x_i = f_i(\overset{4}{\lambda}) = g_i(\overset{3}{\lambda})(\lambda - \alpha), \tag{75}$$

d. h. es hat sich von der $R_4$ eine Gerade ($= R_1$) abgetrennt.

Dies tritt, wie bekannt,**) dann und nur dann ein, wenn in der Schaar der zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Formen (16) $\nu_{\lambda^4} = \alpha_{\lambda^4} - \nu\beta_{\lambda^4}$ eine vierte Potenz, $(\lambda - \alpha)^4$, vorkommt. Nimmt man sie als Form $\alpha_{\lambda^4}$, so wird:

$$\mathsf{A}_1 = \alpha^3\sigma_0 - \alpha^2\sigma_1 + \alpha\sigma_2 - \sigma_3, \quad \mathsf{A}_0 = \alpha\mathsf{A}_1, \tag{76}$$

und es zerfällt daher die „Schnittpunktform“ (18) in zwei lineare Factoren:

$$\begin{vmatrix} \mathsf{A}_0 & \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{B}_0 & \mathsf{B}_1 \end{vmatrix} = \mathsf{A}_1(\alpha\mathsf{B}_1 - \mathsf{B}_0). \tag{77}$$

---

*) Die Bezeichnung $R_3(R_1)$ {und entsprechend die für die nächste Gattung $R_2(R_2')$} ist gewählt worden, da die Lage der von der $R_4$ sich lostrennenden $R_1$ noch ganz davon abhängt, auf welchem Wege man den Grenzfall (75) eintreten lässt.

So hat, bei festgehaltenem $\alpha$, die $R_1$ nur der Forderung nachzukommen, einen festen Punkt (mit den Coordinaten $g_i(\alpha)$) zu passiren, ist aber sonst willkürlich. Vgl. darüber meine Arbeit „Ueber algebraische Knoten“ in den Proceedings of the Royal Society of Edinburgh von 1886 (§ 7), sowie Brill, diese Annalen Band XII, pag. 101, Anm.

**) cf. z. B. „Apolarität“ § 17, pag. 90.

Aber auch das *Umgekehrte* gilt: das Zerfallen von (77) in zwei (bez. der $\sigma$) lineare Factoren zieht das in (75) Formulirte nach sich.

Diesen Satz beweisen wir in folgender Art.

Versteht man unter $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ die (durch die Zahl zwei dividirt gedachten) ersten partiellen Differentialquotienten der Form $\begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix}$ (oder $Q_{\sigma^2}$) nach den $\sigma_i$, so gelten die leicht zu erhärtenden Identitäten:

$$(78)\qquad \begin{cases} Q_0 = \beta_1 A_0 - \alpha_1 B_0 - \beta_0 A_1 + \alpha_0 B_1, \\ Q_1 = \beta_2 A_0 - \alpha_2 B_0 - \beta_1 A_1 + \alpha_1 B_1, \\ Q_2 = \beta_3 A_0 - \alpha_3 B_0 - \beta_2 A_1 + \alpha_2 B_1, \\ Q_3 = \beta_4 A_0 - \alpha_4 B_0 - \beta_3 A_1 + \alpha_3 B_1. \end{cases}$$

Daraus geht unmittelbar hervor, dass die Coefficientendeterminante von $Q_{\sigma^2}$ gleich dem Quadrate der Invariante $\Delta$ ist: da nun die erstere (nebst ihren sämmtlichen ersten Minoren) verschwinden muss, damit $Q_{\sigma^2}$ reducibel wird, so ist sicher auch $\Delta = 0$, ausserdem aber ist noch erforderlich (und hinreichend), dass für einen gewissen Werth $\mu_1$ von $\mu$ die Formen $A_0 - \mu A_1$, $B_0 - \mu B_1$ proportional werden. (Dann gilt auch das Entsprechende für zwei Formen $A_0 - \nu_1 B_0$, $A_1 - \nu_1 B_1$ und umg.). Mithin muss die auf Grund von $\Delta = 0$ stattfindende Relation zwischen den Functionen $\mu = \frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1}$, $\nu = \frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1}$:

$$(46)\qquad \mu\nu M_i + \mu N_i + \nu P_i + R_i = 0$$

bis auf einen constanten Factor sich zerlegen in die Form (60):

$$(60)\qquad (\mu - \mu_1)(\nu - \nu_1) = 0,$$

d. h. es muss (für alle Werthe von $i = 1, 2, 3, 4$) die „Discriminante" $E_i$ von (46):

$$(51)\qquad E_i = M_i R_i - N_i P_i$$

verschwinden, und umgekehrt.

In der That existiren dann nicht verschwindende Constante $\varkappa$, $\varkappa'$ so, dass:

$$(79)\qquad \begin{cases} A_0 - \mu_1 A_1 \equiv \varkappa (B_0 - \mu_1 B_1), \\ A_0 - \nu_1 B_1 \equiv \varkappa' (A_1 - \nu_1 B_1) \end{cases}$$

oder auch:

$$(79')\qquad \begin{cases} A_0 - \varkappa B_0 \equiv \mu_1 (A_1 - \varkappa B_1), \\ A_0 - \varkappa' A_1 \equiv \nu_1 (B_0 - \varkappa' B_1) \end{cases}$$

und man hat, mit Hülfe eines constanten Factors $\tau'$:

$$(80)\qquad \tau' \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix} = (A_1 - \varkappa B_1)(B_0 - \varkappa' B_1).$$

Damit ist der gewünschte Beweis erbracht, und zugleich die Form

(81) $\qquad \alpha_{\lambda'} - \varkappa\beta_{\lambda'}$, proportional mit $(\lambda - \mu_1)^4$

als die, in der Schaar $\nu_{\lambda'}$ (16) enthaltene volle Potenz ermittelt.

Stillschweigende Voraussetzung ist nur, dass nicht die Relation (46) (für alle Werthe von $i$) in $\mu$ und $\nu$ *identisch* erfüllt sein soll i. e. dass nicht sämmtliche erste Unterdeterminanten $M_i$, $N_i$, $P_i$, $R_i$ von $\Delta$ den Werth Null annehmen. In der That lehrt die Untersuchung des nächsten Abschnittes, dass dann die $f_i(\lambda)$ sogar einen, in $\lambda$ *quadratischen* Factor gemein haben.

Demnach resultirt:

*„Das Criterium für die Ausartung der $R_4$ in eine eigentliche $R_3$ lässt sich einmal dahin angeben, dass zwischen den $\sigma_i$ eine lineare Identität herrscht. Dies ist andererseits zwei unabhängigen Bedingungen äquivalent, die durch das simultane Bestehen von:*

(82) $\qquad \Delta = 0, \quad \mathsf{E}_i = 0 \; (i = 1, 2, 3, 4)$

*ohne dass zugleich alle ersten Minoren von $\Delta$ verschwinden, genau abgegrenzt sind.“*

Ist dies Criterium einmal festgelegt, so ist nach Früherem der Einfluss auf die erzeugenden Zerlegungen niedrigsten Grades, und dadurch die Erzeugung der aus der $R_4$ hervorgegangenen $R_3$ völlig bestimmt.

Denn einestheils liefert, zufolge § 9, die Darstellung der erzeugenden $\mathsf{P}_2$ (27′), nach Abspaltung des Factors $(\mu - \mu_1)(\nu - \nu_1)$ sofort diejenige für die erzeugende $\mathsf{P}_1$ der $R_3$ (cf. „Reducib.“ pg. 56).

Anderntheils emanirt aus der Schaar (44) der erzeugenden $\mathsf{P}_3$, unter Berücksichtigung der zwischen den $\sigma$ waltenden Identität:

(83) $\qquad \mathsf{A}_0 - \varkappa'\mathsf{A}_1 = 0$

unmittelbar die (zweifach unendliche Schaar der erzeugenden $\mathsf{P}_2$ der $R_3$ (cf. „Reducib.“ pg. 55). In der That lehrt ein Blick auf die Herleitung von (44) aus (26), dass sich der Factor $\mu - \mu_1$ (wie auch der andere $\lambda - \mu_1$) absondert.

Die Constantenanzahl*) unseres Gebildes beträgt neun, und nicht, wie es zuerst scheinen könnte, acht.

---

*) Denn die $R_3 : \varrho x_i = g_i^3(\lambda)$ (75) hängt von acht Constanten ab, zu denen noch die Grösse $\alpha$ als neunte hinzutritt. In der That stellen $\Delta = 0$, $\mathsf{E}_i = 0$ nur zwei Bedingungen dar, da sich die vier $\mathsf{E}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ nur um constante Factoren unterscheiden.

Andererseits würde das Verschwinden sämmtlicher erster Minoren, die man aus der Determinante der Form $Q_{\sigma^2}$ bilden kann, *im Allgemeinen drei Bedingungen äquivalent sein*. Es tritt demnach hier eine ähnliche Reduction ein, wie bei den Bézout'schen Resultantendeterminanten.

Zweite Gattung. Die $R_4$ wird zur $R_2 : R_4 = R_2 \,.\, (R_2').$*) Constantenanzahl $= 7$.

Hier löst sich vermöge der Gleichungen:

$$\varrho x_i = f_i(\overset{4}{\lambda}) = h_i(\overset{2}{\lambda})\,(\lambda-\alpha)\,(\lambda-\beta) \tag{84}$$

von der ursprünglichen $R_4$ ein Kegelschnitt*) $R_2'$ ab, und (84) selbst repräsentirt nur noch den verbleibenden Restkegelschnitt $R_2$.

Wir folgern zuvörderst, dass sich die zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Formen aus zwei vollen Potenzen linear componiren: wir dürfen setzen:

$$\alpha_{\lambda'} = (\lambda-\alpha)^4, \quad \beta_{\lambda'} = (\lambda-\beta)^4; \tag{85}$$

dann nimmt die Invariante $\Delta$ die Gestalt an:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 & \beta^4 \end{vmatrix} = 0, \tag{86}$$

es verschwinden also sämmtliche ersten Minoren von $\Delta$.

Wir zeigen nunmehr *umgekehrt*, wie man von der Annahme des Letzteren zu (84) zurückkommt.

Da die für die vorige Gattung nothwendigen Bedingungen hier erfüllt sind, so sind die $f_i(\lambda)$ jedenfalls durch einen Factor $\lambda - \alpha$ theilbar. In der That überzeugt man sich mittelst der Relationen (78) davon, dass die mit unserer Annahme äquivalente Existenz von zwei linearen Dependenzen zwischen den $A_0$, $A_1$, $B_0$, $B_1$ zwei ebensolche zwischen den $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ bewirkt (wenn auch *nicht umgekehrt*, da ja $\Delta = 0$, also die Relationen (78) nicht umkehrbar sind).

---

*) Dass sich hier im Allgemeinen d. h. bei beliebigem Uebergange zum Grenzfalle (84) ein wirklicher, (nicht zerfallender) Kegelschnitt $R_2'$ ablöst, hat bereits Herr Brill in der oben citirten Arbeit (diese Annalen Band XII, pag. 102, Anm.) ausgesprochen.

Es ist bemerkenswerth, dass sowohl die in Rede stehende Gattung, wie die oben unter I behandelte: $R_4 = (R_2)^2$ die gleiche Anzahl (= vier) von unabhängigen Bedingungen erfordern. Dies ist darin begründet, dass in beiden Fällen (und offenbar nur in diesen) eine (in $\lambda$ identische) Relation zweiten Grades zwischen den $f_i(\lambda)$ statthat. Man erhält so neun, in sechs homogenen Unbekannten lineare Gleichungen, und die Elimination jener Grössen führt zu einem System von Bedingungen, das vier unabhängigen Relationen zwischen den Coefficienten der $f_i(\lambda)$ äquivalent ist, und die beiden Möglichkeiten $R_4 = (R_2)^2$, und $R_4 = R_2(R_2')$ vereinigt.

Man beachte noch, dass dieser Abzählungsmodus eine Modification erleidet, wenn sich eine $R_1$ loslöst: $R_4 = R_3(R_1)$: zwischen den analogen dreizehn linearen Gleichungen mit neun homogenen Unbekannten herrschen zwei lineare Identitäten.

Daher verschwinden jedenfalls alle ersten Minoren, die man der Determinante der Form $Q_{\sigma^4}$ entnehmen kann, und es zerfällt die letztere: folglich sind die $f_i(\lambda)$ zunächst vom Typus (75).

Nehmen wir, der Einfachheit wegen, $\alpha = 0$ an (was stets durch die lineare Transformation $\lambda' = \lambda - \alpha$ erreicht wird), so erhalten wir für:

$$v_{\lambda^4} = \alpha_{\lambda^4} - \nu\beta_{\lambda^4} = \lambda^4 - \nu\beta_{\lambda^4} \tag{87}$$

folgendes Aussehen der Determinante $\Delta$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{88}$$

Sollen hier alle ersten Unterdeterminanten gleich Null sein, so ist nur nöthig (und hinreichend), dass für eine gewisse, zweite Form $\beta_{\lambda^4}$ des Büschels (87) gleichzeitig:

$$\begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_0 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{89}$$

oder, es müssen zwei nicht verschwindende Grössen $\beta_3$, $\beta$ existiren, sodass:

$$\beta_3 = \beta_3, \quad \beta_2 = \beta_3\beta, \quad \beta_1 = \beta_3\beta^2, \quad \beta_0 = \beta_3\beta^3. \tag{90}$$

Dies aber erlaubt sofort den Schluss, dass der erste Coefficient $\beta_4$ der Form $\beta_{\lambda^4}$, und damit die letztere selbst (innerhalb der Schaar (87)) stets auf eine und nur auf eine Art so bestimmt werden kann, dass gleichzeitig alle Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} \tag{91}$$

verschwinden, wozu genügt, dass $\beta_4$ so gewählt sein muss, dass:

$$\beta\beta_4 - \beta_3 = 0 \tag{92}$$

oder:

$$\beta_4 = \beta_4, \quad \beta_3 = \beta\beta_4, \quad \beta_2 = \beta^2\beta_4, \quad \beta_1 = \beta^3\beta_4, \quad \beta_0 = \beta^4\beta_4 \text{ i. e.} \tag{93}$$

$$\beta_{\lambda^4} = \beta_4(\lambda - \beta)^4. \tag{93'}$$

Die Bestimmbarkeit von $\beta_4$ gemäss (92) liegt auf der Hand: denn war ursprünglich die Grösse $\beta_4$ so beschaffen, dass (92) noch nicht erfüllt ist, so lässt sich ja in (87) stets $\beta_4$ ersetzen durch $1 - \nu\beta_4$ (während $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ unverändert bleiben), wo dann über $\nu$ in der angegebenen Weise verfügt werden kann.

Das Verfahren dieses Abschnitts bleibt immer ausführbar: doch lässt sich leicht erkennen, wann eventuell entweder die $f_i(\lambda)$ noch

einen dritten Linearfactor $\lambda - \gamma$ gemein haben, oder die $h_i(\overset{2}{\lambda})$ in (84) von der Form $h_i(\overset{1}{\lambda'})$, $\lambda' = \mathsf{P}(\overset{2}{\lambda})$ sind. Will man beide Degenerationen *ausschliessen*, so hat man nur zu fordern, dass nicht zugleich alle Grössen $\Delta_{lmn}$ (7) verschwinden. Wir können somit das Resultat aussprechen:

„*Soll die $R_4$ in eine eigentliche $R_2$ ausarten, dadurch dass sich ein zweiter Kegelschnitt $R_2'$ abspaltet, d. h. sollen die $f_i(\lambda)$ in:*

$$\varrho\, x_i = f_i(\overset{4}{\lambda}) = h_i(\overset{2}{\lambda})\,(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) \tag{84}$$

*einen quadratischen Factor in $\lambda$ gemein haben (so, dass nach Division mit demselben die $f_i(\lambda)$ eigentliche Functionen zweiten Grades von $\lambda$ werden) so ist das Criterium dafür, dass alle ersten Minoren der Determinante $\Delta$ verschwinden, ohne dass dies sämmtliche, aus den Coefficienten der $f_i(\lambda)$ zu bildenden dreireihigen Determinanten thun.*“

Die erzeugende Zerlegung ersten Grades (54) verschwindet jetzt *identisch*, dagegen reduciren sich diejenigen dritten Grades (44), nach Absonderung der beiden Doppelfactoren $(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$, $(\mu-\alpha)(\mu-\beta)$ auf die *einfache* Mannigfaltigkeit der die $R_2$ : $\varrho x_i = h_i(\overset{2}{\lambda})$ erzeugenden $\mathsf{P}_1$ (womit deren *Fundamentalsystem* geliefert ist cf. Reducib. pg. 55).

Diese Reduction der Mannigfaltigkeit correspondirt genau dem Umstande, dass zwischen den linken Seiten $\Omega_i$ (oder auch den $\sigma_i$) der $\mathsf{P}_3$ (26) die evidenten linearen Identitäten gelten:

$$\begin{cases} \Omega_0\alpha^3 - \Omega_1\alpha^2 + \Omega_2\alpha - \Omega_3 = 0, \\ \Omega_0\beta^3 - \Omega_1\beta^2 + \Omega_2\beta - \Omega_3 = 0. \end{cases} \tag{94}$$

Dritte und letzte Gattung. Alle $\Delta_{lmn} = 0$. Constantenanzahl $= 8$.

Die $R_4$ wird zu einer einfach oder mehrfach zählenden Geraden.

Wir charakterisiren die Gesammtheit dieser, überhaupt noch verbleibenden Fälle in doppelter Weise: einmal sind dann immer die $f_i(\lambda)$ linear abhängig, und zugleich immer von der Form:

$$\varrho\, x_i = f_i(\overset{4}{\lambda}) = f_i''(\overset{1}{\lambda''}), \quad \lambda'' = \mathsf{P}''(\overset{4}{\lambda}). \tag{95}$$

Die erstere Behauptung, wie auch ihre Umkehrung, bedarf keines Beweises: wir brauchen also nur klarzumachen, dass sich die beiden angegebenen Criterien völlig decken.

Dies ist in zwei Zeilen erledigt. Sind die $f_i(\lambda)$ vom Typus (95), so müssen sie durch eine lineare Identität (bez. $\lambda$) verknüpft sein, da es die $f_i''(\lambda'')$ bez. $\lambda''$ sind, und alle $\Delta_{lmn}$ (7) sind sicher gleich Null.

Besteht aber umgekehrt eine lineare Dependenz zwischen den $f_i(\lambda)$, (wozu nothwendig und hinreichend ist, dass alle $\Delta_{lmn}$ verschwin-

den), so lassen sich alle Verticalreihen der Coefficienten $a_{ik}$ (1) durch irgend zwei derselben (deren Elemente nicht alle den Werth Null haben) linear und homogen ausdrücken. Sobald man sich dies ausgeführt denkt, gehen die $f_i(\lambda)$ sofort in die Gestalt (95) über.

Die erzeugenden Zerlegungen ersten (54), wie dritten (44) Grades verschwinden sämmtlich *identisch*: das Erstere sagt Nichts Anderes aus, als dass jede $\mathsf{P}_1$ der Ebene als „Erzeugende" der Geraden

$$\varrho x_i = f_i''(\overset{1}{\lambda''}) \tag{95}$$

angesehen werden kann.

Die einzelnen Unterfälle dieser letzten Gattung von uneigentlichen $R_4$ (die bereits als Ausnahmefälle der drei voraufgegangenen Gattungen bemerkt wurden) durch eingehende Separatcriterien zu charakterisiren, ist für den Zweck dieser Abhandlung irrelevant.

Tübingen, den 19. August 1887.

# Partielle Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen und der Perioden derselben.

Von

Ed. Wiltheiss in Halle a./S.

## Einleitung.

Die im 99. Bande des Journals für Mathematik, S. 236, von mir entwickelten Differentialgleichungen zwischen den partiellen Ableitungen der hyperelliptischen Thetafunctionen nach den Argumenten und nach den Parametern habe ich für den einfachsten Fall, für Thetafunctionen mit zwei Argumenten, im 29. Bande (S. 272) der Math. Annalen so umgeformt, dass die sämmtlichen darin vorkommenden Ausdrücke unmittelbar Covarianten, oder Theile von Covarianten sind, oder sonst mit der Invariantentheorie in engster Verbindung stehen. Die entsprechende Form der Differentialgleichungen will ich nun hier für die hyperelliptischen Thetafunctionen mit $\varrho$ Argumenten aufstellen, und zwar soll dies auf directem Wege geschehen, ohne dass ich dazu, wie ich es in dem erwähnten Aufsatze für $\varrho = 2$ gethan habe, die schon im Journal für Mathematik entwickelten Differentialgleichungen benutze. Dabei werde ich auch ein anderes Verfahren einschlagen als in dem ersten Aufsatze im Journal für Mathematik. Denn dort kam es mir in erster Linie darauf an, dass in der ganzen Hauptentwicklung nur von der Definition der Thetafunction durch die Normalintegrale zweiter Gattung (und der Thatsache, dass dieser Definition wirklich durch eine analytische Function genügt wird), und sonst von keiner Eigenschaft der Thetafunction Gebrauch gemacht wurde, während ich hier nur auf die *Form* und *Zusammensetzung* der in den Differentialgleichungen vorkommenden Ausdrücke Gewicht lege. Demgemäss will ich mich hier nicht auf die Definition der Thetafunction allein beschränken, sondern auch die Haupteigenschaften derselben als bekannt voraussetzen und in die Entwicklung mit hineinziehen. Ich werde zuerst die Differentialgleichungen der Perioden der Normalintegrale

erster und zweiter Gattung aufstellen, — es sind dies die Gleichungen (A), (B), (C) und (D) —, und dann gelange ich mit ihrer Hilfe zu den Differentialgleichungen der Thetafunctionen selbst, indem ich zu deren Definition die Veränderungen benutze, die sie erleiden, wenn man die Argumente um Systeme von Perioden vermehrt.

## § 1.

## Bezeichnungen und Definitionen.

Zuerst müssen einige Bezeichnungen und Bezeichnungsweisen für die folgenden Entwicklungen eingeführt werden.

Die ganzen Functionen sollen, da hier grosser Nachdruck auf die Invarianteneigenschaft der vorkommenden Ausdrücke gelegt wird, als homogen in den Variablen betrachtet werden. Ich werde jedoch fast überall nur die eine, die erste, der Variablen schreiben, theils der Kürze halber, theils mit Rücksicht auf die im folgenden vorkommenden Differentiationen und Integrationen.

Wenn Ableitungen nach den Variablen $x_1$ und $x_2$ gebildet werden, so soll dies durch angefügte Indices ausgedrückt werden, jedoch der Art, dass die mit dem Index versehene Function nicht die Ableitung selbst, sondern dieselbe dividirt durch die Dimension der ursprünglichen Function in den $x$ bedeutet: wenn $\mu$ die Dimension von $g(x_1, x_2)$ in den $x$ ist, so soll

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \mu g_{10}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = \mu g_{01}$$

sein. Und entsprechend sei auch die Bezeichnung bei den höheren Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \mu(\mu - 1) g_{20}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = \mu(\mu - 1) g_{11}, \cdots,$$

überhaupt sei

$$\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x_1} = p g_{\varkappa+1,\lambda}, \quad \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x_2} = p g_{\varkappa,\lambda+1},$$

wenn $p$ die Dimension von $g_{\varkappa\lambda}$ in den $x$ ist. Man hat bei dieser Bezeichnung den Vortheil, dass die Polaren von $g$ unmittelbar die folgenden Ausdrücke sind:

$$y_1 g_{10}(x) + y_2 g_{01}(x),$$
$$y_1^2 g_{20}(x) + 2 y_1 y_2 g_{11}(x) + y_2^2 g_{02}(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und dass

$$\begin{aligned} g(x) &= x_1 g_{10}(x) + x_2 g_{01}(x) \\ &= x_1^2 g_{20}(x) + 2 x_1 x_2 g_{11}(x) + x_2^2 g_{02}(x) \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1}$$

ist. — Die Differentiationen nach anderen Variablen sollen durch Differentiationszeichen ausgedrückt werden. —

Was nun das hyperelliptische Gebilde anbelangt, so will ich die $2\varrho + 2$ singulären Punkte (Verzweigungspunkte) sämmtlich im Endlichen annehmen, so dass der Radicand der in den Integralen befindlichen Wurzelgrösse

$$y^2 = f(x) = A_{2\varrho+2} \prod_{\lambda=1}^{2\varrho+2} (x - a_\lambda) = \sum_{\varkappa=0}^{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{\varkappa} A_\varkappa x^\varkappa$$

ist. In den $\varrho$ Normalintegralen erster Gattung

$$\int \frac{H(x)_\alpha}{2y}\, dx, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

sei

$$H(x)_\alpha = (-x)^{\alpha-1},$$

und in den $\varrho$ Normalintegralen zweiter Gattung

$$\int \frac{G(x)_\alpha}{2y}\, dx, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

sollen die ganzen Functionen $G(x)_\alpha$, die im allgemeinen noch eine Anzahl willkürlicher Constanten enthalten, hier dadurch vollkommen bestimmt sein, dass identisch

$$\frac{1}{2y} \sum_\alpha H(s)_\alpha G(x)_\alpha = \frac{-f(x|s)}{(x-s)^2 y} - \frac{d}{dx}\frac{y}{x-s} \tag{2}$$

ist, wo

$$f(x|s) \tag{3}$$

die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Polare von $f(x)$ unter Einführung der neuen, willkürlichen Variablen $s_1$, $s_2$ ist. Die Summation über $\alpha$ ist hier, wie überall im folgenden, wo die Summe oder das Product über diesen Buchstaben oder über $\beta, \gamma, \delta$ gebildet wird, von 1 bis $\varrho$ auszuführen.

Diese $\varrho$ Integrale erster, bez. zweiter Gattung will ich je in ein einziges Integral zusammenfassen. Bei den Integralen zweiter Gattung ergiebt sich die Art und Weise, wie dies am vortheilhaftesten geschieht, unmittelbar aus der Gleichung (2), welche die Functionen $G(x)_\alpha$ bestimmt: man hat dieselbe nur mit $dx$ zu multipliciren und zu integriren:

$$\sum_\alpha (-s)^{\alpha-1} \int \frac{G(x)_\alpha}{2y}\, dx = \int \frac{-f(x|s)}{(x-s)^2 y}\, dx - \frac{y}{x-s}. \tag{4}$$

Die Zusammenfassung der Integrale erster Gattung geschieht dadurch, dass man dieselben mit $\binom{\varrho-1}{\alpha-1} t^{\varrho-\alpha}$, wo $t$, wie oben $s$, eine neue willkürliche Variable ist, multiplicirt und addirt; wenn man dann

$$(5) \qquad \sum_{\alpha} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} (-x)^{\alpha-1} t^{\varrho-\alpha} = (t-x)^{\varrho-1} = \pi(x)$$

bezeichnet, so ist

$$(6) \qquad \sum_{\alpha} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} t^{\varrho-\alpha} \int \frac{H(x)_\alpha}{2y}\, dx = \int \frac{\pi(x)}{2y}\, dx.$$

Denkt man sich hierin die rechte Seite in homogenen Variablen geschrieben, so ist dieselbe eine Covariante der beiden Reihen cogredienter Variablen $x_1, x_2$ und $t_1, t_2$; und diese Gleichung lehrt daher, dass sich die Integrale erster Gattung bei der linearen Transformation der Variablen $x_1, x_2$ so ändern wie die Coefficienten einer Covariante $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. —*)

*) Ein entsprechendes Verhalten bei den Integralen zweiter Gattung kann man, wie es schon durch F. Klein in seinen Vorlesungen geschehen ist, dadurch erreichen, dass man

$$\frac{(-1)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!\,(\varrho-\alpha)!} \int \frac{\partial^{\varrho-1}}{\partial s_1^{\alpha-1}\, \partial s_2^{\varrho-\alpha}} \left( \frac{-f(x|s)}{(s_2x-s_1)^2} \right) \frac{dx}{y} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho)$$

als die Normalintegrale annimmt. Dieselben unterscheiden sich nämlich nur um einen rationalen Ausdruck von $\int G(x)_\alpha \frac{dx}{2y}$; denn schreibt man die Gleichung (4) homogen in den Variablen $s_1, s_2$:

$$(a) \qquad \sum_{\alpha} (-s_1)^{\alpha-1} s_2^{\varrho-\alpha} \int \frac{G(x)_\alpha}{2y}\, dx = \int \frac{-f(x|s)}{(s_2x-s_1)^2\, y}\, dx - \frac{y s_2^{\varrho}}{s_2x-s_1},$$

und differentiirt dieselben, so findet man:

$$\int \frac{G(x)_\alpha}{2y}\, dx = \frac{(-1)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!\,(\varrho-\alpha)!} \int \frac{\partial^{\varrho-1}}{\partial s_1^{\alpha-1}\, \partial s_2^{\varrho-\alpha}} \left( \frac{-f(x|s)}{(s_2x-s_1)^2} \right) \frac{dx}{y}$$
$$- \frac{(-1)^{\alpha-1} y}{(\alpha-1)!\,(\varrho-\alpha)!} \frac{\partial^{\varrho-1}}{\partial s_1^{\alpha-1}\, \partial s_2^{\varrho-\alpha}} \left( \frac{s_2^{\varrho}}{s_2x-s_1} \right).$$

Den Ausdruck von $\int \frac{-f(x|s)}{(t_2x-t_1)^2} \frac{dx}{y}$ durch diese Normalintegrale erhält man, indem man die $(\varrho-1)^{\text{te}}$ Polare der Gleichung (a) unter Einführung der Variablen $t_1, t_2$ bildet, und die linke Seite durch das in Frage stehende Integral ersetzt:

$$\int \frac{-f(x|s)}{(t_2x-t_1)^2\, y}\, dx$$
$$= \sum_{\alpha} \frac{t_1^{\alpha-1}\, t_2^{\varrho-\alpha}}{(\alpha-1)!\,(\varrho-\alpha)!} \int \frac{\partial^{\varrho-1}}{\partial s_1^{\alpha-1}\, \partial s_2^{\varrho-\alpha}} \left( \frac{-f(x|s)}{(s_2x-s_1)^2} \right) \frac{dx}{y}$$
$$+ \frac{(t_1s_2 - t_2s_1)^{\varrho}}{(s_2x-s_1)^{\varrho}\,(t_2x-t_1)}\, y.$$

Diese Gleichung zeigt insbesondere auch das invariante Verhalten dieser Normalintegrale.

Um nun die zu dem hyperelliptischen Gebilde gehörenden Thetafunctionen herzustellen, muss man auf $2\varrho$ bestimmten Integrationswegen $2\varrho$ Systeme von Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung:

$$(7)\qquad \begin{matrix} 2\omega_{1\beta},\ 2\omega_{2\beta},\ \ldots,\ 2\omega_{\varrho\beta}, \\ 2\omega'_{1\beta},\ 2\omega'_{2\beta},\ \ldots,\ 2\omega'_{\varrho\beta}, \end{matrix} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

resp.

$$\begin{matrix} 2\eta_{1\beta},\ 2\eta_{2\beta},\ \ldots,\ 2\eta_{\varrho\beta}, \\ 2\eta'_{1\beta},\ 2\eta'_{2\beta},\ \ldots,\ 2\eta'_{\varrho\beta}, \end{matrix} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

bestimmen, wobei der erste Index der Periode das Normalintegral, das integrirt wurde, und der zweite Index den Integrationsweg angiebt, auf dem die Integration ausgeführt wurde. Alsdann setzt man die Determinante

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1\varrho} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots & \omega_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{\varrho 1} & \omega_{\varrho 2} & \ldots & \omega_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} = \omega,$$

und bezeichnet mit $(\omega)_{\alpha\beta}$ die adjungirte Subdeterminante von $\omega_{\alpha\beta}$; jetzt ist, wenn man

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\sum_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\alpha\gamma}(\omega)_{\beta\gamma} u_\alpha u_\beta = \eta(u), \\ \dfrac{\pi i}{\omega}\displaystyle\sum_{\alpha\beta} (\omega)_{\alpha\beta} r_\beta u_\alpha + \dfrac{\pi i}{\omega}\sum_{\alpha\beta\gamma} \omega'_{\gamma\alpha}(\omega)_{\gamma\beta} r_\alpha r_\beta = \chi(u, r), \end{cases}$$

(wobei, wie schon oben bemerkt, über $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ je von 1 bis $\varrho$ zu summiren ist,) annimmt:

$$(10)\qquad e^{\eta(u)} \sum_r e^{\chi(u,r)} = \Theta(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)$$

— die Summationsbuchstaben $r_1, r_2, \ldots, r_\varrho$ haben je alle ganzen, positiven und negativen Zahlen zu durchlaufen — die Fundamentalthetafunction, aus der die übrigen Thetafunctionen $\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_p$ durch Vermehrung der Argumente um Systeme von halben Perioden entstehen. —

Da in den Entwicklungen der beiden folgenden Paragraphen die Integrationswege, auf welchen eine Periode bestimmt wurde, nicht in Betracht kommen, will ich in denselben an den Perioden den zweiten Index, welcher den Integrationsweg angiebt, weglassen und also unter $2\omega_\alpha$, bez. $2\eta_\alpha$ irgend eine Periode des betreff. Integrals erster, bez. zweiter Gattung (d. i. ein $2\omega_{\alpha\beta}$ od. $2\omega'_{\alpha\beta}$, bez. ein $2\eta_{\alpha\beta}$ od. $2\eta'_{\alpha\beta}$,) verstehen.

## § 2.

## Erste Gruppe der Differentialgleichungen der Perioden.

Die vier partiellen Differentialgleichungen der Perioden $2\omega_\alpha$ und $2\eta_\alpha$, welche sich auf die Invarianteneigenschaft dieser Grössen beziehen, lassen sich nun leicht aufstellen.

Führt man nämlich zur augenblicklichen Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$A_{2\varrho+2}\frac{\partial g}{\partial A_{2\varrho+1}}+\quad 2A_{2\varrho+1}\frac{\partial g}{\partial A_{2\varrho}}+\cdots+(2\varrho+2)A_1\frac{\partial g}{\partial A_0}=\varepsilon g,$$

$$(2\varrho+2)A_{2\varrho+2}\frac{\partial g}{\partial A_{2\varrho+2}}+(2\varrho+1)A_{2\varrho+1}\frac{\partial g}{\partial A_{2\varrho+1}}+\cdots+\quad A_1\frac{\partial g}{\partial A_1}=\zeta g,$$

so ist, wie unmittelbar ersichtlich,

$$\begin{aligned}
\varepsilon f(x) &= (2\varrho+2)f_{10}(x),\\
\varepsilon f(x|s) &= (\varrho+1)f_{10}(x|s)+\frac{\partial}{\partial s}f(x|s),\\
\zeta f(x) &= (2\varrho+2)xf_{10}(x),\\
\zeta f(x|s) &= (\varrho+1)xf_{10}(x|s)+s\frac{\partial}{\partial s}f(x|s),
\end{aligned}$$

und man überzeugt sich jetzt leicht, durch einfaches Ausführen der Differentiationen und der Operationen $\varepsilon$ und $\zeta$ von der Richtigkeit der Identitäten

$$(11)\quad\begin{cases}
\varepsilon\dfrac{\pi(x)}{2y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\pi(x)}{2y}\right)=\displaystyle\sum_\alpha\binom{\varrho-1}{\alpha-1}\frac{(\alpha-1)H(x)_{\alpha-1}}{2y}t^{\varrho-\alpha},\\
\varepsilon\dfrac{-f(x|s)}{(x-s)^2y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-f(x|s)}{(x-s)^2y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{-f(x|s)}{(x-s)^2y}\right),\\
\zeta\dfrac{\pi(x)}{2y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x\pi(x)}{2y}\right)=-\displaystyle\sum_\alpha\binom{\varrho-1}{\alpha-1}\frac{\alpha H(x)_{\alpha-1}}{2y}t^{\varrho-\alpha},\\
\zeta\dfrac{-f(x|s)}{(x-s)^2y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-xf(x|s)}{(x-s)^2y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{-sf(x|s)}{(x-s)^2y}\right).
\end{cases}$$

Beide Seiten jeder dieser Gleichungen multiplicire ich mit $dx$ und integrire sie auf einem geschlossenen Integrationsweg. Da das Ergebniss einer solchen Integration bei den Normalintegralen erster und zweiter Gattung die Perioden $2\omega_\alpha$ und $2\eta_\alpha$ sind, so findet man, wenn man die Gleichungen (4) und (6) mit in Betracht zieht:

$$(12)\quad \begin{cases} \varepsilon \sum_\alpha \binom{\varrho-1}{\alpha-1} 2\omega_\alpha t^{\varrho-\alpha} = \sum_\alpha \binom{\varrho-1}{\alpha-1} (\alpha-1)\, 2\omega_{\alpha-1} t^{\varrho-\alpha}, \\ \varepsilon \sum_\alpha 2\eta_\alpha (-s)^{\alpha-1} = \frac{\partial}{\partial s} \sum_\alpha 2\eta_\alpha (-s)^{\alpha-1} \\ \qquad\qquad = -\sum_\alpha (\alpha-1)\, 2\eta_\alpha (-s)^{\alpha-2}, \\ \zeta \sum_\alpha \binom{\varrho-1}{\alpha-1} 2\omega_\alpha t^{\varrho-\alpha} = -\sum_\alpha \binom{\varrho-1}{\alpha-1} \alpha 2\omega_\alpha t^{\varrho-\alpha}, \\ \zeta \sum_\alpha 2\eta_\alpha (-s)^{\alpha-1} = \frac{\partial}{\partial s} \sum_\alpha 2\eta_\alpha s\cdot(-s)^{\alpha-1} \\ \qquad\qquad = \sum_\alpha \alpha 2\eta_\alpha (-s)^{\alpha-1}. \end{cases}$$

Die Variablen $s$ und $t$ in diesen Gleichungen sind ganz beliebig, wie schon oben hervorgehoben wurde; es müssen daher die Coefficienten gleich hoher Potenzen dieser Variablen auf beiden Seiten einander gleich sein. Dieser Umstand liefert die Differentialgleichungen für die Perioden selbst:

$$\begin{gathered} \varepsilon\omega_\alpha = (\alpha-1)\,\omega_{\alpha-1}, \\ \varepsilon\eta_i = -i\eta_{i+1}, \quad \varepsilon\eta_\varrho = 0, \\ \zeta\omega_\alpha = -\alpha\omega_\alpha, \\ \zeta\eta_\alpha = \quad \alpha\eta_\alpha, \end{gathered}$$

oder wenn man für die Operationszeichen $\varepsilon$ und $\zeta$ die Differentialausdrücke selbst einsetzt:

$$(A)\quad \begin{cases} \sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda)\, A_\lambda \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial A_{\lambda-1}} = (\alpha-1)\omega_{\alpha-1}, \\ \sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda)\, A_\lambda \frac{\partial\eta_i}{\partial A_{\lambda-1}} = -i\eta_{i+1}, \\ \sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda)\, A_\lambda \frac{\partial\eta_\varrho}{\partial A_{\lambda-1}} = 0, \\ \sum_\lambda \lambda A_\lambda \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial A_\lambda} = -\alpha\omega_\alpha, \\ \sum_\lambda \lambda A_\lambda \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial A_\lambda} = \quad \alpha\eta_\alpha, \end{cases}$$

wo $\alpha$ einen der Werthe $1,2,\ldots,\varrho$, $i$ einen der Werthe $1,2,\ldots,\varrho-1$ bedeutet und die Summation über $\lambda$ in jeder dieser Gleichung von 1 bis $2\varrho+2$ auszuführen ist.

Die vier zugehörigen, entsprechenden Gleichungen erhält man aus der Thatsache, dass die, durch Integration auf einem geschlossenen Wege aus (4) und (6) hervorgehenden Gleichungen

$$\sum_{\alpha} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} 2\omega_\alpha t^{\varrho-\alpha} = \int \frac{\pi(x)}{2y}\, dx,$$

$$\sum_{\alpha} 2\eta_\alpha (-s)^{\alpha-1} \qquad = \int \frac{-f(x|s)}{(x-s)^2 y}\, dx,$$

wenn man sie homogen in den Variablen macht, ungeändert bleiben bei den gegenseitigen Vertauschungen von $x_1$ und $x_2$, $s_1$ und $s_2$, $t_1$ und $t_2$, $A_\lambda$ und $A_{2\varrho+2-\lambda}$, $\omega_\alpha$ und $(-1)^\varrho \omega_{\varrho+1-\alpha}$ und $\eta_\alpha$ und $(-1)^\varrho \eta_{\varrho+1-\alpha}$; es muss dies also auch mit allen Gleichungen der Fall sein, welche Folgerungen aus diesen beiden Gleichungen sind, insbesondere mit dem Gleichungssystem (A). Man findet auf diese Weise:

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial A_\lambda} = (\varrho-\alpha)\,\omega_{\alpha+1}, \\ \displaystyle\sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1} \frac{\partial \eta_{i+1}}{\partial A_\lambda} = -(\varrho-i)\,\eta_i, \quad \sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1} \frac{\partial \eta_1}{\partial A_\lambda} = 0, \\ \displaystyle\sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda) A_{\lambda-1} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial A_{\lambda-1}} = -(\varrho-\alpha+1)\,\omega_\alpha, \\ \displaystyle\sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda) A_{\lambda-1} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial A_{\lambda-1}} = \quad (\varrho-\alpha+1)\,\eta_\alpha, \end{array} \right.$$

wo $\lambda$, $\alpha$ und $i$ dieselbe Bedeutung wie in dem System (A) haben.

*Diese beiden Systeme,* (A) *und* (B), *von Differentialgleichungen sind diejenigen, die ich in diesem Paragraphen aufstellen wollte.* —

An dieser Stelle möchte ich noch $\varepsilon\omega$ und $\zeta\omega$ bestimmen.

Aus der Bedeutung des Operationszeichens $\varepsilon$ folgt, dass wenn man diese Operation an einer Determinante auszuführen hat, man die Summe der Determinanten bilden muss, die entstehen, wenn man die Operation $\varepsilon$ je an einer Zeile oder Colonne ausführt. Bezeichnet man die Determinante (8) in der Weise:

$$\omega = |\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}|,$$

so ist

$$\varepsilon\omega = |\varepsilon\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + |\omega_{1\beta}, \varepsilon\omega_{2\beta}, \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + |\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, \varepsilon\omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + \cdots,$$

oder, da $\omega_\alpha$ irgend ein $\omega_{\alpha\beta}$ bedeutet, also $\varepsilon\omega_{\alpha\beta} = (\alpha-1)\,\omega_{\alpha-1,\beta}$ ist:

$$\varepsilon\omega = |0, \omega_{2\beta}, \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + |\omega_{1\beta}, \omega_{1\beta}, \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}) + |\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, 2\omega_{2\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + \cdots,$$

und hieraus folgt, da jede dieser Determinanten den Werth Null hat, dass $\varepsilon\omega = 0$ ist, oder:

$$(13) \qquad \sum_{\lambda} (2\varrho + 3 - \lambda)\, A_\lambda \frac{\partial \omega}{\partial A_{\lambda-1}} = 0.$$

Ebenso findet man

$$(14) \qquad \sum_{\lambda} \lambda A_{\lambda-1} \frac{\partial \omega}{\partial A_\lambda} = 0. -$$

In analoger Weise erhält man auch den Ausdruck für $\zeta\omega$. Es ist

$$\begin{aligned}
\zeta\omega &= |\ \zeta\omega_{1\beta},\ \omega_{2\beta},\ \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + |\omega_{1\beta},\ \zeta\omega_{2\beta},\ \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| \\
&+ |\ \omega_{1\beta},\ \omega_{2\beta},\ \zeta\omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + \cdots \\
&= |-\omega_{1\beta},\ \omega_{2\beta},\ \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + |\omega_{1\beta}, -2\omega_{2\beta},\ \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| \\
&+ |\ \omega_{1\beta},\ \omega_{2\beta}, -3\omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + \cdots \\
&= -\omega - 2\omega - 3\omega - \cdots \qquad = -\tfrac{1}{2}\varrho(\varrho+1)\,\omega;
\end{aligned}$$

mithin ist

$$(15) \qquad \sum_{\lambda} \lambda A_\lambda \frac{\partial \omega}{\partial A_\lambda} = -\tfrac{1}{2}\varrho(\varrho+1)\,\omega.$$

Und hierzu tritt noch die entsprechende Gleichung

$$(16) \qquad \sum_{\lambda} (2\varrho + 3 - \lambda)\, A_{\lambda-1} \frac{\partial \omega}{\partial A_{\lambda-1}} = -\tfrac{1}{2}\varrho(\varrho+1)\,\omega. -$$

## 3.

## Zweite Gruppe der Differentialgleichungen der Perioden.

Die übrigen $2\varrho - 1$ Differentialgleichungen für jede der Perioden will ich zusammen auf einmal entwickeln.

Die Differentiation nach den Constanten in denselben wird in der Form eines Aronhold'schen Processes geschehen, d. h. es werden die Perioden nach den Coefficienten $A_\mu$ von $f(x)$ differentiirt, die Ableitungen mit den entsprechenden Coefficienten einer Covariante

$$\overset{t}{\varphi} = \sum_{\mu=0}^{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{\mu} \varphi_\mu x^\mu$$

multiplicirt und die sämmtlichen Producte addirt. Diesen Process will ich mit $\delta$ bezeichnen:

$$\sum_{\mu} \varphi_\mu \frac{\partial g}{\partial A_\mu} = \delta g,$$

wo $g$ irgend eine Function der $A_\mu$ ist.

Die Covariante $\varphi(x)$ selbst wird in der folgenden Weise hergestellt: ich bilde die $(2\varrho-1)^{\text{te}}$ Polare von $f(x)$ unter Einführung der neuen, vollkommen unabhängigen Variablen $v_1$, $v_2$ und bezeichne dieselbe mit $\psi(x)$; dann ist

$$\varphi(x) = \frac{\psi_{01}(x) f_{10}(x) - \psi_{10}(x) f_{01}(x)}{x - v} \tag{17}$$

die betreffende Covariante. Da der Zähler $\psi_{01}(x) f_{10}(x) - \psi_{10}(x) f_{01}(x)$ für $x = v$ verschwindet, so ist $\varphi(x)$ thatsächlich eine ganze Function; sie enthält in ihren Coefficienten noch die Variable $v$ in der $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Potenz.

Um jetzt die Differentialgleichungen für die Perioden der Normalintegrale erster Gattung abzuleiten, gehe ich von $\delta \frac{\pi(x)}{2y}$ aus. Da

$$\delta f(x) = \varphi(x)$$

ist, so folgt durch Ausführen der Differentiation und der Operation $\delta$, indem ich die Relation zwischen einer homogenen Function und ihren beiden Ableitungen (vergl. (1)) berücksichtige, die Richtigkeit der Gleichung

$$\delta \frac{\pi(x)}{2y} - \frac{1}{2\varrho+2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi(x)\,\psi(x)}{(x-v)\,2y}\right) = \frac{-1}{2\varrho+2} \cdot \frac{K(x)}{2y} + \frac{\pi(v)}{2\varrho+2} \cdot \frac{f(x|v)}{2(x-v)^2\, y},$$

wo

$$K(x) = [\pi(v) f(x|v) - \pi(x)\{v\psi_{10}(x) + \psi_{01}(x)\} - (\varrho-1)(t-x)^{\varrho-2}\{t\psi_{10}(x) + \psi_{01}(x)\}(x-v)] : (x-v)^2 \tag{18}$$

(da die eckige Klammer selbst wie ihre Ableitung nach $x$ für $x = v$ verschwindet,) eine ganze Function von $x$ vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, die $t$ ebenfalls im $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade und ausserdem noch $v$ enthält; man kann daher

$$K(x) = \sum_{\alpha\beta} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} k_{\beta\alpha} (-x)^{\beta-1} t^{\varrho-\alpha} \tag{19}$$

setzen. Integrirt man jetzt nach einer Multiplication mit $dx$ auf einem geschlossenen Integrationsweg, so erhält man, analog wie oben bei den Gleichungen (11)

$$\delta \sum_{\alpha} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} 2\omega_\alpha t^{\varrho-\alpha} = \frac{-1}{2\varrho+2} \sum_{\alpha\beta} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} k_{\beta\alpha} 2\omega_\beta t^{\varrho-\alpha} - \frac{1}{2\varrho+2} \sum_{\alpha\beta} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} (-v)^{\alpha+\beta-2} \eta_\beta t^{\varrho-\alpha}$$

und, da $t$ beliebig ist, also die Coefficienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten einander gleich sind, so folgt hieraus

$$\text{(C)} \qquad \delta\omega_\alpha = \frac{-1}{2\varrho+2} \sum_{\beta} k_{\beta\alpha}\omega_\beta - \frac{1}{4\varrho+4} \sum_{\beta} (-v)^{\alpha+\beta-2} \eta_\beta.$$

*Dies ist die gesuchte Differentialgleichung für die Perioden der Normalintegrale erster Gattung. Die Grössen $k_{\alpha\beta}$ in denselben sind durch die Gleichungen* (17), (18) *und* (19) *definirt.* Da $\varphi(x)$ wie die $k_{\alpha\beta}$ die ganz unabhängige Variable $v$ in der $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Potenz enthalten, so sind *in jeder dieser Gleichungen im Grunde* $2\varrho-1$ *verschiedene Gleichungen zusammengefasst.*

Die Function $K(x)$ ist, wie aus ihrer Definition hervorgeht, für $\varrho = 1$ und 2 identisch Null, und für $\varrho = 3$ gleich

$$D^2\Delta^4 f(x),$$

wo $D$, bez. $\Delta$ die Polarenbildung unter Einführung der Variablen $t_1, t_2$, bez. $v_1, v_2$ bedeutet. Das erstere folgt übrigens ohne Rechnung schon aus dem Umstande, dass $K(x)$ zu Folge seines Ausdrucks (18) eine Covariante von $f(x)$ darstellt, welche in den $A_\lambda$ linear ist, aber für $\varrho = 1$ die Variablen $x, t, v$ zusammen in der nullten, für $\varrho = 2$ nur in der vierten Dimension enthält. —

Die entsprechenden Differentialgleichungen für die Perioden der Normalintegrale zweiter Gattung aufzustellen, ist mit etwas mehr Schwierigkeiten verknüpft. Zuerst folgt aus der Bedeutung von $\delta$, dass, wenn man die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Polare von $\varphi(x)$ bei Einführung der Variablen $s_1, s_2$ mit

$$\varphi(x\,|\,s)$$

bezeichnet, und

$$-2\varphi(x|s)f(x) + \varphi(x)f(x|s) = \Phi(x)$$

setzt:

$$\delta\,\frac{-f(x|s)}{(x-s)^2 y} = \frac{\Phi(x)}{(x-s)^2 2y^3} \tag{20}$$

ist. Es handelt sich jetzt darum, die rechte Seite so zu zerlegen, dass bei der Integration unmittelbar die Normalintegrale auftreten. Dies gelingt mir aber nur durch einen Kunstgriff. Dazu ist es aber nothwendig, eine Anzahl neuer Bezeichnungen einzuführen, von denen die eine:

$$\frac{\psi_{01}(x)f_{10}(x|s) - \psi_{10}(x)f_{01}(x|s)}{x-v} = \overline{\varphi}(x|s) \tag{21}$$

eine dauernde ist, während die übrigen nur zur augenblicklichen Abkürzung dienen:

$$\frac{2\varrho+2}{(x-s)^2 f(x)}\{f(x|\xi)\overline{\varphi}(x|s) + f(x)\overline{\varphi}(s\,|\,\xi) - 2f(x|\,\xi)\,\varphi(x|s)\}$$
$$+ 2\,\frac{f(v|s)f(v|\xi) - f(s|\xi)f(v)}{(x-v)^2(s-v)^2} = L(x|\xi),$$
$$-2f(x|\xi)\,\varphi(x|s) + f(x|s)\,\overline{\varphi}(x|\xi) = \Phi(x|\xi),$$
$$\frac{f(x|s)f(x|\xi) - f(\xi|s)f(x)}{x-v}\left(\frac{v\psi_{10}(x)+\psi_{01}(x)}{x-v} + 2\,\frac{s\psi_{10}(x)+\psi_{01}(x)}{x-s}\right) = M(x|\xi).$$

Die Umformung der rechten Seite der Gleichung (20) geschieht nun dadurch, dass ich dieselbe mit $2f(x\,|\,\xi):y$, wo $\xi$ eine unabhängige Variable ist, multiplicire, alsdann in Partialbrüche zerlege und die Glieder, welche im Nenner $x-a_\lambda$ und $x-s$ nur auf der ersten Potenz enthalten, wieder in einen Ausdruck zusammenziehe. Ich komme dadurch zu der folgenden Gleichung:

$$(22)\quad \frac{\Phi(x)\,f(x|\xi)}{(x-s)^2 f^2(x)} + \frac{f(s|\xi)\,\varphi(s)}{f(s)}\cdot\frac{1}{(x-s)^2} - \sum_{\lambda=1}^{2\varrho+2}\frac{f(a_\lambda|s)\,f(a_\lambda|\xi)\,\psi(a_\lambda)}{4(\varrho+1)^2(a_\lambda-s)^2(a_\lambda-v)f_{10}(a_\lambda)}\cdot\frac{1}{(x-a_\lambda)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{L(x|\xi)}{2\varrho+2} + \frac{1}{2(x-s)f(x)}\left[\Phi(x|\xi) + \frac{f(x)}{f(s)}f(s|\xi)\,\varphi(s) - M(x|\xi)\right],$$

wo also die Richtigkeit dadurch nachgewiesen wird, dass man beide Seiten in Partialbrüche zerlegt, denn diese Zerlegung wird bei passender Umformung auf beiden Seiten die gleiche sein. Hierin lasse ich nun $\xi$ in $x$ übergehen: dann verschwindet $M(x|\xi)$, $\Phi(x|\xi)$ verwandelt sich in $\Phi(x)$ und $L(x|\xi)$ wird gleich

$$(23)\quad L(x) = \frac{2\varrho+2}{(x-s)^2}\left\{\bar{\varphi}(x|s) + \bar{\varphi}(s|x) - 2\varphi(x|s)\right\} + 2\,\frac{f(v|s)\,f(x|v) - f(x|s)\,f(v)}{(x-v)^2(s-v)^2},$$

so dass die Gleichung (22) die Form annimmt:

$$\frac{\Phi(x)}{(x-s)^2 f(x)} + \frac{\varphi(s)}{f(s)}\cdot\frac{f(x|s)}{(x-s)^2} - \sum_\lambda \frac{f(a_\lambda|s)\,\psi(a_\lambda)}{2(\varrho+1)^2(a_\lambda-s)^2(a_\lambda-v)f_{10}(a_\lambda)}\cdot\frac{f(x|a_\lambda)}{(x-a_\lambda)^2} = \frac{L(x)}{2\varrho+2}.$$

Und damit hat man die gesuchte Zerlegung von $\frac{\Phi(x)}{(x-s)^2(x)}$ gefunden. Dieselbe muss man jetzt in der Gleichung (20) einsetzen; man erhält:

$$\delta\,\frac{-f(x|s)}{(x-s)^2 y} = \frac{1}{2\varrho+2}\cdot\frac{L(x)}{2y} - \frac{\varphi(s)}{2f(s)}\cdot\frac{f(x|s)}{(x-s)^2 y} + \sum_\lambda \frac{f(a_\lambda|s)\,\psi(a_\lambda)}{4(\varrho+1)^2(a_\lambda-s)^2(a_\lambda-v)f_{10}(a_\lambda)}\cdot\frac{f(x|a_\lambda)}{(x-a_\lambda)^2 y}.$$

Der Ausdruck von $L(x)$ ist, wie man sich leicht überzeugt, eine ganze Function der Variablen und zwar ist derselbe in $x$ und $s$ symmetrisch und vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade; man kann also

$$(24)\quad L(x) = \sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}(-x)^{\beta-1}(-s)^{\alpha-1}$$

setzen, wo

$$(25)\quad l_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha}.$$

Demgemäss wird

$$\delta\frac{-f(x|s)}{(x-s)^2y}=\frac{1}{2\varrho+2}\sum_{\alpha\beta}l_{\alpha\beta}\frac{H(x)_\beta}{2y}(-s)^{\alpha-1}-\frac{\varphi(s)}{2f(s)}\cdot\frac{f(x|s)}{(x-s)^2y}$$
$$+\sum_\lambda\frac{f(a_\lambda|s)\psi(a_\lambda)}{4(\varrho+1)^2(a_\lambda-s)^2(a_\lambda-v)f_{10}(a_\lambda)}\cdot\frac{f(x|a_\lambda)}{(x-a_\lambda)^2y}.$$

Diese Gleichung integrire ich nach einer Multiplication mit $dx$ auf einem geschlossenen Integrationsweg und finde

$$\delta\sum_\alpha 2\eta_\alpha(-s)^{\alpha-1}=\frac{1}{2\varrho+2}\sum_{\alpha\beta}l_{\alpha\beta}2\omega_\beta(-s)^{\alpha-1}+\sum_\beta\Big(\frac{\psi(s)}{2f(s)}(-s)^{\beta-1}$$
$$-\sum_\lambda\frac{f(a_\lambda|s)\psi(a_\lambda)}{4(\varrho+1)^2(a_\lambda-s)^2(a_\lambda-v)f_{10}(a_\lambda)}(-a_\lambda)^{\beta-1}\Big)2\eta_\beta.$$

Der Coefficient von $2\eta_\beta$ muss, da die übrigen Glieder ganze Functionen von $s$ sind, und $s$ eine ganz beliebige Variable ist, ebenfalls eine ganze Function von $s$ und zwar vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade sein; man kann ihn daher gleich

$$\frac{1}{2\varrho+2}\sum_\alpha k'_{\alpha\beta}(-s)^{\alpha-1}$$

setzen, so dass die letzte Gleichung übergeht in

$$\delta\sum_\alpha 2\eta_\alpha(-s)^{\alpha-1}=\frac{1}{2\varrho+2}\sum_{\alpha\beta}l_{\alpha\beta}2\omega_\beta(-s)^{\alpha-1}+\frac{1}{2\varrho+2}\sum_{\alpha\beta}k'_{\alpha\beta}2\eta_\beta(-s)^{\alpha-1},$$

und da $s$ beliebig ist, folgt hieraus

$$\delta\eta_\alpha=\frac{1}{2\varrho+2}\sum_\beta l_{\alpha\beta}\omega_\beta+\frac{1}{2\varrho+2}\sum_\beta k'_{\alpha\beta}\eta_\beta.$$

Die Coefficienten $k'_{\alpha\beta}$ haben nun denselben Werth wie die Coefficienten $k_{\alpha\beta}$ in (C): es ist

$$k'_{\alpha\beta}=k_{\alpha\beta}.$$

Den Beweis hiervon habe ich schon in dem in der Einleitung erwähnten Aufsatze im Journal für Mathematik, Bd. 99, Seite 244, geliefert. Derselbe muss nur in nebensächlichen Momenten einige Aenderungen erfahren: so wird dort an Stelle der Operation $\delta$ nach $a_\lambda$ differentiirt, und es werden dort nur die Gleichungen zwischen den Normalintegralen betrachtet, durch deren Integration erst die Gleichungen (C) und (D) entstehen. Aber dies alles macht nur unbedeutende Veränderungen nothwendig; in der Hauptsache bleibt der Beweis bestehen. —

Demnach ist

(D) $$\delta\eta_\alpha=\frac{1}{2\varrho+2}\sum_\beta l_{\alpha\beta}\omega_\beta+\frac{1}{2\varrho+2}\sum_\beta k_{\alpha\beta}\eta_\beta,$$

*wo die Grössen* $k_{\alpha\beta}$ *durch die Gleichungen* (17), (18) *und* (19), *die Grössen* $l_{\alpha\beta}$ *durch die Gleichungen* (21), (23), (24) *und* (25) *definirt sind.*

*Dies sind die Differentialgleichungen für die Perioden der Integrale zweiter Gattung*, die ich hier aufstellen wollte. *In denselben sind wiederum* $2\varrho - 1$ *Gleichungen zusammengefasst*, da in den Coefficienten noch die willkürliche Variable $v$ in der $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Potenz vorkommt. —

Um jetzt auch noch den Ausdruck von $\delta\omega$ zu bilden, habe ich wie oben bei der Bestimmung von $\varepsilon\omega$ zu verfahren. Ich erhalte unmittelbar

$$\delta\omega = \frac{-1}{2\varrho+2} k_{11} |\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, \cdots, \omega_{\varrho\beta}| - \frac{1}{4\varrho+4} \sum_{\gamma} (-v)^{\gamma-1} |\eta_{\gamma\beta}\ \omega_{2\beta}, \cdots, \omega_{\varrho\beta}|$$
$$- \frac{1}{2\varrho+2} k_{22} |\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, \cdots, \omega_{\varrho\beta}| - \frac{1}{4\varrho+4} \sum_{\gamma} (-v)^{\gamma} \quad |\omega_{1\beta}\ \eta_{\gamma\beta}, \cdots, \omega_{\varrho\beta}|$$
$$- \cdots\cdots,$$

oder wenn ich die $\eta_{\gamma\beta}$ enthaltenden Determinanten eben nach den Gliedern der Colonne der $\eta_{\gamma\beta}$ entwickle, indem ich wie in § 1 die adjungirten Subdeterminanten von $\omega_{\alpha\beta}$ in $\omega$ mit $(\omega)_{\alpha\beta}$ bezeichne:

$$\delta\omega = \frac{-\omega}{2\varrho+2} \sum_{\alpha} k_{\alpha\alpha} - \frac{1}{4\varrho+4} \sum_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\gamma\beta} (\omega)_{\alpha\beta} (-v)^{\alpha+\gamma-2}.$$

Hierin ist aber $\sum_{\alpha} k_{\alpha\alpha}$ gleich Null. Denn wie aus den Gleichungen (13), (14), (15) und (16) folgt, hat $\omega$ die Invarianteneigenschaft; wie ich später zeigen werde, ist dasselbe mit

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\gamma\beta} (\omega)_{\alpha\beta} (-v)^{\alpha+\gamma-2}$$

der Fall: demnach müsste auch $\sum_{\alpha} k_{\alpha\alpha}$, falls diese Summe nicht verschwände, diese Eigenschaft besitzen; aber dies ist nicht möglich, weil $\sum_{\alpha} k_{\alpha\alpha}$ die Coefficienten $A_\lambda$ linear, und die einzig darin vorkommende Variable $v$ nur in dem $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Grade enthält. Folglich muss $\sum_{\alpha} k_{\alpha\alpha} = 0$ und dementsprechend

$$\delta\omega = \frac{-1}{4\varrho+4} \sum_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\gamma\beta} (\omega)_{\alpha\beta} (-v)^{\alpha+\gamma-2} \tag{26}$$

sein.

## § 4.

### Die Differentialgleichungen der Thetafunctionen.

Aus den partiellen Differentialgleichungen für die Perioden der Normalintegrale habe ich jetzt die partiellen Differentialgleichungen für die Thetafunctionen selbst abzuleiten.

Wie ich schon in der Einleitung angeführt habe, will ich dazu gewisse Eigenschaften der Thetafunctionen benutzen und insbesondere die Eigenschaft derselben, in sich selbst multiplicirt mit einem Exponentialfactor zurückzukehren, wenn man die Argumente um ein System von Perioden vermehrt. Es ist dies, wenn man statt

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_p$$

einfach $\Theta(u_\alpha)_p$ schreibt, die Formel

$$\Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p = (-1)^N \Theta(u_\alpha)_p e^{\sum_\beta 2\eta_\beta(u_\beta+\omega_\beta)}, \tag{27}$$

wo $N$ eine ganze Zahl ist, die davon abhängt, welche Thetafunction und welche Periode man annimmt. Aus derselben folgt

$$\lg \Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p = \lg \Theta(u_\alpha)_p + \sum_\beta 2\eta_\beta(u_\beta+\omega_\beta) + N\pi i, \tag{28}$$

$$\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha+2\omega_\alpha)_p}{\partial u_\beta} = \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta} + 2\eta_\beta, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha+2\omega_\alpha)_p}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} = \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}. \tag{30}$$

Ferner erhält man, wenn $\varepsilon\,\Theta(u_\alpha)_p$ bedeuten soll, dass die Operation $\varepsilon$ nur an den Coefficienten der Reihenentwicklung von $\Theta(u_\alpha)_p$ nach Potenzen der $u_\alpha$ ausgeführt werden soll:

$$\varepsilon \lg \Theta(u_\alpha+2\omega_\alpha)_p + \sum_\beta \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha+2\omega_\alpha)_p}{\partial u_\beta} \cdot \varepsilon(2\omega_\beta)$$

$$= \varepsilon \lg \Theta(u_\alpha)_p + \sum_\beta \{2(u_\beta+\omega_\beta)\varepsilon(\eta_\beta) + 2\eta_\beta\,\varepsilon(\omega_\beta)\},$$

welche Gleichung mit Hilfe von (29) in

$$\varepsilon \lg \Theta(u_\alpha+2\omega_\alpha)_p = \varepsilon \lg \Theta(u_\alpha)_p + \sum_\beta 2(u_\beta+\omega_\beta)\varepsilon(\eta_\beta) - \sum_\beta 2\left(\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta} + \eta_\beta\right)\varepsilon(\omega_\beta) \tag{31}$$

übergeht. Analoge Gleichungen bestehen auch für $\zeta \lg \Theta(u_\alpha+2\omega_\alpha)_p$ und $\delta \lg \Theta(u_\alpha+2\omega_\alpha)_p$. —

Um nun die zu dem Operationszeichen $\varepsilon$ gehörige Differentialgleichung aufzustellen, bezeichne ich

$$(32) \qquad \varepsilon \lg \Theta(u_\alpha)_p + \sum_\gamma (\gamma - 1) u_{\gamma-1} \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = \chi(u_\alpha).$$

Indem man in dieser Gleichung $u_\alpha + 2\omega_\alpha$ an Stelle von $u_\alpha$ setzt und die Verwandlungsgleichungen (29) und (31) benutzt, findet man

$$\chi(u_\alpha + 2\omega_\alpha) = (u_\alpha),$$

d. h. $\chi(u_\alpha)$ bleibt ungeändert, wenn man die Argumente um ein System von Perioden vermehrt. Ich differentiire die Gleichung jetzt partiell nach $u_\beta$:

$$(33) \quad \varepsilon \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta} + \sum_\gamma (\gamma - 1) u_{\gamma-1} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \beta \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_{\beta+1}} = \frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}.$$

Nun ist $\frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}$ eine rationale Function von Quotienten der Thetafunctionen; $u_\alpha$ ist eine Summe von Integralen erster Gattung; $\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta}$ ist eine Summe von Integralen zweiter Gattung plus einem rationalen Ausdruck von Quotienten der Thetafunctionen, und demnach sind auch die in $\varepsilon \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta}$ vorkommenden Glieder $\frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta \partial A_\lambda}$ gleich Integralen erster und zweiter Gattung plus einer rationalen Function von Quotienten der Thetafunctionen. Daraus erkennt man, dass $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ eine rationale Function von Quotienten der Thetafunctionen plus einer Summe von Integralen erster und zweiter Gattung ist, welch letztere aber noch mit rationalen Functionen von Quotienten der Thetafunctionen multiplicirt sein können. Da aber $\chi(u_\alpha)$ bei Vermehrung der Argumente um Systeme von Perioden ungeändert bleibt und dies demnach auch bei $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ der Fall ist, so müssen sich in dem Ausdruck für $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ die Integrale erster und zweiter Gattung weggehoben haben, so dass derselbe nur aus einer rationalen Function von Quotienten der Thetafunctionen bestehen kann.

Denke ich mir nun beide Seiten der Gleichung (33) mit $\Theta^2(u_\alpha)_p$ multiplicirt, so bleibt alsdann die linke Seite für alle endlichen Werthe der Argumente endlich und dies muss demnach auch mit $\Theta^2(u_\alpha)_p \frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ der Fall sein. Hieraus folgt, wenn man den Umstand hinzunimmt,

dass $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ bei Vermehrung der Argumente um ein System von Perioden ungeändert bleibt, dass diese Function nur eine Summe von Quadraten der Thetafunctionen sein kann:

$$\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta} = \sum_r c_r \frac{\Theta^2(u_\alpha)_r}{\Theta^2(u_\alpha)_p}, \tag{34}$$

wo die $c_r$ Constanten sind.

Ich will mich jetzt vorerst nur auf gerade Thetafunctionen beschränken. Ist aber $\Theta(u_\alpha)_p$ eine gerade Function der Argumente, so muss, wie aus (33) folgt, $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ eine ungerade Function dieser Argumente sein. Dies ist aber im Widerspruch mit der Darstellung (34) von $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$, wenn in derselben die $c_r$ von Null verschieden sind. Folglich müssen die $c_r$ und mithin auch $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ gleich Null, und demgemäss $\chi(u_\alpha)$ selbst eine Constante, $C$, sein, so dass jetzt aus der Gleichung (32) sich ergiebt:

$$\varepsilon \lg \Theta(u_\alpha)_p + \sum_\gamma (\gamma - 1) u_{\gamma-1} \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = C_1,$$

oder, wenn man an Stelle des Operationszeichens $\varepsilon$ den Differentialausdruck setzt:

$$\sum_\lambda (2\varrho + 3 - \lambda) A_\lambda \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}} + \sum_\gamma (\gamma - 1) u_{\gamma-1} \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = C_1. \tag{35}$$

Diese Gleichung gilt zunächst nur für gerade Thetafunctionen. Dass sie auch für ungerade Thetafunctionen richtig ist, kann man durch eine ähnliche Betrachtung beweisen; aber man kann auch davon ausgehen, dass jede Thetafunction in jede andere übergeht, wenn man die Argumente um ein passendes System halber Perioden vermehrt:

$$\Theta(u_\alpha + \omega_\alpha)_p = e^{\frac{\pi i}{4} M} \Theta(u_\alpha)_q e^{\sum_\beta \eta_\beta (u_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta)}. \tag{36}$$

Setzt man nämlich in (35) $u_\alpha + \omega_\alpha$ an Stelle von $u_\alpha$ und benutzt diese Formel (36) zur Umformung, wie dies oben mit (27) geschehen ist, so wird die Gleichung (35) wieder ihre ursprüngliche Form annehmen, nur dass an Stelle von $\Theta(u_\alpha)_p$ jetzt $\Theta(u_\alpha)_q$ steht. Daraus folgt, dass diese Differentialgleichung für alle Thetafunctionen gilt, und dass dabei die Constante $C_1$ immer den gleichen Werth hat.

Dieselbe Betrachtungsweise zeigt dann auch die Richtigkeit der folgenden Differentialgleichungen:

$$\sum_{\lambda}\lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda}+\sum_{\gamma}(\varrho-\gamma)u_{\gamma+1}\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}=C_1',$$

$$\sum_{\lambda}\lambda A_{\lambda}\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda}-\sum_{\gamma}\gamma u_\gamma\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}=C_2,$$

$$\sum_{\lambda}(2\varrho+3-\lambda)A_{\lambda-1}\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}}-\sum_{\gamma}(\varrho+1-\gamma)u_\gamma\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}=C_2',$$

(die Summation bezüglich $\lambda$ ist von 1 bis $2\varrho+2$ auszuführen,) und

$$(2\varrho+2)\,\delta \lg \Theta(u_\alpha)_p$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}+\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta}\cdot\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}\right)(-v)^{\beta+\gamma-2}$$
$$-\sum_{\beta\gamma}k_{\beta\gamma}u_\beta\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}-\frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma}l_{\beta\gamma}u_\beta u_\gamma=C_3,$$

worin die Constanten $C_1'$, $C_2$, $C_2'$ und $C_3$ ebenfalls für alle Thetafunctionen dieselben Werthe haben.

Es handelt sich jetzt noch darum diese Werthe zu bestimmen. Hierzu benutze ich am besten die Entwicklung (10) der Fundamentalthetafunction. Dieselbe ist eine Fourier'sche Reihe im weitern Sinne; es muss also Glied für Glied einzeln den Differentialgleichungen genügen, insbesondere auch das Glied $e^{\eta(u)}$, welches dem Werthe Null der Summationsbuchstaben entspricht. Indem ich dies Glied in die Differentialgleichungen einsetze und die Argumente Null werden lasse, finde ich

$$C_1=C_1'=C_2=C_2'=0,$$
$$C_3=-\frac{1}{4\omega}\sum_{\alpha\beta\gamma}\eta_{\beta\alpha}(\omega)_{\gamma\alpha}(-v)^{\beta+\gamma-2}.$$

Wenn man nun noch die Differentiation des Logarithmus in den Differentialgleichungen ausführt, so ist man zu dem gesuchten *System der partiellen Differentialgleichungen der Thetafunctionen* gelangt:

$$(\mathrm{E})\begin{cases}\sum_{\lambda}\lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial\Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda}+\sum_{\gamma}(\varrho-\gamma)u_{\gamma+1}\frac{\partial\Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}=0,\\ \sum_{\lambda}(2\varrho+3-\lambda)A_\lambda\frac{\partial\Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}}+\sum_{\gamma}(\gamma-1)u_{\gamma-1}\frac{\partial\Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}=0,\\ \sum_{\lambda}\lambda A_\lambda\frac{\partial\Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda}-\sum_{\gamma}\gamma u_\gamma\frac{\partial\Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}=0,\\ \sum_{\lambda}(2\varrho+3-\lambda)A_{\lambda-1}\frac{\partial\Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}}-\sum_{\gamma}(\varrho+1-\gamma)u_\gamma\frac{\partial\Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}=0,\end{cases}$$

(wo über $\lambda$ von 1 bis $2\varrho + 2$ summirt wird,) und

$$(F) \qquad (2\varrho+2)\,\delta\,\Theta(u_\alpha)_p$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial^2\Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta\,\partial u_\gamma}(-v)^{\beta+\gamma-2} + \sum_{\beta\gamma} k_{\beta\gamma}\,u_\beta\frac{\partial\Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma} l_{\beta\gamma}\,u_\beta u_\gamma\,\Theta(u_\alpha)_p - \frac{1}{4\omega}\sum_{\alpha\beta\gamma}\eta_{\beta\alpha}(\omega)_{\gamma\alpha}(-v)^{\beta+\gamma-2}\Theta(u_\alpha)_p.$$

*In denselben kann $\Theta(u_\alpha)_p$ jede der Thetafunctionen bedeuten. — In der letzten Gleichung sind wieder $2\varrho - 1$ einzelne Gleichungen zusammengefasst*, da in derselben noch die willkürliche Variable $v$ in der $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Potenz vorkommt. —

Am Ende des vorigen Paragraphen wurde bei der Bestimmung von $\delta\omega$ von der dort noch nicht bewiesenen Eigenschaft der Function

$$\sum_{\alpha\beta\gamma}\eta_{\gamma\alpha}(\omega)_{\beta\alpha}(-v)^{\beta+\gamma-2} = \mathsf{H}$$

eine Covariante zu sein, Gebrauch gemacht. Der Beweis hiervon soll hier nachgeholt werden. Wie schon einige Zeilen weiter oben angeführt ist, müssen die einzelnen Glieder der Entwicklung (10) der Fundamentalthetafunction, insbesondere $e^{\eta(u)}$, diesem System von Differentialgleichungen genügen. Aus den vier ersten Gleichungen folgt

$$\sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial\eta(u)}{\partial A_\lambda} + \sum_\gamma(\varrho-\gamma)\,u_{\gamma+1}\frac{\partial\eta(u)}{\partial u_\gamma} = 0,$$

u. s. w.

und diese Gleichungen gehen, wenn man $(-v_1)^{\gamma-1}v_2^{\varrho-\gamma}$ für $u_\gamma$ und demgemäss $\frac{1}{2\omega}\mathsf{H}$ für $\eta(u)$ setzt, über in das System

$$\sum\lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial\mathsf{H}}{\partial A_\lambda} - v_1\frac{\partial\mathsf{H}}{\partial v_2} = 0,$$

u. s. w.

welches eben ausdrückt, dass $\mathsf{H}$ eine Covariante ist. —

Das System der Differentialgleichungen (E) und (F) will ich noch dadurch umformen, dass ich an Stelle der Thetafunction selbst diese dividirt durch $\left[\omega:\left(\frac{\pi}{2}\right)^\varrho\right]^{\frac{1}{2}}$ unter der Bezeichnung

$$\mathrm{Th}(u_\alpha)_p = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\varrho}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}}\Theta(u_\alpha)_p$$

einführe. Es wird dadurch erreicht, dass auch in der letzten der

Differentialgleichungen keine transcendenten Grössen vorkommen. Unter Berücksichtigung von (13), (14), (15), (16) und (26) findet man

$$(E_1)\quad \begin{cases} \sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1} \frac{\partial \mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda} + \sum_\gamma (\varrho-\gamma) u_{\gamma+1} \frac{\partial \mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = 0, \\ \sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda) A_\lambda \frac{\partial \mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}} + \sum_\gamma (\gamma-1) u_{\gamma-1} \frac{\partial \mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = 0, \\ \sum_\lambda \lambda A_\lambda \frac{\partial \mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda} - \sum_\gamma \gamma u_\gamma \frac{\partial \mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = \frac{1}{4}\varrho(\varrho+1)\mathrm{Th}(u_\alpha)_p, \\ \sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda) A_{\lambda-1} \frac{\partial \mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}} - \sum_\gamma (\varrho+1-\gamma) u_\gamma \frac{\partial \mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} \\ \qquad = \frac{1}{4}\varrho(\varrho+1)\mathrm{Th}(u_\alpha)_p, \end{cases}$$

$$(F_1)\quad (2\varrho+2)\,\delta\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p = \frac{1}{4}\sum_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} (-v)^{\beta+\gamma-2} + \sum_{\beta\gamma} k_{\beta\gamma} u_\beta \frac{\partial \mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} + \frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma} l_{\beta\gamma} u_\beta u_\gamma \mathrm{Th}(u_\alpha)_p,$$

welche ebenfalls für alle Thetafunctionen gelten.

## § 5.

## Umformung der Ausdrücke, in denen nach den Parametern differentiirt wird.

Bekanntlich treten, wenn man die Argumente Null werden lässt, in den Thetafunctionen, falls sie nicht verschwinden, und sonst in den ersten oder höheren Ableitungen derselben, als Factoren die achten Wurzeln aus den Discriminanten der beiden ganzen Functionen $g(x)$ und $\bar{g}(x)$ auf, deren Product

$$g(x)\,\bar{g}(x) = f(x) \tag{37}$$

ist. Dementsprechend kann es unter Umständen vortheilhaft sein, dass in den obigen Differentialgleichungen an Stelle der Differentiation nach den Coefficienten $A_\lambda$ von $f(x)$ eine Differentiation nach den Coefficienten von $g(x)$ und $\bar{g}(x)$ tritt. Wie dies bei den Differentialausdrücken $\sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1} \frac{\partial}{\partial A_\lambda}$ u. s. w. geschieht, ist bekannt: wenn

$$g(x) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \alpha_i x^i, \tag{37}$$

$$\bar{g}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \bar{\alpha}_j x^j,$$

wo

$$m + n = 2\varrho + 2,$$

so ist

$$\sum_{\lambda} \lambda A_{\lambda-1} \frac{\partial}{\partial A_\lambda} = \sum_{i} i\, \alpha_{i-1} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \sum_{j} j\, \bar{\alpha}_{j-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j},$$

$$\sum_{\lambda} (2\varrho + 3 - \lambda) A_\lambda \frac{\partial}{\partial A_{\lambda-1}} = \sum_{i} (m+1-i)\alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_{i-1}} + \sum_{j} (n+1-j)\bar{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_{i-1}},$$

$$\sum_{\lambda} \lambda A_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda} = \sum_{i} i\, \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \sum_{j} j\, \bar{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j},$$

$$\sum_{\lambda} (2\varrho + 3 - \lambda) A_{\lambda-1} \frac{\partial}{\partial A_{\lambda-1}} = \sum_{i} (m+1-i)\alpha_{i-1} \frac{\partial}{\partial \alpha_{i-1}} + \sum_{j} (n+1-j)\bar{\alpha}_{j-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_{j-1}},$$

wo über $i$, bez. $j$ von 1 bis $m$, bez. $n$ zu summiren ist.

Bei der Operation $\delta$, behaupte ich, geschieht dies in folgender Weise: es ist

$$\delta = \sum_{i=0}^{m} \chi_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \sum_{j=0}^{n} \bar{\chi}_j \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j},$$

wo

$$\chi(x) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \chi_i x^i = \frac{\psi_{01}(x) g_{10}(x) - \psi_{10}(x) g_{01}(x)}{x - v},$$

$$\bar{\chi}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \bar{\chi}_j x^j = \frac{\psi_{01}(x) \bar{g}_{10}(x) - \psi_{10}(x) \bar{g}_{01}(x)}{x - v}.$$

Denn einerseits findet man aus (37), dass

$$\binom{2\varrho+2}{\mu} A_\mu = \sum_{h} \binom{m}{h} \binom{n}{\mu - h} \alpha_h \bar{\alpha}_{\mu-h},$$

und hieraus folgt

$$(38) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_i} = \displaystyle\sum_{\mu=i}^{n} \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{\mu - i}}{\binom{2\varrho+2}{\mu}} \bar{\alpha}_{\mu-i} \frac{\partial}{\partial A_\mu}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j} = \displaystyle\sum_{\mu=j}^{m} \frac{\binom{n}{j}\binom{m}{\mu - j}}{\binom{2\varrho+2}{\mu}} \alpha_{\mu-j} \frac{\partial}{\partial A_\mu}; \end{cases}$$

anderseits ergiebt sich aus dem Ausdrucke (17) von $\varphi$, wenn man in denselben $g(x)\,\bar{g}(x)$ für $f(x)$ setzt:

$$\varphi(x) = \bar{g}(x)\,\chi(x) + g(x)\,\bar{\chi}(x),$$

dass

$$\binom{2\varrho+2}{\mu}\varphi_\mu = \sum_h \binom{m}{h}\binom{n}{\mu-h}\bar{\alpha}_h\,\chi_{\mu-h} + \sum_k \binom{n}{k}\binom{m}{\mu-k}\alpha_k\,\bar{\chi}_{\mu-k}. \tag{39}$$

Und mit Hilfe dieser drei Gleichungen (38) und (39) verwandelt sich, wie man sich leicht überzeugt, der Ausdruck $\sum_i \chi_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \sum_j \bar{\chi}_j \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j}$ in $\sum_\mu \varphi_\mu \frac{\partial}{\partial A_\mu}$, d. i. in $\vartheta$, wie behauptet.

Halle a. S., im September 1887.

# Ueber eine Integraldarstellung der hypergeometrischen Reihe.

Von

Paul Schafheitlin in Berlin.

Im letzten Hefte des XXX. Bandes der Math. Annalen hat Herr Sonine eine Prioritätsreclamation in Bezug auf eine von mir in demselben Bande erschienene Arbeit (pag. 157—178) erhoben.

Zuvörderst gebe ich zu, dass ich allerdings bei der Durchsicht der früheren Arbeiten über das betreffende Thema den Aufsatz des Herrn Sonine übersehen habe; ich bedauere daher, dass ich bei meinen Formeln (51), (52) Herrn Sonine nicht citirt habe, da jene Formeln in der That schon von Herrn Sonine der *Form* nach aufgestellt worden sind, wenn auch der *Inhalt* derselben sich mit dem meiner Formeln nicht deckt.

Solange nämlich an den von Herrn Sonine aufgestellten Bedingungen $p > m$, $n > m$ festgehalten wird, lässt sich keine der von mir entwickelten Specialformeln aus der Sonine'schen Formel ableiten; erst wenn man sich von obigen Ungleichheiten befreit, — wobei zu bemerken ist, dass für $n < m$ auch das von Euler herrührende Integral aus der Sonine'schen Formel eliminirt werden muss, da dasselbe alsdann sinnlos wird — lassen sich jene Specialformeln für $s \lessgtr 1$ ableiten. Der Werth $s = 1$, für welchen das Integral unter Umständen (siehe meine Arbeit pag. 169) discontinuirlich wird, ist wegen der Bedingung $a < c$ überhaupt nicht in der Sonine'schen Formel enthalten.

Ich glaube, dass meine Herleitung der Sonine'schen Formel immerhin noch ein gewisses Interesse beanspruchen darf, um so mehr als auf dem von mir eingeschlagenen Wege die Euler'sche Integralformel nicht benutzt wird. Denn während das Euler'sche Integral giltig ist für alle Werthe von $s$ mit Ausnahme der auf der reellen Axe zwischen 1 und $\infty$ liegenden, verlangt die Integraldarstellung, welche Bessel'sche Functionen enthält, beliebige reelle Werthe von $s$; da ferner die Ungleichheitsbedingungen der Elemente $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in beiden Darstellungen andere sind, so müssen sich beide Integrale, wenn man sie in eine Formel bringt, in ihrem Geltungsbereiche gegenseitig stören.

Berlin, im Januar 1888.

# Die Concomitanten der ternären cubischen Formen, insbesondere der Form $x_1 x_3^2 - 4x_2^3 + g_2 x_1^2 x_2 + g_3 x_1^3$.

Von

Friedrich Dingeldey in Darmstadt.

Nachstehende Arbeit bildet gewissermassen eine Ergänzung zu einer Arbeit von Herrn Cayley*), in welcher mit Hilfe der von Herrn Gundelfinger gegebenen Formeln**) die 34 Concomitanten***) der *Hesse'schen Normalform*

$$(1) \qquad a x_1^3 + b x_2^3 + c x_3^3 + 6 l x_1 x_2 x_3$$

der ternären cubischen Formen berechnet werden. Gleich Null gesetzt stellt (1) bekanntlich eine auf ein „Wendedreieck" bezogene allgemeine ebene Curve dritter Ordnung dar. *Die Curve mit Doppelpunkt* ist als specieller Fall in (1) enthalten; setzen wir z. B. $c = 0$, so erhält die Curve in $x_1 = x_2 = 0$ einen Doppelpunkt†). *Die Curve mit Rückkehrpunkt* hingegen ist als specieller Fall in (1) *nicht* enthalten; die canonische Gleichung einer solchen Curve ist vielmehr:

$$(2) \qquad x_1 x_3^2 - 4x_2^3 = 0.$$

Während ich ursprünglich, zur Ergänzung der Cayley'schen Tabelle, nur die Concomitanten der durch (2) definirten Form berechnen wollte, hatte Herr Klein die Güte mich daran zu erinnern, dass die Gleichung (2) in einer anderen canonischen Darstellung der allgemeinen Curve dritter Ordnung als specieller Fall enthalten ist, einer Darstellung, die überdies für die Theorie der elliptischen Func-

*) „On the 34 Concomitants of the Ternary Cubic." American Journal of Mathematics, Bd. IV, 1881.

**) „Zur Theorie der ternären cubischen Formen." Math. Annalen, Bd. 4, S. 145.

***) Ich gebrauche mit Herrn Sylvester den Ausdruck *Concomitante* als Collectivname für Invarianten, Covarianten, Contravarianten und Zwischenformen.

†) Vgl. die hier nachfolgende Note „Ueber die Transformation der Gleichung der ebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf die Normalform."

tionen eine wesentliche Bedeutung besitzt. Es ist dies die *Weierstrass'sche Normalform* der Curve dritter Ordnung:

$$x_1 x_3^2 = 4x_2^3 - g_2 x_1^2 x_2 - g_3 x_1^3, \tag{3}$$

welche genau der zwischen den Weierstrass'schen Functionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ stattfindenden Relation

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{4}$$

entspricht und daher so wichtig ist für die Theorie der elliptischen Functionen, insbesondere auch für die längs einer ebenen Curve dritter Ordnung vom Geschlechte Eins hinerstreckten Integrale (Integrale dritter Stufe). *) Ich berechnete daher, von Herrn Klein aufgefordert, die Concomitanten der der Gleichung (3) entsprechenden Form. *Hierbei und überhaupt bei dem Studium der die ternären cubischen Formen behandelnden Arbeiten von Aronhold, Cayley, Clebsch, Gordan und Gundelfinger fand ich es sehr misslich, dass die einzelnen Autoren so sehr von einander abweichende Bezeichnungen für dieselben Formen des vollständigen Systems gewählt haben.* Diese Verschiedenheit äussert sich nicht nur in der Art, dass oft dieselbe Form mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet ist, sondern, und dies ist ganz besonders störend, bei Bezeichnungen durch zwar gleiche *Buchstaben* sind noch Abweichungen in deren *Zahlenfactoren* vorhanden, dem Umstande zufolge, dass die einzelnen Autoren bei der Wahl dieser Zahlenfactoren verschiedene Principien verfolgten. *Ich gebe deshalb eine vergleichende Zusammenstellung der Bezeichnungen für äquivalente Formen des Systems.* Ein weiterer Uebelstand ist, dass mehrere der erwähnten Arbeiten eine nicht geringe Zahl störender Druckfehler enthalten. Auf einige derselben hat schon Herr Gundelfinger aufmerksam gemacht**), andere werden am Schlusse des achten Bandes dieser Annalen verbessert; zahlreiche weitere Druckfehler, die vielleicht noch nicht bemerkt sein dürften, erwähne ich gleichfalls in vorliegender Arbeit.

Schliesslich stelle ich noch die *Concomitanten der Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt* (2) zusammen, betrachte die *Transformation dieser Curven auf die canonische Form* (2) und füge einige Bemerkungen über die *geometrische Bedeutung gewisser Concomitanten* hinzu.

---

*) Vgl. hierzu u. A.: Clebsch „Vorlesungen über Geometrie", hrsgg. von Lindemann, S. 652 ff., Klein „Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung", Math. Annalen Bd. 17, S. 132—138, sowie „Ueber die elliptischen Normalcurven der $N^{\text{ten}}$ Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der $N^{\text{ten}}$ Stufe" in den Abhandlungen der math. phys. Classe der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 13, S. 359 ff. Ferner Pick „Zur Theorie der elliptischen Functionen" im 28. Bd. dieser Annalen, S. 309—318.

**) Math. Annalen, Bd. 4, S. 152 Anm.

## § 1.

## Vergleichende Zusammenstellung der Bezeichnungen für die Concomitanten der ternären cubischen Formen.

Hinsichtlich der vergleichenden Zusammenstellung der verschiedenen Bezeichnungen für äquivalente Formen des Systems bemerke ich zunächst Folgendes. Herr Cayley, sowie später Clebsch und Gordan scheinen zuerst das Bedürfniss nach einer solchen Zusammenstellung empfunden zu haben. Herr Cayley gab schon im Jahre 1861 eine auf zwölf Formen bezügliche Vergleichung zwischen seiner und Aronhold's Bezeichnungsweise*); andere Bezeichnungen waren damals noch nicht vorhanden. Im Jahre 1873 erweiterten Clebsch und Gordan diese vergleichende Tabelle**), indem sie noch ihre eigenen Bezeichnungen berücksichtigten, die aber hier abweichen von den im Jahre 1867 in einer früheren Arbeit***) benutzten Bezeichnungen. Dort stimmen die Formen noch genau mit denen Aronhold's überein, soweit dieselben sich schon bei Aronhold vorfinden.

Im Folgenden dehne ich die vergleichende Zusammenstellung nicht nur auf das *vollständige Formensystem* und noch einige andere wichtige Gebilde aus, sondern berücksichtige hierbei auch die für die ganze Theorie so wichtige Arbeit von Herrn Gundelfinger „Zur Theorie der ternären cubischen Formen" †) und die schon oben erwähnte neuere Arbeit von Herrn Cayley „On the 34 Concomitants of the Ternary Cubic." ††)

In der vorletzten Columne der Tabelle füge ich, um sofort den Grad der betreffenden Form in den Coefficienten der Grundform, ihre Classe in den Variabelen $u$ und ihre Ordnung in den Variabelen $x$ entnehmen zu können, nach dem Vorgange von Herrn Cayley eine Zahl bei (deg-class-order symbol), welche Grad, Classe und Ordnung anzeigt. So bedeutet z. B. 625 eine Concomitante vom 6. Grade in den Coefficienten, von der 2. Classe und von der 5. Ordnung. Die letzte Columne giebt das Gewicht oder die Anzahl symbolischer Determinantenfactoren, welche die Formen enthalten, wenn sie in Clebsch's symbolischer Darstellung geschrieben werden.

---

*) „A Seventh Memoir on Quantics." Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year 1861. Vol. 151, pag. 280. London 1862.

**) „Ueber cubische ternäre Formen". Math. Annalen, Bd. 6, S. 439 Anm.

***) „Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen." Math. Annalen, Bd. 1, S. 56.

†) Math. Annalen, Bd. 4, S. 144. 1871.

††) American Journal of Mathematics, Vol. IV. 1881.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aronhold 1857 (Crelle's Journal, Bd. 55) | Clebsch und Gordan 1867 (Math. Annalen, Bd. 1) | Gundelfinger 1871 (Math. Annalen, Bd. 4) | Clebsch und Gordan 1873 (Math. Annalen, Bd. 6) Clebsch-Lindemann 1876 (Vorlesungen über Geometrie) | Cayley 1881 (American Journal of Math., Vol. IV) | Deg-class-order symbol | Gewicht |
| $6S$ | $6S$ | $6S$ | $S$ | $24S$ | 400 | 4 |
| $6T$ | $6T$ | $6T$ | $T$ | $-6T$ | 600 | 6 |
| $u$ | $u_x$ | $u_x$ | $u_x$ | $\Lambda$ | 011 | 0 |
| $\Theta$ | $\Theta$ | $\Theta$ | $\Theta$ | $2\Theta$ | 222 | 2 |
| $H$ | $H$ | $\mathsf{H}$ | $\mathsf{H}$ | $-2\Theta'$ | 422 | 4 |
| — | $K$ | $\mathsf{K}$ | $\mathsf{K}$ | $2\Theta''$ | 622 | 6 |
| — | — | $\mathsf{B}$ | — | $6B$ | 333 | 3 |
| — | — | $\mathsf{B}'$ | — | $-12B'$ | 533 | 5 |
| — | — | $\mathsf{B}''$ | — | $24B''$ | 733 | 7 |
| — | — | $\mathsf{B}'''$ | — | $-48B'''$ | 933 | 9 |
| $f$ | $f$ | $f$ | $f$ | $U$ | 103 | 0 |
| $\Delta_f$ | $\Delta$ | $\Delta$ | $\Delta$ | $-6H$ | 303 | 2 |
| — | $\psi$ | $\psi$ | $4\psi$ | $2\Psi$ | 806 | 6 |
| — | $\Omega$ | $\Omega$ | $24\Omega$ | $-24\Omega$ | 1209 | 9 |
| $S_f$ | $S_f$ | $S_f$ | $\Sigma$ | $6P$ | 330 | 4 |
| $T_f$ | $T_f$ | $T_f$ | $\mathsf{T}$ | $-2Q$ | 530 | 6 |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $-2F$ | 460 | 6 |
| — | — | $\Pi$ | — | $-96\Pi$ | 1290 | 15 |
| — | $N$ | $N$ | $6N$ | $12J$ | 414 | 3 |
| — | $L$ | $L$ | $4L$ | $4K$ | 514 | 4 |
| — | $M$ | $M$ | $4M$ | $4K'$ | 714 | 6 |
| — | — | $\mathsf{E}$ | — | $-72E$ | 625 | 5 |
| — | — | $\mathsf{E}'$ | — | $-144E'$ | 825 | 7 |
| — | — | $\mathsf{E}''$ | — | $-144E''$ | 1025 | 9 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aronhold 1857 (Crelle's Journal, Bd. 55) | Clebsch und Gordan 1867 (Math. Annalen, Bd. 1) | Gundelfinger 1871 (Math. Annalen, Bd. 4) | Clebsch und Gordan 1873 (Math. Annalen, Bd. 6) Clebsch-Lindemann 1876 (Vorlesungen über Geometrie) | Cayley 1881 (American Journal of Math., Vol. IV) | Deg-class-order symbol | Gewicht |
| — | — | $\sum \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3$ | — | $72M$ | 917 | 7 |
| — | — | $\sum \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3$ | — | $72M'$ | 1117 | 9 |
| — | $N'$ | $N'$ | 6N | $-24\overline{J}$ | 841 | 9 |
| — | $L'$ | $L'$ | $-2\Lambda$ | $2\overline{K}$ | 541 | 6 |
| — | $M'$ | $M'$ | $-2\mathsf{M}$ | $-12\overline{K}'$ | 741 | 8 |
| — | — | $Z$ | — | $-18\overline{E}$ | 652 | 7 |
| — | — | $Z'$ | — | $-18\overline{E}'$ | 852 | 9 |
| — | — | $Z''$ | — | $-72\overline{E}''$ | 1052 | 11 |
| — | — | $\sum \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} x_3$ | — | $72\overline{M}$ | 771 | 9 |
| — | — | $\sum \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} x_3$ | — | $-144\overline{M}'$ | 971 | 11 |
| $36R$ | $-36R$ | $-36R$ | $R$ | $-36R$ | 1200 | 12 |
| $-6P_f$ | $-6P_f$ | $-6P_f$ | $\Pi$ | $12Y$ | 930 | 10 |
| $6R_f$ | $-6R_f$ | $-6R_f$ | P | $12Z$ | 1130 | 12 |
| — | $6\Phi$ | $6\Phi$ | $\Phi$ | $3\Phi$ | 1660 | 18 |

Noch möchte ich hier eine Bezeichnungsweise erwähnen, die mir Herr Gundelfinger mittheilte. Hiernach wäre es wohl am praktischsten, die Bezeichnungen $f, \Delta, S, T, \Sigma, \mathsf{T}, F, \psi, \Omega, L, N, \Theta, u_x$ von Clebsch beizubehalten und diejenigen anderen Formen, die aus einer und derselben Form durch Anwendung des sogenannten $\delta$-Processes abgeleitet sind, mit demselben Buchstaben zu bezeichnen, diesen aber mit einem oder mehreren Accenten zu versehen, je nachdem dieser Process ein- oder mehrmals angewandt ist. Ausserdem sollen

hiernach die übrigen Paare von Zwischenformen, welche sich so entsprechen, dass bei der einen Form die Classe so hoch ist als bei der anderen die Ordnung und umgekehrt, mit denselben, jedoch dem lateinischen resp. griechischen Alphabete entnommenen Buchstaben bezeichnet werden. Dieses Princip hat auch Herr Cayley verfolgt, nur wählte er statt der gleichen griechischen die gleichen lateinischen, mit einem etwas unbequemen wagrechten Striche versehenen Buchstaben. Es treten dann nach dem Vorschlage von Herrn Gundelfinger an die Stelle der früheren Gundelfinger'schen Bezeichnungen

$$\mathsf{H},\ \mathsf{K},\ M,\ L',\ M',$$

$$\sum \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3, \quad \sum \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3,$$

$$\sum \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} x_3, \quad \sum \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} x_3,$$

$$\mathsf{E},\ \mathsf{E}',\ \mathsf{E}'',\ \mathsf{Z},\ \mathsf{Z}',\ \mathsf{Z}''$$

der Reihe nach am zweckmässigsten die folgenden:

$$\Theta',\ \Theta'',\ L',\ \Lambda,\ \Lambda',\ M,\ M',\ \mathsf{M},\ \mathsf{M}',\ E,\ E',\ E'',\ \mathsf{E},\ \mathsf{E}',\ \mathsf{E}'',$$

während Herrn Gundelfinger's $\mathsf{B}$, $\mathsf{B}'$, $\mathsf{B}''$, $\mathsf{B}'''$, $N'$ und auch wohl $\Pi$ beizubehalten wären.

## § 2.

## Verzeichniss von Druckfehlern.

Es folge nun noch ein Verzeichniss störender Druckfehler, die ich beim Studium der oben genannten und einiger anderen einschlägigen Arbeiten vorfand.

Crelle's Journal, Bd. 55, S. 159, Z. 4 lies $-12a_2a_3a_4{}^2x_2x_3$ statt $-12a_2a_3a_4x_2x_3$ und ibid. Z. 5 lies $-12a_1a_3a_4{}^2x_1x_3$ statt $-12a_1a_3a_4x_1x_3$; S. 189, Z. 19 muss der Zahlenfactor vor der Determinante — 3 sein statt — 6.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 151, pag. 280, Z. 16 lies $-2FU$ statt $-FU$.

Math. Annalen, Bd. I, S. 57, Z. 1 v. u. lies $TT_f{}^2$ statt $TS_f{}^2$ und $3RF$ statt $6RF$.*)

Ibid. Bd. IV, S. 145, Z. 7 lies $(abu)^2\,(cdu)^2\,(acu)\,(bdu)$ statt $(abu)^2\,(cdu)^2\,(bcu)\,(adu)$; S. 568, Z. 6 v. u. lies $3\cdot 4Su_x y^2$ statt $3\cdot 4Su_x{}^2y^2$, und Z. 1 und 2 v. u. ist der Factor $9^3$ vor der Quadratwurzel zu streichen.

*) Bereits von Herrn Gundelfinger Math. Ann. Bd. 4, S. 152 Anm. bemerkt, wo auch noch ein anderer Fehler in Aronhold's Arbeit verbessert wird.

Ibid. Bd. VI, S. 439, Z. 3. v. u. lies $-6T$ statt $-6F$ und $-2FU$ statt $-\frac{1}{2}FU$; S. 440, Z. 1 v. u. lies 3 statt $Q$.*)

Ibid. Bd. VIII, S. 137, Z. 3 und 4 v. u. ist statt des Factors $-\frac{1}{2}$ vor der Summe zu setzen $-\frac{1}{4}$; ibid. Z. 1 v. u. lies $\frac{1}{24}(2Tf-S\Delta)u_x$ statt $\frac{1}{24}(2Tf+S\Delta)$.

Vorlesungen über Geometrie von Clebsch, herausgeg. von Lindemann, S. 546 Anm. ist der Ausdruck für $\frac{3}{2}S$ mit dem Factor 36 zu versehen.

American Journal of Mathematics, Vol. IV (Cayley), S. 4 ist in dem Werthe von $T$ zu setzen $-20abcl^3$ statt $-20abcl$ und in dem Werthe für $\Theta'$ hat zu stehen $yz[6bcl^2\xi^2-2l(abc+2l^3)\eta\zeta]$ statt $yz[bcl^2\xi^2-2(abc+2l^3)\eta\zeta]$; ibid. S. 5 ist in dem Ausdrucke für $K'$ zu setzen $(ax^4-2bxy^3-2cxz^3)$ statt $(ax^4-2blxy^3-2clxz^3)$; S. 6 ist das Symbol für $\Phi$ nicht 1640, sondern 1660, und das erste Glied von $\Phi$ nicht $12(abc+8l^3)^2F$, sondern $12abc(abc+8l^3)^3F$.

## § 3.

### Die 34 Concomitanten der canonischen Form

$$f\equiv x_1x_3^2-4x_2^3+g_2x_1^2x_2+g_3x_1^3.$$

Bevor ich die 34 Concomitanten der Weierstrass'schen Normalform der Curve dritter Ordnung

(A) $$x_1x_3^2-4x_2^3+g_2x_1^2x_2+g_3x_1^3=0$$

hier zusammenstelle, sei es mir zunächst gestattet einige Bemerkungen über das Coordinatensystem, auf welches die Curve (A) bezogen ist, der Arbeit von Herrn Klein „Ueber die elliptischen Normalcurven der $N^{\text{ten}}$ Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der $N^{\text{ten}}$ Stufe“**) zu entnehmen. „Wir erkennen sofort, dass $x_1=x_2=0$ einen der neun Wendepunkte unserer Curve, $x_1=0$ die zugehörige Wendetangente, $x_3=0$ die harmonische Polare vorstellt. Die geometrische Definition von $x_2=0$ ist ein wenig complicirter. Die Linie $x_2=0$ ist unter den Geraden des Büschels $x_1+\lambda x_2$ diejenige, welche der Wendetangente $x_1=0$ als erste Polare in Bezug auf die drei weiteren vom Wendepunkte $(x_1=x_2=0)$ an die Curve laufenden Tangenten correspondirt. — Den 18 Collineationen entsprechend, welche die $C_3$ in sich überführen, kann man bei gegebener $C_3$ die Gleichungsform

*) Einige andere in diesem Bande befindlichen Druckfehler sind am Schlusse des 8. Bandes verbessert.

**) Abhandlungen der math. phys. Classe der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 13, S. 359 f.

(A) auf 18 Weisen herstellen. Ein jeder der 9 Wendepunkte giebt allerdings nur zu einem canonischen Coordinatendreiecke Anlass, aber zu jedem Dreiecke gehören zwei canonische Darstellungen, indem (A) ungeändert bleibt, wenn wir $x_3$ im Vorzeichen ändern, was eine der 18 in Aussicht genommenen Collineationen ist."

„Die in (A) auftretenden Coefficienten $g_2$, $g_3$ sind von den rationalen Invarianten vierten und sechsten Grades, welche die durch (A) dargestellte Curve dritter Ordnung im Sinne der Aronhold'schen Theorie besitzt, nur durch Zahlenfactoren verschieden. *Trotzdem also eine beliebig gegebene Curve dritter Ordnung auf* 18 *Weisen in die Gleichungsform* (A) *gesetzt werden kann, sind die in dieser Gleichungsform auftretenden Coefficienten von vorneherein rational bekannt.* Der Grund hierfür liegt in der schon hervorgehobenen Thatsache, dass sämmtliche 18 canonische Darstellungen einer Curve dritter Ordnung aus einer derselben vermöge derjenigen Collineationen hervorgehen, welche, anders aufgefasst, die Curve dritter Ordnung in sich selbst überführen."

*Ich lasse nunmehr die* 34 *Concomitanten der durch* (A) *definirten Form hier folgen*, indem ich dabei die Cayley'sche Bezeichnungsweise gebrauche*), und dieselbe Reihenfolge einhalte wie Herr Cayley in seiner bereits mehrfach von mir citirten Tabelle der Concomitanten der Form $ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3 + 6lx_1x_2x_3$. Man findet:

Formen, für welche Classe = Ordnung.

(1) $27S = 4g_2.$

(2) $27T = 64g_3.$

(3) $u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3.$

(4) $$9\Theta = [3g_3u_2^2 - g_2^2u_3^2 - 2g_2u_1u_2]\,x_1^2 - 12g_2u_3^2x_2^2 - u_2^2x_3^2 + 24u_3u_1x_2x_3 + 2g_2u_2u_3x_3x_1 + [-12u_1^2 + g_2u_2^2 - 36g_3u_3^2]\,x_1x_2.$$

(5) $$27\Theta' = [4g_2u_1^2 + g_2^2u_2^2 - 12g_2g_3u_3^2 - 24g_3u_1u_2]\,x_1^2 + 4[12u_1^2 - g_2u_2^2 - 36g_3u_3^2]x_2^2 - 8u_1u_2x_3^2 + 16g_2u_2u_3x_2x_3 + 16[3g_3u_2u_3 - g_2u_3u_1]x_3x_1 - 16g_2^2u_3^2x_1x_2.$$

(6) $$81\Theta'' = 16\{[g_2^3 - 36g_3^2]u_3^2x_1^2 + 4[-3g_3u_2^2 - g_2^2u_3^2 + 2g_2u_1u_2]\,x_2^2 - 4u_1^2x_3^2 + 8[3g_3u_2u_3 - g_2u_3u_1]x_2x_3 + 2[g_2^2u_2u_3 - 12g_3u_3u_1]x_3x_1 + [-4g_2u_1^2 - g_2^2u_2^2 - 12g_2g_3u_3^2 + 24g_3u_1u_2]\,x_1x_2\}.$$

---

*) Nur will ich $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \Lambda$ ersetzen durch $u_x$ und $x_1x_3^2 - 4x_2^3 + g_2x_1^2x_2 + g_3x_1^3 = U$ durch $f$.

$$
\begin{aligned}
(7)\quad 27B = {} & [108g_3^2u_3^3 - 2g_2^3u_3^3 + 9g_2g_3u_2^2u_3 + 9g_3u_3u_1^2 - 6g_2^2u_1u_2u_3]x_1^3 \\
& + 12[36g_3u_3^3 - g_2u_2^2u_3 + 36u_3u_1^2]x_2^3 - 2[u_2^3 + 12u_3^2u_1]x_3^3 \\
& - 24[g_2u_2u_3^2 + u_1u_2^2]x_2^2x_3 + 24[g_2u_3^3 + u_1u_2u_3]x_2x_3^2 \\
& + 3[12g_3u_3^3 - g_2u_2^2u_3 + 20u_3u_1^2]x_3^2x_1 \\
& + 6[-4u_1^3 - 3g_3u_2^3 + g_2^2u_2u_3^2 - 24g_3u_3^2u_1 + 2g_2u_1u_2^2]x_3x_1^2 \\
& + 3[36g_2g_3u_3^3 + g_2^2u_2^2u_3 - 4g_2u_3u_1^2 + 24g_3u_1u_2u_3]x_1^2x_2 \\
& + 24[3g_2^2u_3^3 - 3g_3u_2^2u_3 + 5g_2u_1u_2u_3]x_1x_2^2 \\
& + 6[-g_2u_2^3 + 12g_3u_2u_3^2 - 16g_2u_3^2u_1 + 4u_1^2u_2]x_1x_2x_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\quad 81B' = {} & [12g_2^2g_3u_3^3 + (g_2^3 + 72g_3^2)u_2^2u_3 + 12g_2^2u_3u_1^2 - 72g_2g_3u_1u_2u_3]x_1^3 \\
& + 96[g_2^2u_3^3 + g_2u_1u_2u_3]x_2^3 - 8[g_2u_2u_3^2 + u_1u_2^2]x_3^3 \\
& + 96[-3g_3u_2u_3^2 + g_2u_3^2u_1 - u_1^2u_2]x_2^2x_3 \\
& + 12[12g_3u_3^3 + g_2u_2^2u_3 - 4u_3u_1^2]x_2x_3^2 \\
& + 8[g_2^2u_3^3 - 3g_3u_2^2u_3 + 3g_2u_1u_2u_3]x_3^2x_1 \\
& + 2[-g_2^2u_2^3 + 12g_2g_3u_2u_3^2 - 12g_2^2u_3^2u_1 + 12g_3u_1u_2^2]x_3x_1^2 \\
& + 4[(108g_3^2 + 2g_2^3)u_3^3 + 21g_2g_3u_2^2u_3 - 36g_3u_3u_1^2 - 6g_2^2u_1u_2u_3]x_1^2x_2 \\
& + 12[36g_2g_3u_3^3 + g_2^2u_2^2u_3 - 20g_2u_3u_1^2 + 48g_3u_1u_2u_3]x_1x_2^2 \\
& + 24[4u_1^3 - 12g_3u_3^2u_1 - g_2u_1u_2^2]x_1x_2x_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(9)\quad 243B'' = {} & 4\{[(2g_2^4 - 36g_2g_3^2)u_3^3 + 9g_2^2g_3u_2^2u_3 + 36g_2g_3u_3u_1^2 \\
& \qquad - (2g_2^3 + 144g_3^2)u_1u_2u_3]x_1^3 \\
& + 12[12g_2g_3u_3^3 + g_2^2u_2^2u_3 - 4g_2u_3u_1^2]x_2^3 \\
& + 8[-3g_3u_2u_3^2 + g_2u_3^2u_1 - u_1^2u_2]x_3^3 \\
& + 24[-4u_1^3 - g_2^2u_2u_3^2 + 12g_3u_3^2u_1]x_2^2x_3 \\
& + 8[g_2^2u_3^3 + 6g_3u_2^2u_3 - 6g_2u_1u_2u_3]x_2x_3^2 \\
& + [12g_2g_3u_3^3 - g_2^2u_2^2u_3 - 12g_2u_3u_1^2 + 48g_3u_1u_2u_3]x_3^2x_1 \\
& + 2[(36g_3^2 - g_2^3)u_2u_3^2 - 12g_2g_3u_3^2u_1 + 12g_3u_1^2u_2 \\
& \qquad - g_2^2u_1u_2^2]x_3x_1^2 \\
& + [36g_2^2g_3u_3^3 + (5g_2^3 + 144g_3^2)u_2^2u_3 + 12g_2^2u_3u_1^2 \\
& \qquad - 168g_2g_3u_1u_2u_3]x_1^2x_2 \\
& + 8[(108g_3^2 - g_2^3)u_3^3 + 12g_2g_3u_2^2u_3 - 36g_3u_3u_1^2 \\
& \qquad - 3g_2^2u_1u_2u_3]x_1x_2^2 \\
& + 2[g_2^2u_2^3 - 12g_2g_3u_2u_3^2 + 12g_2u_1^2u_2 \\
& \qquad - 48g_3u_1u_2^2]x_1x_2x_3\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(10)\quad 729B''' = 4\{&[(36g_2^3g_3 - 864g_3^3)u_3^3 + 3g_2^4u_2^2u_3 \\
&\quad + (4g_2^3 + 288g_3^2)u_3u_1^2 - 72g_2^2g_3u_1u_2u_3]x_1^3 \\
&+ 32[g_2^3u_3^3 + 6g_2g_3u_2^2u_3 - 3g_2^2u_1u_2u_3]x_2^3 \\
&+ 8[-4u_1^3 - g_2^2u_2u_3^2 + 12g_3u_3^2u_1]x_3^3 \\
&+ 8[-g_2^2u_2^3 - 24g_2g_3u_2u_3^2 + 12g_2^2u_3^2u_1 \\
&\quad - 24g_2u_1^2u_2 + 48g_3u_1u_2^2]x_2^2x_3 \\
&+ 4[12g_2g_3u_3^3 + 5g_2^2u_2^2u_3 + 12g_2u_3u_1^2 \\
&\quad - 96g_3u_1u_2u_3]x_2x_3^2 \\
&+ 8[(36g_3^2 - g_2^3)u_3^3 - 12g_3u_3u_1^2 + g_2^2u_1u_2u_3]x_3^2x_1 \\
&+ 8[12g_3u_1^3 + (g_2^3 - 36g_3^2)u_3^2u_1 - g_2^2u_1^2u_2]x_3x_1^2 \\
&+ 4[6g_2^4 - 108g_2g_3^2]u_3^3 + 27g_2^2g_3u_2^2u_3 + 84g_2g_3u_3u_1^2 \\
&\quad - (10g_2^3 + 288g_3^2)u_1u_2u_3]x_1^2x_2 \\
&+ 4[36g_2^2g_3u_3^3 + (g_2^3 + 288g_3^2)u_2^2u_3 + 12g_2^2u_3u_1^2 \\
&\quad - 192g_2g_3u_1u_2u_3]x_1x_2^2 \\
&+ 8[12g_2u_1^3 + (4g_2^3 - 144g_3^2)u_2u_3^2 + 12g_2g_3u_3^2u_1 \\
&\quad - 48g_3u_1^2u_2 + g_2^2u_1u_2^2]x_1x_2x_3\}.
\end{aligned}
$$

## Covarianten und Contravarianten.

$$(11)\qquad f = x_1x_3^2 - 4x_2^3 + g_2x_1^2x_2 + g_3x_1^3.$$

$$(12)\qquad 27H = g_2^2x_1^3 - 12x_2x_3^2 + 36g_3x_1^2x_2 + 12g_2x_1x_2^2.$$

$$
\begin{aligned}
(13)\quad 243\Psi = 16\{&3g_3(g_2^3 - 24g_3^2)x_1^6 + 576g_3x_2^6 + 4x_3^6 \\
&+ 4g_2(g_2^3 - 18g_3^2)x_1^5x_2 + 192g_2^2x_1x_2^5 \\
&+ 5(36g_3^2 - g_2^3)x_1^4x_3^2 + 60g_2^2g_3x_1^4x_2^2 \\
&+ 720g_2g_3x_1^2x_2^4 + 240g_2x_2^4x_3^2 + 1440g_3^2x_1^3x_2^3 \\
&+ 120g_2g_3x_1^3x_2x_3^2 + 1440g_3x_1x_2^3x_3^2 \\
&+ 120g_2^2x_1^2x_2^2x_3^2\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(14)\quad 3^8\Omega = 16x_3\{&3(g_2^3 - 36g_3^2)^2x_1^8 + 256\cdot 27g_2^2x_2^8 - 16x_3^8 \\
&+ 144(36g_2g_3^3 - g_2^4g_3)x_1^7x_2 + 1024\cdot 81g_2g_3x_1x_2^7 \\
&+ 144(48g_2^2g_3^2 - g_2^5)x_1^6x_2^2 + 256\cdot 27(36g_3^2 + g_2^3)x_1^2x_2^6 \\
&+ 144(g_2^3g_3 - 24g_3^3)x_1^6x_3^2 + 1024\cdot 27g_3x_2^6x_3^2 \\
&+ 64\cdot 27(36g_3^3 + g_2^3g_3)x_1^5x_2^3 + 1792\cdot 27g_2^2g_3x_1^3x_2^5 \\
&+ 192(g_2^4 - 18g_2g_3^2)x_1^5x_2x_3^2 + 1024\cdot 9g_2^2x_1x_2^5x_3^2 \\
&+ 1440(g_2^4 + 36g_2g_3^2)x_1^4x_2^4 + 24(36g_3^2 - g_2^3)x_1^4x_3^4 \\
&+ 1152g_2x_2^4x_3^4 + 2880g_2^2g_3x_1^4x_2^2x_3^2 \\
&+ 1280\cdot 27g_2g_3x_1^2x_2^4x_3^2 + 576g_2g_3x_1^3x_2x_3^4 \\
&+ 256\cdot 27g_3x_1x_2^3x_3^4 + 576g_2^2x_1^2x_2^2x_3^4 \\
&+ 2560\cdot 27g_3^2x_1^3x_2^3x_3^2\}.
\end{aligned}
$$

(15) $27P = -g_2u_2^3 - 36g_3u_2u_3^2 + 24g_2u_3^2u_1 + 12u_1^2u_2.$

(16) $27Q = 32u_1^3 - 16g_3u_2^3 - 16g_2^2u_2u_3^2 + 288g_3u_3^2u_1 + 8g_2u_1u_2^2.$

(17) $$\begin{aligned}27F = {} & 4g_3u_2^6 + 16(27g_3^2 - g_2^3)u_3^6 - 4g_2u_1u_2^5 + 432u_1^4u_3^2 \\ & + 864g_3u_1^2u_3^4 - g_2^2u_2^4u_3^2 + 72g_2g_3u_2^2u_3^4 - 96g_2^2u_1u_2u_3^4 \\ & + 16u_1^3u_2^3 + 144g_3u_1u_2^3u_3^2 - 120g_2u_1^2u_2^2u_3^2.\end{aligned}$$

(18) $$\begin{aligned}3^9\Pi = 4u_3\{ & 256\cdot 27u_1^8 + 3g_2^4u_2^8 - 256(27g_3^2 - g_2^3)^2u_3^8 \\ & - 288g_2^2g_3u_1u_2^7 - 256\cdot 27g_2u_1^6u_2^2 \\ & + 144(48g_3^2 + g_2^3)u_1^2u_2^6 - 2048\cdot 27g_3u_1^6u_3^2 \\ & + 288(24g_3^3 - g_2^3g_3)u_2^6u_3^2 + 512\cdot 27g_3u_1^5u_2^3 \\ & - 256\cdot 27g_2g_3u_1^3u_2^5 + 2048\cdot 9g_2^2u_1^5u_2u_3^2 \\ & + 384(g_2^4 - 18g_2g_3^2)u_1u_2^5u_3^2 + 1440g_2^2u_1^4u_2^4 \\ & + 512\cdot 9(27g_3^2 - g_2^3)u_1^4u_3^4 + 96(g_2^5 - 27g_2^2g_3^2)u_2^4u_3^4 \\ & + 512\cdot 9(27g_3^3 - g_2^3g_3)u_1u_2^3u_3^4 - 512\cdot 135g_2g_3u_1^4u_2^2u_3^2 \\ & - 640\cdot 9g_2^2g_3u_1^2u_2^4u_3^2 + 256\cdot 9(g_2^4 - 27g_2g_3^2)u_1^2u_2^2u_3^4 \\ & + 5120\cdot 27g_3^2u_1^3u_2^3u_3^2\}.\end{aligned}$$

Formen, deren Classe niedriger ist als die Ordnung.

(19) $$\begin{aligned}27J = {} & 8[3g_3x_1^3x_3 - x_1x_3^3 - 12x_2^3x_3 + 3g_2x_1^2x_2x_3]u_1 \\ & + 2[-g_2^2x_1^3x_3 - 4x_2x_3^3 - 36g_3x_1^2x_2x_3 - 12g_2x_1x_2^2x_3]u_2 \\ & + [(g_2^3 - 36g_3^2)x_1^4 - 48g_2x_2^4 + 4x_3^4 - 24g_2g_3x_1^3x_2 \\ & - 288g_3x_1x_2^3 - 24g_2^2x_1^2x_2^2]u_3.\end{aligned}$$

(20) $$\begin{aligned}27K = {} & 8[g_2g_3x_1^4 + 2g_2^2x_1^3x_2 - 8g_2x_1x_2^3 + 36g_3x_1^2x_2^2 \\ & - g_2x_1^2x_3^2 + 12x_2^2x_3^2]u_1 \\ & + [(g_2^3 - 36g_3^2)x_1^4 + 16g_2x_2^4 - 4x_3^4 - 16g_2g_3x_1^3x_2 \\ & - 8g_2^2x_1^2x_2^2 + 24g_3x_1^2x_3^2 + 16g_2x_1x_2x_3^2]u_2 \\ & + 16[-g_2g_3x_1^3x_3 - 8g_2x_2^3x_3 - 2g_2^2x_1^2x_2x_3 \\ & - 36g_3x_1x_2^2x_3]u_3.\end{aligned}$$

(21) $$\begin{aligned}243K' = 8\{ & [(g_2^3 - 36g_3^2)x_1^4 + 144g_2x_2^4 + 12x_3^4 + 576g_3x_1x_2^3 \\ & + 24g_2^2x_1^2x_2^2 + 72g_3x_1^2x_3^2 + 48g_2x_1x_2x_3^2]u_1 \\ & + 2[-144g_3x_2^4 + 2(g_2^3 - 36g_3^2)x_1^3x_2 - 24g_2^2x_1x_2^3 \\ & - 36g_2g_3x_1^2x_2^2 - 3g_2^2x_1^2x_3^2 - 12g_2x_2^2x_3^2 \\ & - 72g_3x_1x_2x_3^2]u_2 \\ & + 8[(36g_3^2 - g_2^3)x_1^3x_3 + 72g_3x_2^3x_3 + 18g_2g_3x_1^2x_2x_3 \\ & + 12g_2^2x_1x_2^2x_3]u_3\}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(22)\quad 243E = 2\{&12[-g_2^2x_1^4x_3-48x_2^4x_3-24g_3x_1^3x_2x_3-8x_1x_2x_3^3]u_1^2\\
&+2[2x_3^5+(g_2^3-54g_3^2)x_1^4x_3+12g_3x_1^2x_3^3\\
&\quad -36g_2g_3x_1^3x_2x_3+4g_2x_1x_2x_3^3-12g_2^2x_1^2x_2^2x_3]u_2^2\\
&+4[-3g_2^2g_3x_1^4x_3-432g_3x_2^4x_3-2g_2^2x_1^2x_3^3\\
&\quad -24g_2x_2^2x_3^3-216g_3^2x_1^3x_2x_3-96g_2^2x_1x_2^3x_3\\
&\quad -72g_3x_1x_2x_3^3-216g_2g_3x_1^2x_2^2x_3]u_3^2\\
&+[(36g_2g_3^2-g_2^4)x_1^5+24g_2^2g_3x_1^4x_2+48g_2^2x_1x_2^4\\
&\quad +4g_2x_1x_3^4+24g_2^3x_1^3x_2^2+288g_2g_3x_1^2x_2^3\\
&\quad -24g_2g_3x_1^3x_3^2+96g_2x_2^3x_3^2-24g_2^2x_1^2x_2x_3^2]u_2u_3\\
&+12[48g_2x_2^5+(36g_3^2-g_2^3)x_1^4x_2+144g_3x_1x_2^4\\
&\quad +4x_2x_3^4+24g_2g_3x_1^3x_2^2+24g_2^2x_1^2x_2^3\\
&\quad +2g_2^2x_1^3x_3^2+72g_3x_1^2x_2x_3^2+24g_2x_1x_2^2x_3^2]u_3u_1\\
&+16[3g_2g_3x_1^4x_3-g_2x_1^2x_3^3+3g_2^2x_1^3x_2x_3\\
&\quad -12g_2x_1x_2^3x_3]u_1u_2\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(23)\quad 729E' = 8\{&4[3g_2g_3x_1^4x_3-g_2x_1^2x_3^3-12x_2^2x_3^3-48g_2x_1x_2^3x_3\\
&\quad -108g_3x_1^2x_2^2x_3]u_1^2\\
&+[3g_2^2g_3x_1^4x_3-g_2^2x_1^2x_3^3+4g_2x_2^2x_3^3+4g_2^3x_1^3x_2x_3\\
&\quad +36g_2g_3x_1^2x_2^2x_3]u_2^2\\
&+2[(g_2^4-18g_2g_3^2)x_1^4x_3+48g_2^2x_2^4x_3+6g_2g_3x_1^2x_3^3\\
&\quad +72g_3x_2^2x_3^3+24g_2^2g_3x_1^3x_2x_3+288g_2g_3x_1x_2^3x_3\\
&\quad +8g_2^2x_1x_2x_3^3+648g_3^2x_1^2x_2^2x_3]u_3^2\\
&+[3(g_2^3g_3-36g_3^3)x_1^5-48g_2^2x_2^5+(g_2^4-108g_2g_3^2)x_1^4x_2\\
&\quad -432g_2g_3x_1x_2^4-12g_3x_1x_3^4-4g_2x_2x_3^4\\
&\quad -96g_2^2g_3x_1^3x_2^2-24(g_2^3+36g_3^2)x_1^2x_2^3\\
&\quad +2(36g_3^2-g_2^3)x_1^3x_3^2-288g_3x_2^3x_3^2\\
&\quad -24g_2^2x_1x_2^2x_3^2]u_2u_3\\
&+[(36g_2g_3^2-g_2^4)x_1^5+24g_2^2g_3x_1^4x_2+48g_2^2x_1x_2^4\\
&\quad +4g_2x_1x_3^4+24g_2^3x_1^3x_2^2+288g_2g_3x_1^2x_2^3\\
&\quad -24g_2g_3x_1^3x_3^2+96g_2x_2^3x_3^2-24g_2^2x_1^2x_2x_3^2]u_3u_1\\
&+[-4x_3^5-(g_2^3+36g_3^2)x_1^4x_3+48g_2x_2^4x_3+24g_3x_1^2x_3^3\\
&\quad -48g_2g_3x_1^3x_2x_3+576g_3x_1x_2^3x_3\\
&\quad +24g_2^2x_1^2x_2^2x_3]u_1u_2\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(24)\quad 3^7 E'' = 16\{&16[x_3^5 - 9g_3^2x_1^4x_3 - 24g_2x_2^4x_3 - 12g_2g_3x_1^3x_2x_3 \\
&- 72g_3x_1x_2^3x_3 - 2g_2x_1x_2x_3^3 - 6g_2^2x_1^2x_2^2x_3]u_1^2 \\
&+ [-g_2^4x_1^4x_3 - 48g_2^2x_2^4x_3 - 96g_3x_2^2x_3^3 \\
&- 48g_2^2g_3x_1^3x_2x_3 - 288g_2g_3x_1x_2^3x_3 - 8g_2^2x_1x_2x_3^3 \\
&- 864g_3^2x_1^2x_2^2x_3]u_2^2 \\
&+ 4[9(24g_3^3 - g_2^3g_3)x_1^4x_3 - 144g_2g_3x_2^4x_3 \\
&+ 2(g_2^3 - 36g_3^2)x_1^2x_3^3 - 8g_2^2x_2^2x_3^3 \\
&+ 8(18g_2g_3^2 - g_2^4)x_1^3x_2x_3 - 864g_3^2x_1x_2^3x_3 \\
&- 24g_2g_3x_1x_2x_3^3 - 72g_2^2g_3x_1^2x_2^2x_3]u_3^2 \\
&+ [(36g_2^2g_3^2 - g_2^5)x_1^5 + 576g_2g_3x_2^5 \\
&+ 12(g_2^3g_3 + 36g_3^3)x_1^4x_2 + 48(g_2^3 + 72g_3^2)x_1x_2^4 \\
&+ 4g_2^2x_1x_3^4 + 48g_3x_2x_3^4 + 24(g_2^4 + 12g_2g_3^2)x_1^3x_2^2 \\
&+ 576g_2^2g_3x_1^2x_2^3 + 96g_2^2x_2^3x_3^2 \\
&+ 24(36g_3^2 - g_2^3)x_1^2x_2x_3^2 + 288g_2g_3x_1x_2^2x_3^2]u_2u_3 \\
&+ 4[3(g_2^3g_3 - 36g_3^3)x_1^5 - 48g_2^2x_2^5 + (g_2^4 - 108g_2g_3^2)x_1^4x_2 \\
&- 432g_2g_3x_1x_2^4 - 12g_3x_1x_3^4 - 4g_2x_2x_3^4 - 96g_2^2g_3x_1^3x_2^2 \\
&- 24(g_2^3 + 36g_3^2)x_1^2x_2^3 + 2(36g_3^2 - g_2^3)x_1^3x_3^2 \\
&- 288g_3x_2^3x_3^2 - 24g_2^2x_1x_2^2x_3^2]u_3u_1 \\
&+ 8[3g_2^2g_3x_1^4x_3 + 144g_3x_2^4x_3 + 8g_2x_2^2x_3^3 \\
&+ 2(g_2^3 + 36g_3^2)x_1^3x_2x_3 + 24g_2^2x_1x_2^3x_3 \\
&+ 24g_3x_1x_2x_3^3 + 72g_2g_3x_1^2x_2^2x_3]u_1u_2\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(25)\quad 729M = 8\{&[3(28g_2g_3^2 - g_2^4)x_1^6x_3 - 960g_2x_2^6x_3 + 4g_2x_1^2x_3^5 - 48x_2^2x_3^5 \\
&- 6912g_3x_1x_2^5x_3 - 40g_2g_3x_1^4x_3^3 \\
&+ 60(g_2^3 - 36g_3^2)x_1^4x_2^2x_3 - 720g_2^2x_1^2x_2^4x_3 \\
&- 960g_2g_3x_1^3x_2^3x_3 - 80g_2^2x_1^3x_2x_3^3 - 320g_2x_1x_2^3x_3^3 \\
&- 1440g_3x_1^2x_2^2x_3^3]u_1 \\
&+ [-4x_3^7 + (11g_2^3g_3 - 324g_3^3)x_1^6x_3 - 12g_3x_1^2x_3^5 \\
&+ 10(g_2^4 - 36g_2g_3^2)x_1^5x_2x_3 - 96g_2^2x_1x_2^5x_3 \\
&- 8g_2x_1x_2x_3^5 + 5(36g_3^2 - g_2^3)x_1^4x_3^3 - 80g_2x_2^4x_3^3 \\
&- 120g_2^2g_3x_1^4x_2^2x_3 - 720g_2g_3x_1^2x_2^4x_3 - 80g_2^3x_1^3x_2^3x_3 \\
&+ 80g_2g_3x_1^3x_2x_3^3 + 40g_2^2x_1^2x_2^2x_3^3]u_2 \\
&+ [(36g_2g_3^3 - g_2^4g_3)x_1^7 + 384g_2^2x_2^7 + 2(48g_2^2g_3^2 - g_2^5)x_1^6x_2 \\
&+ 4032g_2g_3x_1x_2^6 + 36(g_2^3g_3 + 36g_3^3)x_1^5x_2^2 \\
&+ 288(g_2^3 + 36g_3^2)x_1^2x_2^5 + 4(g_2^4 - 18g_2g_3^2)x_1^5x_3^2 \\
&+ 3456g_3x_2^5x_3^2 + 40(g_2^4 + 36g_2g_3^2)x_1^4x_2^3 \\
&+ 1680g_2^2g_3x_1^3x_2^4 + 20g_2g_3x_1^3x_3^4 + 160g_2x_2^3x_3^4 \\
&+ 120g_2^2g_3x_1^4x_2x_3^2 + 960g_2^2x_1x_2^4x_3^2 + 40g_2^2x_1^2x_2x_3^4 \\
&+ 720g_3x_1x_2^2x_3^4 + 4320g_3^2x_1^3x_2^2x_3^2 \\
&+ 2880g_2g_3x_1^2x_2^3x_3^2]u_3\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(26)\quad 3^8 M' = 16\{&4[12x_3^7+15(g_2^3g_3-36g_3^3)x_1^6x_3-3456g_3x_2^6x_3\\
&-36g_3x_1^2x_3^5+6(g_2^4-108g_2g_3^2)x_1^5x_2x_3\\
&-1440g_2^2x_1x_2^5x_3-24g_2x_1x_2x_3^5+5(36g_3^2-g_2^3)x_1^4x_3^3\\
&-720g_2x_2^4x_3^3-720g_2^2g_3x_1^4x_2^2x_3-6480g_2g_3x_1^2x_2^4x_3\\
&+240(-g_2^3-36g_3^2)x_1^3x_2^3x_3-2880g_3x_1x_2^3x_3^3\\
&+120g_2^2x_1^2x_2^2x_3^3]u_1+[5(36g_2^2g_3^2-g_2^5)x_1^6x_3\\
&+1728g_2^2x_2^6x_3+12g_2^2x_1^2x_3^5+48g_2x_2^2x_3^5\\
&+72(g_2^3g_3+36g_3^3)x_1^5x_2x_3+17280g_2g_3x_1x_2^5x_3\\
&+288g_3x_1x_2x_3^5+5760g_3x_2^4x_3^3\\
&+180(g_2^4+12g_2g_3^2)x_1^4x_2^2x_3+720(g_2^3+72g_3^2)x_1^2x_2^4x_3\\
&+5760g_2^2g_3x_1^3x_2^3x_3+80(36g_3^2-g_2^3)x_1^3x_2x_3^3\\
&+960g_2^2x_1x_2^3x_3^3+1440g_2g_3x_1^2x_2^2x_3^3]u_2\\
&+2[-(g_2^3-36g_3^2)^2x_1^7-3456g_2g_3x_2^7\\
&+42(g_2^4g_3-36g_2g_3^3)x_1^6x_2+576(-g_2^3-36g_3^2)x_1x_2^6\\
&+36(g_2^5-48g_2^2g_3^2)x_1^5x_2^2-6048g_2^2g_3x_1^2x_2^5\\
&+108(24g_3^3-g_2^3g_3)x_1^5x_3^2-1152g_2^2x_2^5x_3^2\\
&+360(-g_2^3g_3-36g_3^3)x_1^4x_2^3\\
&+240(-g_2^4-36g_2g_3^2)x_1^3x_2^4+20(g_2^3-36g_3^2)x_1^3x_3^4\\
&-1440g_3x_2^3x_3^4+120(18g_2g_3^2-g_2^4)x_1^4x_2x_3^2\\
&-8640g_2g_3x_1x_2^4x_3^2-360g_2g_3x_1^2x_2x_3^4\\
&-240g_2^2x_1x_2^2x_3^4\\
&-1440g_2^2g_3x_1^3x_2^2x_3^2-25920g_3^2x_1^2x_2^3x_3^2]u_3\}.
\end{aligned}
$$

Formen, deren Ordnung niedriger ist als die Classe.

$$
\begin{aligned}
(27)\quad 729\overline{J} = 8\{&4[72g_3u_1^3u_3+8(g_2^3-27g_3^2)u_1u_3^3+(g_2^3-36g_3^2)u_2^3u_3\\
&-12g_2^2u_1^2u_2u_3+18g_2g_3u_1u_2^2u_3]x_1\\
&+8[24g_2u_1^3u_3-3g_2g_3u_2^3u_3+4(g_2^3-27g_3^2)u_2u_3^3\\
&-108g_3u_1^2u_2u_3+6g_2^2u_1u_2^2u_3]x_2\\
&+[-48u_1^4+g_2^2u_2^4+16(27g_3^2-g_2^3)u_3^4-48g_3u_1u_2^3\\
&+24g_2u_1^2u_2^2]x_3\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(28)\quad 27\overline{K} = &[-16u_1^4-g_2^2u_2^4+16(27g_3^2-g_2^3)u_3^4+32g_3u_1u_2^3\\
&-8g_2u_1^2u_2^2+288g_3u_1^2u_3^2+24g_2g_3u_2^2u_3^2\\
&-32g_2^2u_1u_2u_3^2]x_1+16[-g_3u_2^4-4u_1^3u_2+g_2u_1u_2^3\\
&+12g_2u_1^2u_3^2+g_2^2u_2^2u_3^2-36g_3u_1u_2u_3^2]x_2\\
&+32[4u_1^3u_3+g_3u_2^3u_3-g_2u_1u_2^2u_3]x_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(29)\quad 729\overline{K}' = 4\{4[&-12g_2u_1^3u_2 - g_2^2u_1u_2^3 + 36g_3u_1^2u_2^2 + 12g_2^2u_1^2u_3^2\\
&+ 3(36g_3^2 - g_2^3)u_2^2u_3^2 - 36g_2g_3u_1u_2u_3^2]x_1\\
&+ [-144u_1^4 - g_2^2u_2^4 + 48(g_2^3 - 27g_3^2)u_3^4 + 24g_2u_1^2u_2^2\\
&+ 864g_3u_1^2u_3^2 + 72g_2g_3u_2^2u_3^2 - 96g_2^2u_1u_2u_3^2]x_2\\
&+ 8[g_2^2u_2^3u_3 + 12g_2u_1^2u_2u_3 - 36g_3u_1u_2^2u_3]x_3\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(30)\quad 243\overline{E} = \;&[16(g_2^4 - 27g_2g_3^2)u_3^5 + 144g_2u_1^4u_3 + (g_2^3 - 144g_3^2)u_2^4u_3\\
&+ 288g_2g_3u_1^2u_3^3 + 24g_2^2g_3u_2^2u_3^3 - 576g_3u_1^3u_2u_3\\
&+ 144g_2g_3u_1u_2^3u_3 + 32(g_2^3 - 54g_3^2)u_1u_2u_3^3\\
&- 24g_2^2u_1^2u_2^2u_3]x_1^2 + 12[16(27g_3^2 - g_2^3)u_3^5\\
&- 144u_1^4u_3 - g_2^2u_2^4u_3 + 288g_3u_1^2u_3^3 + 24g_2g_3u_2^2u_3^3\\
&- 32g_2^2u_1u_2u_3^3 + 24g_2u_1^2u_2^2u_3]x_2^2\\
&+ 16[-3g_3u_2^4u_3 + 12g_2u_1^2u_3^3 + g_2^2u_2^2u_3^3\\
&- 12u_1^3u_2u_3 + 3g_2u_1u_2^3u_3 - 36g_3u_1u_2u_3^3]x_3^2\\
&+ 2[-g_2^2u_2^5 + 48u_1^4u_2 + 48g_3u_1u_2^4\\
&+ 16(27g_3^2 - g_2^3)u_2u_3^4 - 24g_2u_1^2u_2^3 - 192g_2u_1^3u_3^2\\
&+ 24g_2g_3u_2^3u_3^2 + 864g_3u_1^2u_2u_3^2 - 48g_2^2u_1u_2^2u_3^2]x_3x_1\\
&+ 32[-3g_2g_3u_2^4u_3 + 12g_2^2u_1^2u_3^3 + g_2^3u_2^2u_3^3\\
&- 12g_2u_1^3u_2u_3 + 3g_2^2u_1u_2^3u_3 - 36g_2g_3u_1u_2u_3^3]x_1x_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(31)\quad 729\overline{E}' = 8\{&[48(27g_3^3 - g_2^3g_3)u_3^5 - 144g_3u_1^4u_3 + 9g_2^2g_3u_2^4u_3\\
&- 16g_2^3u_1^2u_3^3 + 4(18g_2g_3^2 - g_2^4)u_2^2u_3^3\\
&- 8(g_2^3 + 18g_3^2)u_1u_2^3u_3 + 48g_2^2g_3u_1u_2u_3^3\\
&+ 144g_2g_3u_1^2u_2^2u_3]x_1^2 + 8[3g_2g_3u_2^4u_3 - 24g_2^2u_1^2u_3^3\\
&+ 2(g_2^3 - 54g_3^2)u_2^2u_3^3 + 48g_2u_1^3u_2u_3 + 72g_2g_3u_1u_2u_3^3\\
&- 108g_3u_1^2u_2^2u_3]x_2^2 + 2[48u_1^4u_3 + g_2^2u_2^4u_3\\
&- 144g_3u_1^2u_3^3 - 12g_2g_3u_2^2u_3^3 - 24g_3u_1u_2^3u_3\\
&+ 16g_2^2u_1u_2u_3^3]x_3^2 + [-g_2^2u_2^5 + 48u_1^4u_2 + 48g_3u_1u_2^4\\
&+ 16(27g_3^2 - g_2^3)u_2u_3^4 - 24g_2u_1^2u_2^3 - 192g_2u_1^3u_3^2\\
&+ 24g_2g_3u_2^3u_3^2 + 864g_3u_1^2u_2u_3^2 - 48g_2^2u_1u_2^2u_3^2]x_2x_3\\
&+ [-48u_1^5 + g_2^2u_1u_2^4 + 16(g_2^3 - 27g_3^2)u_1u_3^4\\
&+ 24g_2u_1^3u_2^2 - 48g_3u_1^2u_2^3 + 288g_3u_1^3u_3^2\\
&+ 4(g_2^3 - 36g_3^2)u_2^3u_3^2 - 48g_2^2u_1^2u_2u_3^2\\
&+ 72g_2g_3u_1u_2^2u_3^2]x_3x_1 + 2[16(27g_2g_3^2 - g_2^4)u_3^5\\
&- 48g_2u_1^4u_3 + (g_2^3 + 72g_3^2)u_2^4u_3 - 288g_2g_3u_1^2u_3^3\\
&- 24g_2^2g_3u_2^2u_3^3 + 288g_3u_1^3u_2u_3 - 120g_2g_3u_1u_2^3u_3\\
&+ 864g_3^2u_1u_2u_3^3 + 24g_2^2u_1^2u_2^2u_3]x_1x_2\}.
\end{aligned}
$$

$$(32)\quad 3^7\overline{E}'' = 4\{[16(g_2^5-27g_2^2g_3^2)u_3^5-48g_2^2u_1^4u_3-3g_2^4u_2^4u_3$$
$$+96g_2^2g_3u_1^2u_3^3+72(g_2^3g_3-24g_3^3)u_2^2u_3^3$$
$$+576g_2g_3u_1^3u_2u_3+144g_2^2g_3u_1u_2^3u_3$$
$$+32(18g_2g_3^2-g_2^4)u_1u_2u_3^3-24(g_2^3+72g_3^2)u_1^2u_2^2u_3]x_1^2$$
$$+4[16(g_2^4-27g_2g_3^2)u_3^5-48g_2u_1^4u_3-3g_2^3u_2^4u_3$$
$$+288g_2g_3u_1^2u_3^3+24g_2^2g_3u_2^2u_3^3+96g_2g_3u_1u_2^3u_3$$
$$-32g_2^3u_1u_2u_3^3-24g_2^2u_1^2u_2^2u_3]x_2^2$$
$$+16[4g_2^2u_1^2u_3^3+(36g_3^2-g_2^3)u_2^2u_3^3-12g_2u_1^3u_2u_3$$
$$-g_2^2u_1u_2^3u_3-12g_2g_3u_1u_2u_3^3+36g_3u_1^2u_2^2u_3]x_3^2$$
$$+8[-48u_1^5+g_2^2u_1u_2^4+16(g_2^3-27g_3^2)u_1u_3^4$$
$$+24g_2u_1^3u_2^2-48g_3u_1^2u_2^3+288g_3u_1^3u_3^2$$
$$+4(g_2^3-36g_3^2)u_2^3u_3^2-48g_2^2u_1^2u_2u_3^2$$
$$+72g_2g_3u_1u_2^2u_3^2]x_2x_3+8[48(g_2^3g_3-27g_3^3)u_3^5$$
$$-144g_3u_1^4u_3-9g_2^2g_3u_2^4u_3+16(54g_3^2-g_2^3)u_1^2u_3^3$$
$$+4(g_2^4-18g_2g_3^2)u_2^2u_3^3+48g_2^2u_1^3u_2u_3$$
$$+4(g_2^3+72g_3^2)u_1u_2^3u_3-48g_2^2g_3u_1u_2u_3^3$$
$$-216g_2g_3u_1^2u_2^2u_3]x_1x_2\}.$$

$$(33)\quad 729\overline{M} = [576(27g_3^3-g_2^3g_3)u_3^7-1728u_1^6u_3-(g_2^3+288g_3^2)u_2^6u_3$$
$$+576(27g_3^2-g_2^3)u_1^2u_3^5+48(27g_2g_3^2-g_2^4)u_2^2u_3^5$$
$$+576g_2g_3u_1u_2^5u_3-1728g_3u_1^4u_3^3+180g_2^2g_3u_2^4u_3^3$$
$$+1296g_2u_1^4u_2^2u_3-276g_2^2u_1^2u_2^4u_3-1152g_3u_1^3u_2^3u_3$$
$$-1152g_2^2u_1^3u_2u_3^3-32(7g_2^3+108g_3^2)u_1u_2^3u_3^3$$
$$+6048g_2g_3u_1^2u_2^2u_3^3]x_1+8[48(27g_2g_3^2-g_2^4)u_3^7$$
$$-6g_2g_3u_2^6u_3+432u_1^5u_2u_3+3g_2^2u_1u_2^5u_3$$
$$+144(27g_3^2-g_2^3)u_1u_2u_3^5-1296g_2u_1^4u_3^3$$
$$+(216g_3^2-g_2^3)u_2^4u_3^3+216g_3u_1^2u_2^4u_3$$
$$-168g_2u_1^3u_2^3u_3+4320g_3u_1^3u_2u_3^3-216g_2g_3u_1u_2^3u_3^3$$
$$-72g_2^2u_1^2u_2^2u_3^3]x_2+2[g_2^2u_2^7-48g_3u_1u_2^6$$
$$+192(g_2^3-27g_3^2)u_1u_3^6+24g_2u_1^2u_2^5+1728u_1^5u_3^2$$
$$-72g_2g_3u_2^5u_3^2-48u_1^4u_2^3-3456g_3u_1^3u_3^4$$
$$+16(2g_2^3-27g_3^2)u_2^3u_3^4+108g_2^2u_1u_2^4u_3^2$$
$$+576g_2^2u_1^2u_2u_3^4-864g_2g_3u_1u_2^2u_3^4-288g_2u_1^3u_2^2u_3^2$$
$$-864g_3u_1^2u_2^3u_3^2]x_3.$$

$$(34)\quad 3^7M' = 4\{2[16(27g_2^2g_3^2-g_2^5)u_3^7-9g_2^2g_3u_2^6u_3$$
$$+48(27g_3^3-g_2^3g_3)u_2^2u_3^5-144g_2u_1^5u_2u_3$$
$$+(7g_2^3+288g_3^2)u_1u_2^5u_3+16(27g_2g_3^2-g_2^4)u_1u_2u_3^5$$

$$+144g_2^2u_1^4u_3^3+(g_2^4+144g_2g_3^2)u_2^4u_3^3$$
$$+720g_3u_1^4u_2^2u_3-288g_2g_3u_1^2u_2^4u_3+24g_2^2u_1^3u_2^3u_3$$
$$-2016g_2g_3u_1^3u_2u_3^3-360g_2^2g_3u_1u_2^3u_3^3$$
$$+8(540g_3^2+13g_2^3)u_1^2u_2^2u_3^3]x_1$$
$$+[576(27g_3^3-g_2^3g_3)u_3^7+1728u_1^6u_3-3g_2^3u_2^6u_3$$
$$+192(27g_3^2-g_2^3)u_1^2u_3^5+80(27g_2g_3^2-g_2^4)u_2^2u_3^5$$
$$+96g_2g_3u_1u_2^5u_3-8640g_3u_1^4u_3^3+132g_2^2g_3u_2^4u_3^3$$
$$-336g_2u_1^4u_2^2u_3-12g_2^2u_1^2u_2^4u_3+384g_2^2u_1^3u_2u_3^3$$
$$-224g_2^3u_1u_2^3u_3^3+2592g_2g_3u_1^2u_2^2u_3^3]x_2$$
$$+2[g_2^2u_1u_2^6+16(g_2^4-27g_2g_3^2)u_2u_3^6-48u_1^5u_2^2$$
$$-48g_3u_1^2u_2^5+(g_2^3-144g_3^2)u_2^5u_3^2+24g_2u_1^3u_2^4$$
$$-192g_2^2u_1^3u_3^4+24g_2^2g_3u_2^3u_3^4+528g_2u_1^4u_2u_3^2$$
$$+168g_2g_3u_1u_2^4u_3^2+864g_2g_3u_1^2u_2u_3^4$$
$$+16(2g_2^3-135g_3^2)u_1u_2^2u_3^4-1440g_3u_1^3u_2^2u_3^2$$
$$-24g_2^2u_1^2u_2^3u_3^2]x_3\}.$$

## Einige abgeleitete Formen.

(35) $$3^9R=3^9(64S^3-T^2)=4^6(g_2^3-27g_3^2).$$

(36) $$243\,C=243(24SH-Tf)$$
$$=32\{(g_2^3-18g_3^2)x_1^3+72g_3x_2^3+18g_2g_3x_1^2x_2+12g_2^2x_1x_2^2$$
$$-18g_3x_1x_3^2-12g_2x_2x_3^2\}.$$

(37) $$729\,D=729(8S^2f-3TH)$$
$$=64\{-g_2^2g_3x_1^3-8g_2^2x_2^3+2(g_2^3-54g_3^2)x_1^2x_2$$
$$-36g_2g_3x_1x_2^2+2g_2^2x_1x_3^2+36g_3x_2x_3^2\}.$$

(38) $$729\,Y=729(3TP-4SQ)$$
$$=64\{-8g_2u_1^3+g_2g_3u_2^3+36g_3u_1^2u_2-2g_2^2u_1u_2^2$$
$$+4(g_2^3-27g_3^2)u_2u_3^2\}.$$

(39) $$3^8Z=3^8(TQ-48S^2P)$$
$$=256\{72g_3u_1^3+(g_2^3-36g_3^2)u_2^3-12g_2u_1^2u_2+18g_2g_3u_1u_2^2$$
$$+24(27g_3^2-g_2^3)u_1u_3^2\}.$$

(40) $$3^{11}\Phi=3^{11}\{-12RF-288STP^2+768S^2PQ-8TQ^2\}$$
$$=4^6.2\{-576g_3u_1^6+3(24g_3^3-g_2^3g_3)u_2^6+32(27g_3^2-g_2^3)^2u_3^6$$
$$+192g_2^2u_1^5u_2+4(g_2^4-18g_2g_3^2)u_1u_2^5$$
$$-720g_2g_3u_1^4u_2^2-60g_2^2g_3u_1^2u_2^4$$
$$+480(27g_3^2-g_2^3)u_1^4u_3^2+10(g_2^5-27g_2^2g_3^2)u_2^4u_3^2$$
$$+1440g_3^2u_1^3u_2^3+480(27g_3^3-g_2^3g_3)u_1u_2^3u_3^2$$
$$+240(g_2^4-27g_2g_3^2)u_1^2u_2^2u_3^2\}.$$

## § 4.

### Die canonische Gleichungsform der Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt und deren Concomitanten.

Aus der Gleichung der allgemeinen Curve dritter Ordnung

$$(A) \qquad x_1 x_3^2 - 4x_2^3 + g_2 x_1^2 x_2 + g_3 x_1^3 = 0$$

ergiebt sich durch die Substitution $g_2 = g_3 = 0$ die *canonische Gleichung der Curve mit Rückkehrpunkt*

$$(B) \qquad x_1 x_3^2 - 4x_2^3 = 0.$$

Was das hier zu Grunde liegende Coordinatendreieck betrifft, so ist $x_1 = 0$ die Wendetangente, $x_2 = 0$ die Verbindungslinie von Wende- und Rückkehrpunkt, $x_3 = 0$ die Rückkehrtangente; dualistisch stellt $u_1 = 0$ den Rückkehrpunkt, $u_2 = 0$ den Schnittpunkt von Rückkehr- und Wendetangente, $u_3 = 0$ den Wendepunkt dar.

Da die Concomitanten der Curve (B) sehr einfache Werthe besitzen und wir mehrere derselben nöthig haben bei Beantwortung der Frage nach der Transformation einer beliebigen Curve mit Rückkehrpunkt auf die canonische Form (B), so stelle ich auch diese Concomitanten hier zusammen, indem ich dabei aber, um möglichst allgemein zu sein, von der mit Buchstabencoefficienten versehenen Gleichungsform

$$(B') \qquad f \equiv a x_1 x_3^2 - 4b x_2^3 = 0$$

ausgehe. Es ergiebt sich:

Formen, für welche Classe = Ordnung.

$$(1) \qquad S = 0,$$

$$(2) \qquad T = 0,$$

$$(3) \qquad u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3,$$

$$(4) \qquad 9\Theta = -a(a u_2^2 x_3^2 + 12 b u_1^2 x_1 x_2 - 24 b u_3 u_1 x_2 x_3),$$

$$(5) \qquad 27\Theta' = 8a^2 b(6 b u_1 x_2^2 - a u_2 x_3^2) u_1,$$

$$(6) \qquad 81\Theta'' = -64 a^4 b^2 u_1^2 x_3^2,$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} 27B = 2a\{&216 b^2 u_3 u_1^2 x_2^3 - a(12 b u_1 u_3^2 + a u_2^5) x_3^3 \\ &+ 30 a b u_3 u_1^2 x_3^2 x_1 - 12 a b u_1^3 x_3 x_1^2 - 12 a b u_1 u_2^2 x_2^2 x_3 \\ &+ 12 a b u_1 u_2 u_3 x_2 x_3^2 + 12 a b u_1^2 u_2 x_1 x_2 x_3\}, \end{aligned}$$

$$(8) \qquad \begin{aligned} 81B' = 8a^3 b(&-12 b u_1 u_2 x_2^2 - a u_2^2 x_3^2 + 12 b u_1^2 x_1 x_2 \\ &- 6 b u_3 u_1 x_2 x_3) u_1 x_3, \end{aligned}$$

$$(9) \qquad 243B' = -32 a^4 b^2 (12 b u_1 x_2^2 + a u_2 x_3^2) u_1^2 x_3,$$

$$(10) \qquad 729B''' = -128 a^6 b^3 u_1^3 x_3^3.$$

## Covarianten und Contravarianten.

(11) $f = a x_1 x_3^2 - 4 b x_2^3,$

(12) $9H = -4 a^2 b x_2 x_3^2,$

(13) $243\,\Psi = 64 a^6 b^2 x_3^6,$

(14) $3^8 \Omega = -256 a^9 b^3 x_3^9,$

(15) $9P = 4 a^2 b u_1^2 u_2,$

(16) $27 Q = 32 a^3 b^2 u_1^3,$

(17) $27 F = 16 a^2 b (27 b u_1 u_3^2 + a u_2^3) u_1^3,$

(18) $729\,\Pi = 1024 a^7 b^5 u_1^8 u_3.$

## Formen, deren Classe niedriger ist als die Ordnung.

(19) $27 J = 4 a^2 b (-24 b u_1 x_2^3 + a u_3 x_3^3 - 2 a u_2 x_2 x_3^2 - 2 a u_1 x_1 x_3^2) x_3,$

(20) $27 K = 4 a^3 b (24 b u_1 x_2^2 - a u_2 x_3^2) x_3^2,$

(21) $81 K' = 32 a^5 b^2 u_1 x_3^4,$

(22) $243 E = -8 a^3 b (144 b^2 u_1^2 x_2^4 - a^2 u_2^2 x_3^4 - 12 a b u_1 u_3 x_2 x_3^3 + 24 a b u_1^2 x_1 x_2 x_3^2) x_3,$

(23) $729 E' = -32 a^5 b^2 (12 b u_1 x_2^2 + a u_2 x_3^2) u_1 x_3^3,$

(24) $3^7 E'' = 256 a^7 b^3 u_1^2 x_3^5,$

(25) $729 M = -32 a^6 b^2 (12 b u_1 x_2^2 + a u_2 x_3^2) x_3^5,$

(26) $3^7 M' = 256 a^8 b^3 u_1 x_3^7.$

## Formen, deren Ordnung niedriger ist als die Classe.

(27) $243 \overline{J} = -128 a^5 b^3 u_1^4 x_3,$

(28) $27 \overline{K} = -16 a^3 b^2 (u_1 x_1 + 4 u_2 x_2 - 8 u_3 x_3) u_1^3,$

(29) $81 \overline{K}' = -64 a^4 b^3 u_1^4 x_2,$

(30) $81 \overline{E} = 32 a^3 b^2 (-18 b u_1 u_3 x_2^2 - 2 a u_2 u_3 x_3^2 + a u_1 u_2 x_3 x_1) u_1^3,$

(31) $243 \overline{E}' = 128 a^5 b^3 (-u_1 x_1 + u_2 x_2 + 2 u_3 x_3) u_1^4 x_3,$

(32) $729 \overline{E}'' = -512 a^6 b^4 u_1^5 x_2 x_3,$

(33) $243 \overline{M} = 32 a^4 b^2 (36 b u_1 u_2 u_3 x_2 - a u_2^3 x_3 + 36 b u_1 u_3^2 x_3 - 18 b u_1^2 u_3 x_1) u_1^4,$

(34) $729 \overline{M}' = 128 a^5 b^3 (18 b u_1 u_3 x_2 - a u_2^2 x_3) u_1^5.$

Um die Gleichung einer beliebigen Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt in die obige canonische Form zu transformiren ist es nur nöthig die Gleichungen für die Seiten des canonischen Coordinatendreiecks aufzustellen. Ich will diese Aufgabe etwas verallgemeinern, indem ich neben der Seite zugleich auch die gegenüberliegende Ecke

des Coordinatendreiecks vermittelst Zwischenformen suche.*) Es sind also Ausdrücke anzugeben, die sich von den Producten $u_i x_i$ nur um einen Proportionalitätsfactor unterscheiden. Mit Benutzung der Formen $P$, $Q$, $\overline{K}$ und $\overline{K}'$ findet man:

$$(35)\qquad \begin{cases} \Gamma u_1 x_1 = 2(4Q^2 u_x - \overline{K}\,Q + 24\overline{K}'\,P), \\ \Gamma u_2 x_2 = -36\overline{K}'\,P, \\ \Gamma u_3 x_3 = 2\overline{K}\,Q - 12\overline{K}'\,P + Q^2 u_x, \end{cases}$$

wobei

$$(36)\qquad \Gamma = 9Q^2.$$

Noch auf einige andere Formen, die eine besonders einfache geometrische Bedeutung haben, möchte ich hinweisen. Dass der Rückkehrpunkt dreifach zählend durch $Q = 0$ dargestellt wird und dass die Cayley'sche Curve $P = 0$ aus dem doppelt zählenden Rückkehrpunkte und dem Schnittpunkte der Rückkehr- und Wendetangente besteht, ist schon lange bekannt und werde nur der Vollständigkeit halber hier erwähnt. Ebenso ist es selbstverständlich, dass nun $\Pi = 0$ den Wendepunkt und achtfach den Rückkehrpunkt, sowie dass $\Omega = 0$ neunfach die Rückkehrtangente liefert. Neu dagegen dürfte sein, dass, wie aus unserer Tabelle und für $\varrho = 0$ aus dem Satze zu Gleichung (22) der hier nachfolgenden Note hervorgeht, *die Zwischenform* $\Theta''$ *den Rückkehrpunkt und dessen Tangente zweifach,* $B'''$ *dieselben Stücke dreifach zählend repräsentirt. Die Verbindungslinie von Wende- und Rückkehrpunkt* berechnet man am einfachsten aus $\overline{K}' = 0$, einer Zwischenform erster Ordnung, vierter Classe, die ausser dieser Geraden noch den *Rückkehrpunkt* vierfach enthält; die entsprechende Form erster Classe, vierter Ordnung $K'$ *liefert linear den Rückkehrpunkt und vierfach dessen Tangente.* Die Covariante $\Psi$ stellt die sechste Potenz der *Rückkehrtangente* dar. Noch weitere ähnliche Resultate lassen sich leicht unserer Tabelle entnehmen.

Darmstadt, im September 1887.

*) Vgl. den Anfang von § 1 der hier nachfolgenden Note „Ueber die Transformation der Gleichung der ebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf die Normalform."

# Ueber die Transformation der Gleichung der ebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf die Normalform.

Von

Friedrich Dingeldey in Darmstadt.

Die Transformation der Gleichung der *allgemeinen* Curve dritter Ordnung auf die bekannte Hesse'sche Normalform

$$a(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+6lx_1x_2x_3=0$$

ist schon mehrfach Gegenstand der Bearbeitung gewesen und durchgeführt worden. Ausser den bahnbrechenden Arbeiten von Hesse*) und Aronhold**) sind in dieser Hinsicht noch diejenigen von Clebsch***) und Herrn Gundelfinger†) zu erwähnen. Was die *mit Singularitäten behafteten* Curven betrifft, so sind dieselben zwar auch schon mehrfach im Sinne der Theorie der ternären cubischen Formen behandelt worden††), jedoch ist die Transformation dieser Curven auf ihre Normalform noch nicht durchgeführt. Der Durchführung dieser Transformation im Falle des *Doppelpunktes* soll vorliegende Note gewidmet sein. In Betreff der *Curve mit Rückkehrpunkt* verweise ich auf meine hier vorangehende Arbeit: *Die Concomitanten der ternären cubischen Formen*, § 4.

## § 1.

### Gleichungen für die Seiten und Ecken des Coordinatendreiecks.

Die Normalform der Gleichung einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt, die hier zu Grunde gelegt werden soll, ist folgende:

$$f\equiv a(x_1^3+x_2^3)+6lx_1x_2x_3=0; \tag{1}$$

der Doppelpunkt liegt alsdann im Schnittpunkte der beiden Seiten $x_1=0$ und $x_2=0$ des Coordinatendreiecks, welche zugleich die Doppelpunktstangenten darstellen; die dritte Seite $x_3=0$ ist die Wendelinie.

*) Crelle's Journal Bd. 28, S. 68 u. 97; Bd. 36, S. 143; Bd. 38, S. 241 u. 257.

**) Crelle's Journal Bd. 39, S. 140 und Bd. 55, S. 97.

***) Math. Annalen, Bd. 2, S. 384.

†) Math. Annalen, Bd. 5, S, 442 und Bd. 8, S. 136.

††) Aronhold in Crelle's Journal Bd. 55, S. 165, Gundelfinger in Math. Annalen Bd. 4, S. 561 und Gordan in Math. Annalen Bd. 3, S. 631.

Was die dualistischen Liniencoordinaten betrifft, so sind $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ die Schnittpunkte der Wendelinie mit den beiden Doppelpunktstangenten $x_2 = 0$, resp. $x_1 = 0$, und $u_3 = 0$ repräsentirt den Doppelpunkt.

Wir können unser Transformationsproblem im wesentlichen als gelöst betrachten, wenn wir die Gleichungen der Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ oder auch der gegenüberliegenden Ecken $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ des Coordinatendreiecks einzeln aufgestellt haben. Am bequemsten dürfte es sein zu diesem Zwecke von einer Methode Gebrauch zu machen, die Herr Gundelfinger empfiehlt*) und die darin besteht, *jede Seite und die ihr gegenüberliegende Ecke des Coordinatendreiecks gleichzeitig vermittelst Zwischenformen zu suchen.*

Zunächst will ich hierzu unter Benutzung der Cayley'schen Bezeichnungsweise**) die Werthe derjenigen Concomitanten zusammenstellen, welche im Folgenden zur Anwendung kommen. Dieselben sind einer Arbeit von Herrn Cayley***) entnommen, in welcher die Concomitanten der Hesse'schen Normalform $ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3 + 6lx_1x_2x_3$ berechnet werden; wir haben für unseren Fall daselbst nur $b = a$ und $c = 0$ zu setzen. Da die Concomitanten der transformirten Form sich von denen der ursprünglichen Form nur um einen Factor unterscheiden, der eine gewisse Potenz der Transformationsdeterminante ist, so füge ich gleich jene Potenz, deren Exponent bekanntlich mit dem Gewicht der betreffenden Form übereinstimmt, als Factor hinzu; die Determinante selbst werde mit $r$ bezeichnet.

Man hat alsdann:

$$(2) \quad r^4 S = l^4,$$

$$(3) \quad r^6 T = -8l^6,$$

$$(4) \quad r^2 H = al^2(x_1^3 + x_2^3) - 2l^3 x_1 x_2 x_3,$$

$$(5) \quad r^4 P = l(-a^2 u_3^2 + 4l^2 u_1 u_2) u_3,$$

$$(6) \quad r^6 Q = -2l^3(5a^2 u_3^2 + 12l^2 u_1 u_2) u_3,$$

$$(7) \quad r^2 \Theta = -(l^2 u_1^2 + 2alu_2u_3)x_1^2 - (l^2 u_2^2 + 2alu_3u_1)x_2^2 - l^2 u_3^2 x_3^2 + 2l^2 u_2 u_3 x_2 x_3 + 2l^2 u_3 u_1 x_3 x_1 + (a^2 u_3^2 + 2l^2 u_1 u_2) x_1 x_2,$$

$$(8) \quad r^4 \Theta' = 2l^2 \{(l^2 u_1^2 - 2alu_2u_3)x_1^2 + (l^2 u_2^2 - 2alu_3u_1)x_2^2 + l^2 u_3^2 x_3^2 - 2l^2 u_2 u_3 x_2 x_3 - 2l^2 u_3 u_1 x_3 x_1 + (3a^2 u_3^2 - 2l^2 u_1 u_2) x_1 x_2\},$$

---

*) Math. Annalen Bd. 4, S. 561 und Bd. 5, S. 443.

**) Ueber die Beziehungen der Cayley'schen Bezeichnungsweise zu sonst noch üblichen Bezeichnungen vergleiche man den hier vorangehenden Aufsatz „*Die Concomitanten der ternären cubischen Formen, insbesondere der Form* $x_1x_3^2 - 4x_2^3 + g_2x_1^2x_2 + g_3x_1^3$", S. 160 u. 161.

***) „On the 34 Concomitants of the Ternary Cubic." American Journal of Mathematics, Bd. IV, 1881.

$$(9)\quad r^6\Theta'' = 4l^4\{(-l^2u_1^2+6alu_2u_3)x_1^2+(-l^2u_2^2+6alu_3u_1)x_2^2 - l^2u_3^2x_3^2+2l^2u_2u_3x_2x_3+2l^2u_3u_1x_3x_1 +(9a^2u_3^2+2l^2u_1u_2)x_1x_2\},$$

$$(10)\quad r^6\overline{K} = -8al^3\{(6lu_2^2+2au_3u_1)x_1+(6lu_1^2+2au_2u_3)x_2 - au_3^2x_3\}u_3^2,$$

$$(11)\quad r^8\overline{K}' = 8al^5\{(2lu_2^2-2au_3u_1)x_1+(2lu_1^2-2au_2u_3)x_2 +au_3^2x_3\}u_3^2,$$

$$(12)\quad r^9\overline{J} = 64a^2l^6(u_2x_2-u_1x_1)u_3^3,$$

$$(13)\quad r^6\Psi = 64a^2l^6(x_1^6+x_2^6-10x_1^3x_2^3),$$

$$(14)\quad r^{12}R = r^{12}(64S^3-T^2) = 0,$$

$$(15)\quad r^6C = r^6(24SH-Tf) = 32al^6(x_1^3+x_2^3),$$

$$(16)\quad r^{10}Y = r^{10}(3TP-4SQ) = 64a^2l^7u_3^3,$$

$$(17)\quad r^{12}Z = r^{12}(TQ-48S^2P) = 128a^2l^9u_3^3.$$

Ich werde meine Aufgabe auf zwei verschiedene Arten lösen. Einmal werde ich eine *cubische Gleichung* suchen, deren Wurzeln die Producte $u_ix_i\,(i=1,2,3)$ aus den Seiten und den gegenüberliegenden Ecken des Coordinatendreiecks sind; das andere Mal werde ich Ausdrücke suchen, die jenen Producten $u_ix_i$ *proportional* sind. Der hierbei auftretende Proportionalitätsfactor ist selbst eine Contravariante, denn die Form $f$ besitzt keine Zwischenform, die in den $u_i$ und $x_i$ zugleich linear ist; es können also die Producte $u_ix_i$ selbst nicht *rational und ganz* durch Zwischenformen dargestellt werden.

Um jene cubische Gleichung zu bilden, müssen wir nur die in ihr auftretenden Coefficienten, also die betreffenden symmetrischen Functionen ihrer Wurzeln suchen. Mit Benutzung von (2), (3), (7) und (8) ergiebt sich

$$r^8(T\Theta+4S\Theta') = 16l^8(u_1^2x_1^2+u_2^2x_2^2+u_3^2x_3^2-2u_2u_3x_2x_3-2u_3u_1x_3x_1-2u_1u_2x_1x_2) +16a^2l^6u_3^2x_1x_2,$$

also

$$(18)\quad 64l^8(u_2u_3x_2x_3+u_3u_1x_3x_1+u_1u_2x_1x_2) = 16l^8u_x^2+16a^2l^6u_3^2x_1x_2 - r^8(T\Theta+4S\Theta');$$

was hier die Bestimmung von $a^2l^6u_3^2x_1x_2$ angeht, so findet man:

$$(19)\quad 1024a^2l^{12}u_3^2x_1x_2 = r^{14}(16S^2\Theta''-8ST\Theta'+T^2\Theta),$$

eine Gleichung, deren Grad in den Coefficienten der Grundform sich wegen (14) noch wesentlich reduciren lässt. Führen wir nämlich an Stelle von $S$ und $T$ durch die Substitution

$$(20)\quad 4S = \rho^2,\quad T = \rho^3$$

eine einzige Grösse $\varrho$ ein, so folgt zunächst aus (2) und (3)

$$r^2\varrho = -2l^2, \tag{21}$$

wobei $\varrho = 2\sqrt{S} = \sqrt[3]{T}$ und bei $\sqrt{S}$ das Vorzeichen so zu wählen ist, dass $2\sqrt{S} = \sqrt[3]{T}$. Mit Berücksichtigung von (21) geht dann (19) über in

$$64a^2l^4u_3^2x_1x_2 = r^6(\Theta'' - 2\varrho\Theta' + \varrho^2\Theta), \tag{22}$$

ein Ausdruck, der noch dadurch bemerkenswerth sein dürfte, dass er uns *das Quadrat des Doppelpunktes und das Product der beiden Doppelpunktstangenten liefert.* Dabei ist $\Theta'' - 2\varrho\Theta' + \varrho^2\Theta$ nichts anderes als die für $6H - \varrho f$ gebildete Form $\Theta$, ebenso wie der mit (22) äquivalente Ausdruck in (19) die Form $\Theta$, gebildet für $24SH - Tf$, darstellt. Bei Curven dritter Ordnung, die in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfallen, verschwindet diese Form $\Theta_{24SH-Tf}$, wie Herr Gundelfinger*) zeigte, und ihr Verschwinden sagt aus, dass dort $24SH - Tf$ ein vollständiger Cubus, und zwar der Cubus jener Geraden ist. Durch Substitution von (22) in (18) und mit Benutzung von (20) und (21) ergiebt sich schliesslich:

$$\begin{aligned} &32\varrho^3(u_2u_3x_2x_3 + u_3u_1x_3x_1 + u_1u_2x_1x_2) \\ &\quad = 8\varrho^3u_x^2 - (\Theta'' + 6\varrho\Theta' + 9\varrho^2\Theta). \end{aligned} \tag{23}$$

Das Product $u_1u_2u_3x_1x_2x_3$ erhält man leicht mit Hilfe der Formen $f$, $H$, $S$, $T$, $P$ und $Q$. Das Product der drei Seiten des Coordinatendreiecks, also der beiden Doppelpunktstangenten und der Wendelinie, wird nämlich geliefert durch

$$-64l^7x_1x_2x_3 = r^6(Tf + 8SH) \tag{24}$$

oder

$$-16l^3x_1x_2x_3 = r^2(\varrho f + 2H),$$

das Product der Ecken durch

$$-256l^5u_1u_2u_3 = r^{10}(5TP + 4SQ) \tag{25}$$

oder

$$-64l^5u_1u_2u_3 = r^6(5\varrho P + Q).$$

Wir erhalten somit:

$$64 \cdot 16l^8u_1u_2u_3x_1x_2x_3 = r^8(\varrho f + 2H)(5\varrho P + Q) \tag{26}$$

oder

$$64\varrho^4u_1u_2u_3x_1x_2x_3 = (\varrho f + 2H)(5\varrho P + Q),$$

so dass wegen (23), (26) und $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = u_x$ die $u_ix_i$ die Wurzeln der folgenden in $X$ cubischen Gleichung sind:

$$\begin{aligned} &64\varrho^4X^3 - 64\varrho^4u_xX^2 + 2\varrho\{8\varrho^3u_x^2 - (\Theta'' + 6\varrho\Theta' + 9\varrho^2\Theta)\}X \\ &\quad - (\varrho f + 2H)(5\varrho P + Q) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

*) Math. Annalen Bd. 4, S. 566.

Welche Wurzel für die Wendelinie, welche für die Doppelpunktstangenten zu verwerthen ist, kann im gegebenen Falle durch (22) oder auch durch den Umstand leicht entschieden werden, dass der Doppelpunkt bekanntlich dreifach zählend durch (16) oder (17) gefunden werden kann, Ausdrücke, die offenbar mit

$$r^6(3\varrho P - Q) = 16 a^2 l^3 u_3^3 \tag{28}$$

äquivalent sind.

Uebrigens konnte die Gleichung (27) auch abgeleitet werden aus der von Herrn Gundelfinger*) aufgestellten cubischen Gleichung für die drei Geraden, aus denen eine entartete Curve dritter Ordnung besteht, und deren Schnittpunkte. Wir hätten alsdann nur die dort auftretenden Concomitanten zu ersetzen durch die entsprechenden für die zerfallende Form $Tf + 8SH$ gebildeten Concomitanten.

Auf dem zweiten oben angegebenen Wege findet man unter Benutzung der Formen $S$, $T$, $P$, $Q$, $\overline{K}$, $\overline{K}'$, $J$ und $Y$ für die Producte der Unbekannten $u_i x_i$ und einer und derselben Grösse $\Gamma$ die Werthe:

$$\begin{cases} \Gamma u_1 x_1 = (\varrho \overline{K} - 6\overline{K}' - 6\varrho^2 P u_x + 2\varrho Q u_x)\sqrt{-\varrho} - 6\overline{J}\sqrt{2}, \\ \Gamma u_2 x_2 = (\varrho \overline{K} - 6\overline{K}' - 6\varrho^2 P u_x + 2\varrho Q u_x)\sqrt{-\varrho} + 6\overline{J}\sqrt{2}, \\ \Gamma u_3 x_3 = 2(6\overline{K}' - \varrho \overline{K} + 4\varrho Q u_x - 12\varrho^2 P u_x)\sqrt{-\varrho}, \end{cases} \tag{29}$$

wobei der Proportionalitätsfactor $\Gamma$ den Werth besitzt

$$\Gamma = 12\varrho(Q - 3\varrho P)\sqrt{-\varrho} \tag{30}$$

und nach (28) mit dem Cubus des Doppelpunktes äquivalent ist.

## § 2.

## Beiläufige Bemerkungen.

Es möge nun noch *eine quadratische Gleichung aufgestellt werden, deren Wurzeln die mit einer Constanten multiplicirten Cuben $ax_1^3$ und $ax_2^3$ der Doppelpunktstangenten sind.* Aus den beiden Formeln (13) und (15) folgt unter Berücksichtigung von (21):

$$4\varrho(ax_1^3 + ax_2^3) = \varrho f - 6H \tag{31}$$

und

$$192\varrho^3 a^2 x_1^3 x_2^3 = 2\Psi + \varrho(\varrho f - 6H)^2,$$

woraus für $ax_1^3$ und $ax_2^3$ die in $X$ quadratische Gleichung hervorgeht:

$$192\varrho^3 X^2 + 48\varrho^2(6H - \varrho f)X + \varrho(\varrho f - 6H)^2 + 2\Psi = 0. \tag{32}$$

Was die *Wendepunkte* unserer Curve betrifft, so werden diese im allgemeinen Falle bekanntlich durch die Contravariante 9ter Classe**)

*) Ibid. S. 568.

**) Vgl. Cayley a. a. O. S. 5, Gleichung 18 oder Clebsch „Vorlesungen über Geometrie", hrsgg. von Lindemann, S. 578.

$$\Pi = -\frac{1}{36}\sum \pm \frac{\partial P}{\partial u_1}\frac{\partial Q}{\partial u_2}\frac{\partial F}{\partial u_3} \tag{33}$$

geliefert, welche nun in den sechsfach zählenden Doppelpunkt $u_3 = 0$ und die drei noch vorhandenen Wendepunkte zerfällt; es ist

$$r^{15}.\,\Pi = -512\,a^3 l^9 u_3^6 (u_1^3 - u_2^3). \tag{34}$$

Man kann natürlich die Wendepunkte auch bestimmen als die Schnittpunkte der drei durch $C = 0$ (Gl. (15)) definirten Geraden mit der Wendelinie $x_3 = 0$.

Die Covariante 9ter Ordnung

$$\Omega = \frac{1}{18}\sum \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_3}, \tag{35}$$

welche allgemein *das Product der den neun Wendepunkten zugehörigen „harmonischen Geraden"* darstellt, zerfällt in den Cubus des Productes der beiden Doppelpunktstangenten und die drei noch übrigen harmonischen Geraden; es ist

$$r^9\Omega = -512\,a^3 l^9 x_1^3 x_2^3 (x_1^3 - x_2^3). \tag{36}$$

Die Contravariante 6ter Classe

$$\Phi = -12RF - 288STP^2 + 768S^2PQ - 8TQ^2 \tag{37}$$

stellt die *sechste Potenz des Doppelpunktes* dar, indem sie wegen $R = 0$ zunächst in $-8T(Q - 3\varrho P)^2$ zerfällt, wo alsdann $Q - 3\varrho P$ nach (28) den Cubus des Doppelpunktes darstellt.

Darmstadt, den 2. September 1887.

# Ueber die Verwerthung der $\vartheta$-Functionen für die Curven dritter Ordnung nebst einer Anwendung auf die zu einer Curve dritter Ordnung apolaren Curven.

Von

Otto Schlesinger in Basel.

## Einleitung.

Seit den grundlegenden Arbeiten von Clebsch sind die Parameterdarstellungen der Curven vom Geschlechte Null und vom Geschlechte 1 häufig zum Ausgangspunkt für die Betrachtung der betreffenden geometrischen Gebilde gemacht worden. Es ist jedoch bemerkenswerth, dass trotz dieses gemeinsamen Ausgangspunktes die Darstellung im Falle der elliptischen Curven auch methodisch eine wesentlich andere geblieben ist, als bei den rationalen. Indem man bei den Letzteren die homogenen Coordinaten eines Curvenpunktes drei ganzen rationalen Functionen proportional setzen durfte, ergab sich sofort, dass jede Punktgruppe durch eine ganze rationale Function vertreten wurde, die man nun ganz ebenso in die Rechnung einführen konnte, wie es bei Behandlung der Geometrie auf der geraden Linie geschieht.*) Bei den elliptischen Curven findet man an Stelle eines solchen directen Verfahrens in der Regel mannigfaltige Anwendungen des Abel'schen Satzes und der Transformationstheorie der elliptischen Functionen.**) Jedoch schon bei sehr einfachen Aufgaben über lineare Systeme von Punktgruppen, die bestimmten Bedingungen genügen sollen, sieht man sich gezwungen, die Behandlungsweise der unicursalen Curven nachzubilden, und es treten alsdann manche Gesichtspunkte hervor, welche, wie ich glaube, auch abgesehen von dem speciellen Problem, dem sie

*) Man vergleiche z. B. die Anwendung der Invariantentheorie bei Rosenow, Die Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Breslau 1873, ferner: Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie Bd. II, p. 883. Haase, Math. Annalen Band II.

**) Man vergl. z. B. Harnack, Math. Ann. Bd. IX u. XII.

dienen, für die Behandlung der Geometrie auf Curven vom Geschlechte eins von Wichtigkeit sind.

Die nachfolgenden Blätter beschränken sich zunächst auf die allgemeine Curve dritter Ordnung. Wenn man die homogenen Coordinaten einer solchen Curve in bekannter Weise gewissen Thetaproducten proportional setzt, so werden auch irgendwelche Punktgruppen derselben durch Thetaproducte repräsentirt. Man hat jedoch hier, wie sich zeigen wird, bei naturgemässem Gange unendlich viele verschiedene Classen solcher Producte zu unterscheiden, die sich durch einfache Functionalgleichungen definiren lassen. Indem man diese Thatsache eingehend verfolgt (§ 1), gelangt man dazu, einen Satz über lineare Aggregate von $\vartheta$-Producten zu beweisen, der für die weitere Anwendung von Wichtigkeit ist. Nachdem alsdann (§ 2) die Vertheilung jener $\vartheta$-Producte auf der Curve dritter Ordnung studirt ist, gehe ich in § 3 dazu über, den am Ende des ersten Paragraphen abgeleiteten Satz auf ein specielles geometrisches Problem anzuwenden.

Es handelt sich nämlich darum, auf der gegebenen $C^3$ alle Gruppen von je $p$ Punkten zu bestimmen, welche Polar-$p$-Ecke einer oder mehrerer zu der $C^3$ apolaren Classencurven in dem Sinne vorstellen, welchen ich in meiner kürzlich erschienenen Abhandlung in diesen Annalen näher definirt habe. Ein specieller Fall dieser Aufgabe ist in der erwähnten Arbeit in ganz anderer, mehr geometrischer Weise erledigt worden; hier gelingt es, dieselbe in voller Allgemeinheit zu behandeln und so die geometrische Beziehung aufzudecken, welche dem bisher nur algebraisch definirten Begriff der Apolarität (in diesem Falle) entspricht. Um Wiederholungen zu vermeiden, setze ich die l. c. gegebene Definition der Polar-$p$-Ecke voraus und verweise deshalb auf den § 1 der Abhandlung, während ich ausdrücklich bemerke, dass die übrigen Theile derselben hier nicht in Frage kommen.

Da die erlangten Resultate auch für Curven vom Geschlechte 0 gültig bleiben, so gebe ich am Schluss eine kurze Andeutung, wie man dieselben auf diese Curven übertragen kann.

Es ist von vornherein klar, dass die angewandte Methode auch für elliptische Curven höherer Ordnung in der Ebene und im Raume in ganz analoger Weise Anwendung finden kann, und ich behalte mir vor, die Resultate, die ich darüber besitze resp. noch zu erlangen hoffe, in einiger Zeit zu veröffentlichen.

## § 1.

## Ueber lineare Aggregate von Thetaproducten.

In theilweiser Uebereinstimmung mit der üblichen Nomenclatur*) verstehe ich unter einer $\vartheta$-Function $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem Index $\varrho$ oder kurz unter einer $\vartheta_\varrho^n$-Function jede eindeutige für alle endlichen Werthe von $u$ endliche Function von $u$, die den Gleichungen genügt:

$$\begin{aligned} &\vartheta_\varrho^n(u+\omega) = (-1)^n \vartheta_\varrho^n(u), \\ &\vartheta_\varrho^n(u+\omega') = (-1)^n e^{-\frac{n\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}\varrho} \vartheta_\varrho^n(u)^{**}). \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei sind $\omega$, $\omega'$ beliebige Grössen, die nur der Bedingung genügen, dass der imaginäre Theil von $\frac{\omega'}{\omega}$ einen von Null verschiedenen positiven Werth hat.

Verstehen wir, nach Jacobi, unter $\vartheta_1(u)$ die Reihe:

$$\vartheta_1(u) = \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \omega' + 2\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}$$

welche bekanntlich den Gleichungen

$$\begin{aligned} \vartheta_1(u+\omega) &= -\vartheta_1(u), \\ \vartheta_1(u+\omega') &= -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2u+\omega')} \vartheta_1(u) \end{aligned}$$

genügt, und wählen wir $n$ Grössen $\beta_1 \ldots \beta_n$, deren Summe gleich $\varrho$ ist, so stellt, wie man leicht sieht:

$$\psi(u) = \vartheta_1(u-\beta_1)\,\vartheta_1(u-\beta_2) \ldots \vartheta_1(u-\beta_n) \tag{2}$$

eine $\vartheta_\varrho^n$ vor und man erkennt so, dass überhaupt Functionen der geforderten Art in unendlicher Anzahl existiren.

Aus unseren Definitionsgleichungen und den bekannten Sätzen über doppelt-periodische Functionen resultiren mit Leichtigkeit die Sätze:

---

*) Cfr. Weber, acta mathematica Bd. 6, p. 330. Schottky, Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen dreier Variabeln. p. 6.

**) Die so definirte Function ist ein specieller Fall der allgemeinen $\Theta$-Function $n^{\text{ten}}$ Ordnung, die (für eine beliebige Anzahl von Variablen) Herr Schottky (l. c. p. 1—6) nach Angaben von Herrn Weierstrass aufgestellt hat. Sie geht aus der Letzteren hervor, indem man die dort auftretenden Constanten $2\omega_{11}$, $2\omega_{11}'$, $2\eta_{11}$, $2\eta_{11}'$ durch resp. $\omega, \omega', 0, -\frac{2\pi i}{\omega}$ ersetzt, und besitzt alsdann die Charakteristiken $\mu = -\frac{\varrho}{\omega}$ $\nu = \frac{n}{2}$. Wenn ich trotzdem für den vorliegenden Zweck eine neue Bezeichnung einführe, so geschieht es, um den sprachlichen Ausdruck möglichst einfach zu gestalten.

1. *Der Quotient zweier $\vartheta_\varrho^n$ ist eine doppelt-periodische Function mit den Perioden $\omega, \omega'$.*

2. *Eine $\vartheta_\varrho^n$ hat in jedem Periodenparallelogramm $n$ Nullpunkte.*

3. *Eine $\vartheta_\varrho^n$ ist eindeutig bis auf einen constanten Factor bestimmt, sobald $(n-1)$ Nullpunkte $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ derselben im ersten (d. h. dem von den Ecken $0, \omega, \omega'$ gebildeten) Periodenparallelogramm gegeben sind.*

Setzen wir nämlich in dem Ausdruck für $\psi(u)$ an Stelle von $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$ resp. $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$, an Stelle von $\beta_n$ aber $\varrho - \sum_1^{n-1} \alpha_i$, so erhalten wir *eine* $\vartheta_\varrho^n$-Function der gewünschten Art, nämlich:

$$\vartheta_1(u-\alpha_1)\,\vartheta_1(u-\alpha_2)\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{n-1})\,\vartheta_1\left(u-\varrho+\sum_1^{n-1}\alpha_i\right).$$

Gäbe es noch eine zweite $\vartheta_\varrho^n$, die $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ zu Nullpunkten hätte, so wäre

$$\frac{\vartheta_\varrho^n(u)}{\vartheta_1(u-a_1)\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{n-1})\,\vartheta_1\left(u-\varrho+\sum_1^{n-1}\alpha_i\right)}$$

eine doppeltperiodische Function, die höchstens eine Unendlichkeitsstelle besitzen könnte, und als solche gleich einer Constanten. Mithin schliesst die Formel

$$(3)\qquad \vartheta_\varrho^n(u) = C\vartheta_1(u-\alpha_1)\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{n-1})\vartheta_1\left(u-\varrho+\sum_1^{n-1}\alpha_i\right)$$

alle möglichen $\vartheta_\varrho^n$ der gewünschten Art ein.

Ist $\alpha_n$ der Punkt im ersten Parallelogramm, der dem Punkt $\varrho - \sum_1^{n-1}\alpha_i$ homolog ist, so giebt es zwei bestimmte ganze Zahlen $KK'$ derart, dass

$$(4)\qquad \alpha_n = \varrho - \sum_1^{n-1}\alpha_i + K'\omega - K\omega'.$$

Es ist alsdann:

$$\vartheta_1\left(u-\varrho+\sum\alpha_i\right) = (-1)^{K+K'}e^{-\frac{\pi i}{\omega}[2K\alpha_n - K^2\omega']}e^{\frac{\pi i}{\omega}2Ku}.$$

Setzen wir dies in die obige Formel für $\vartheta_\varrho^n(u)$ ein und lassen den von $u$ unabhängigen Factor in die Constante eingehen, so ergiebt sich:

$$(5)\qquad \vartheta_\varrho^n(u) = c\,.\,\vartheta_1(u-\alpha_1)\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{n-1})\,\vartheta_1(u-\alpha_n)\,e^{2K\frac{u}{\omega}\pi i}.$$

Diese Formel liefert einen endgültigen Ausdruck für die $\vartheta_\varrho^n$-Function,

welche die Nullpunkte $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ im ersten Parallelogramm besitzt. Dabei sind $\alpha_n$ und $K$ aus der Gleichung (4) eindeutig bestimmt.

Nebenbei folgt der Satz:

4. *Sind $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ die Nullpunkte einer $\vartheta_\varrho^n$, so ist*

$$\sum_1^n \alpha_i \equiv \varrho \pmod{\omega, \omega'}. \tag{6}$$

Nach dem Gesagten gehört zu jeder Zahl $\varrho$ und $(n-1)$ Punkten $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ des ersten Parallelogramms *eine* $\vartheta_\varrho^n$, die durch (4) (5) bestimmt ist. Vermehrt man $\varrho$ um Periodenvielfache, so ändert sich $\alpha_n$ gar nicht, wohl aber die ganze Zahl $K$. Wir sehen also, dass entsprechende $\vartheta_\varrho^n$-Functionen mit congruenten Indexwerthen sich nur um eine als Factor auftretende Exponentialfunction unterscheiden. Da es uns wesentlich auf die Nullpunkte und das eigentliche $\vartheta$-Product ankommt, so wollen wir uns weiterhin auf Werthe $\varrho$ beschränken, die dem ersten Parallelogramm angehören. Alsdann giebt es, wenn $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ beliebige Punkte des ersten Parallelogramms sind, nur *eine* $\vartheta_\varrho^n$-Function überhaupt, die $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ zu Nullpunkten hat. Die Grösse $x$, als dem ersten Parallelogramm angehörig, und die ganzen Zahlen $\Lambda\Lambda'$ lassen sich nämlich auf eine und nur eine Art so bestimmen, dass

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = x - \Lambda'\omega - \Lambda\omega'$$

wird, entsprechend der Gleichung (4). Ist diese Bestimmung ausgeführt, so ist

$$\vartheta_x^n(u) = \vartheta_1(u-\alpha_1) \ldots \vartheta_1(u-\alpha_n) e^{2A\frac{u}{\omega}\pi i}$$

die gesuchte Function. Wir können also sagen:

5. *Es giebt unendlich viele Classen von $\vartheta^n$-Functionen, welche einzeln den unendlich vielen Punkten des ersten Parallelogramms entsprechen. Zu irgend n Werthen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ gehört eine und nur eine $\vartheta^n$-Function, die sie zu Nullpunkten hat und der Index ihrer Classe ist zu der Summe der gegebenen Werthe congruent.*

Aus dem Anblick der Gleichungen (1) folgt sofort:

6. *Ein lineares Aggregat von $\vartheta^n$-Functionen mit dem Index $\varrho$ ist wieder eine Function derselben Art.*

Es wird nun auch solche lineare Aggregate von $\vartheta_\varrho^n$-Functionen geben, die identisch verschwinden; daher ist der folgende Satz von Wichtigkeit:

7. *Zwischen n verschiedenen $\vartheta_\varrho^n$ besteht im Allgemeinen keine lineare Identität;*

denn man kann leicht $n$ solcher Functionen angeben, die nicht

linear dependent sind. Es seien z. B. $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ irgend $n$ Punkte im ersten Parallelogramm, deren Summe $s = \sum_1^n \alpha_i$ nicht $\equiv \varrho$ (mod. $\omega, \omega'$) ist, so gehört zu $(n-1)$ dieser Punkte

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\ \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n$$

nach Satz 4 eine eindeutig bestimmte $\vartheta_\varrho^n$, welche sie zu Nullpunkten hat und die wir mit $\vartheta_{i,\varrho}^n$ bezeichnen wollen. Es ist alsdann nach Gleichung (3)

$$(7)\qquad \vartheta_{i,\varrho}^n(u) = C_i \vartheta_1(u-\alpha_1) \ldots \vartheta_1(u-\alpha_{i-1})\, \vartheta_1(u-\varrho+s-\alpha_i) \times \vartheta_1(u-\alpha_{i+1}) \ldots \vartheta_1(u-\alpha_n) \qquad (i=1 \ldots n).$$

Man weist nun, was hier der Kürze halber übergangen werden soll, leicht nach, dass zwischen diesen $n$ Functionen niemals eine lineare Identität stattfinden kann.

Dagegen besteht zwischen $(n+1)$ $\vartheta_\varrho^n$-Functionen stets mindestens eine lineare Identität; denn es gilt der Satz:

8. *Haben wir $n$ $\vartheta_\varrho^n$-Functionen, die linear independent sind, so lässt sich jede $\vartheta_\varrho^n$ auf eine und nur eine Art aus ihnen linear zusammensetzen.**)

Soll ein aus $\vartheta_\varrho^n$-Functionen linear gebildeter Ausdruck identisch verschwinden, so muss er natürlich für irgend $n$ Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, für für welche $\sum_1^n \alpha_i$ nicht $\equiv \varrho$ ist, zu Null werden. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, d. h. es gilt der Satz:

9. *Wenn ein Ausdruck, der die Functionalbedingungen für $\vartheta_\varrho^n$ befriedigt, für $n$ Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ verschwindet, für welche $\sum_1^n \alpha_i$ nicht $\equiv \varrho$ ist, so ist er identisch Null.*

Denn andernfalls müsste er, da ihm die Nullpunkte $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ zukommen, sich darstellen lassen in der Form:

$$C\vartheta_1(u-\alpha_1) \ldots \vartheta_1(u-\alpha_{n-1})\, \vartheta_1(u-\alpha)\, e^{2K\frac{u}{\omega}\pi i}$$

wo nach Satz 4. $\sum_1^{n-1} \alpha_i + \alpha \equiv \varrho$, mithin $\alpha$ und $\alpha_n$ nicht homologe Punkte wären; der Ausdruck könnte also für $u = \alpha_n$ nicht verschwinden, was der Voraussetzung widerspricht.

---

*) Cfr. Schottky. l. c. p. 6, Klein, Math. Annalen Bd XVII, S. 134. In der letzteren Abhandlung treten an Stelle unserer $\vartheta$-Producte entsprechende $\sigma$-Producte auf.

Die Gleichungen (1) lehren noch:

10. *Das Product einer $\vartheta_\varrho^p$ und einer $\vartheta_\sigma^q$ ist eine $\vartheta_{\varrho+\sigma}^{p+q}$.*

Die sämmtlichen $\vartheta_\varrho^n$-Functionen, die sich aus $p$ gegebenen independenten linear zusammensetzen lassen, bezeichne ich in Uebereinstimmung mit dem für ganze rationale Functionen gebräuchlichen Ausdruck*) als zu derselben $p$-gliedrigen Gruppe $(G_p)$ gehörig.

Alle $\vartheta_\varrho^n$ bilden z. B. nach Satz 7 und 8 eine $n$-gliedrige Gruppe, und wenn

$$\mathsf{H}_1(u) \quad \mathsf{H}_2(u) \ldots \mathsf{H}_n(u) \tag{8}$$

irgend $n$ independente Elemente derselben sind, so kann man jedes andere in die Form $\sum_{i=1}^{i=n} l_i \mathsf{H}_i(u)$ setzen und so auf die Functionen (8) als Grundformen beziehen. Dadurch werden jeder $\vartheta_\varrho^n$ $n$ bestimmte Zahlen zugeordnet, die übrigens nur ihrem Verhältniss nach in Betracht kommen, und die wir als *Coefficienten derselben in Bezug auf die Grundformen* bezeichnen können. Umgekehrt lassen sich irgend $n$ Zahlen, die nicht alle 0 sind, als Coefficienten einer und nur einer $\vartheta_\varrho^n$ ansehen.

Wenn man die Coefficienten $l_1 \ldots l_n$ den $g$ independenten linearen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=n} l_i a_{hi} = 0 \qquad (h = 1 \ldots g) \tag{9}$$

unterwirft, so giebt es für $l_1 \ldots l_n$ eine $(n-g)$-gliedrige Gruppe von Lösungen, und es giebt mithin auch eine $(n-g)$-gliedrige Gruppe von $\vartheta_\varrho^n$, deren Coefficienten $g$ gegebenen Gleichungen Genüge leisten.

Umgekehrt liege eine $(n-g)$-gliedrige Gruppe von $\vartheta_\varrho^n$ vor, vertreten durch:

$$\sum_{i=1}^{i=n} l_{1i} \mathsf{H}_i \quad \sum_{i=1}^{i=n} l_{2i} \mathsf{H}_i \cdots \quad \sum_{i=1}^{i=n} l_{n-g,i} \mathsf{H}_i \tag{10}$$

so lassen sich bekanntlich $g$ independente Gleichungen der Form (9) finden, welche einzeln durch $l_i = l_{1i}, l_i = l_{2i}, \ldots l_i = l_{n-g,i}$ und in Folge dessen überhaupt durch die Coefficienten jedes Elementes der Gruppe (10) annulirt werden. Es ist also dasselbe, ob ich sage: Eine $\vartheta_\varrho^n$ gehört einer gewissen $(n-g)$-gliedrigen Gruppe an, oder: ihre Coefficienten genügen gewissen $g$ linearen Gleichungen.

Wenn nun eine $(p+q-g)$-gliedrige Gruppe G von $\vartheta_\sigma^{p+q}$-Functionen vorliegt, so kann es vorkommen, dass eine $\vartheta_\varrho^p$ existirt, die mit

*) Cfr. Rosanes, Crelles Journal Bd. 76, p. 314.

*irgend einer* $\vartheta_{\sigma-\varrho}^{q}$ multiplicirt, stets je ein Element unserer Gruppe $G$ liefert. Alle diese $\vartheta_{\varrho}^{p}$-Functionen zu bestimmen, ist eine für geometrische Fragen wichtige Aufgabe. Um sie übersichtlich zu lösen, kommt Alles darauf an, für die 3 Functionsclassen, die hier auftreten, nämlich für die $\vartheta_{\varrho}^{p}$, die $\vartheta_{\sigma-\varrho}^{q}$ und die $\vartheta_{\sigma}^{p+q}$ möglichst zweckmässige Grundformen im obigen Sinne einzuführen.

Es seien zu diesem Zweck:

$$\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_p,\quad \alpha_{p+1} \ldots \alpha_{p+q} \tag{11}$$

$(p+q)$ beliebige Grössen, die nur so gewählt sind, dass

$$\sum_{i=1}^{i=p+q} \alpha_i \text{ nicht } \equiv \sigma \pmod{\omega, \omega'}. \tag{12}$$

Wir setzen ferner:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i = s,$$

$$\sum_{i=p+1}^{i=p+q} \alpha_i = t, \tag{12a}$$

so dass

$$\sum_{i=1}^{i=p+q} \alpha_i = s + t$$

und bilden die Functionen:

$$\begin{cases} \mathsf{H}_i = \vartheta_1(u-\alpha_1) \ldots \vartheta_1(u-\alpha_{i-1})\,\vartheta_1(u-\varrho+s-\alpha_i)\,\vartheta_1(u-\alpha_{i+1}) \\ \qquad\qquad \ldots \vartheta_1(u-\alpha_p) \qquad i=1\ldots p, \\ \mathsf{Z}_\lambda = \vartheta_1(u-\alpha_{p+1}) \ldots \vartheta_1(u-\alpha_{\lambda-1})\,\vartheta_1(u-\sigma+\varrho+t-\alpha_\lambda)\,\vartheta_1(u-\alpha_{\lambda+1}) \\ \qquad\qquad \ldots \vartheta_1(u-\alpha_{p+q}) \qquad \lambda=p+1,p+2,\ldots,p+q, \\ \vartheta_\mu = \vartheta_1(u-\alpha_1) \ldots \vartheta_1(u-\alpha_{\mu-1})\,\vartheta_1(u-\sigma+s+t-\alpha_\mu)\,\vartheta_1(u-\alpha_{\mu+1}) \\ \qquad\qquad \ldots \vartheta_1(u-\alpha_{p+q}) \qquad \mu=1\ldots(p+q). \end{cases} \tag{13}$$

Jedes dieser Systeme ist offenbar ganz analog zusammengesetzt, wie die Functionen (7), von denen wir nachgewiesen haben, dass sie unter einer dort gemachten Festsetzung independent sind. Indem man dies auf den vorliegenden Fall überträgt, ersieht man, dass nach der unter (12) gemachten Voraussetzung $\vartheta_1 \ldots \vartheta_{p+q}$ *niemals* abhängig sind, während jedenfalls $\mathsf{H}_1 \ldots \mathsf{H}_p$ so lange linear independent bleiben, als $\varrho$ nicht $\equiv s$, $\mathsf{Z}_{p+1} \ldots \mathsf{Z}_{p+q}$ so lange als $\sigma - \varrho$ nicht $\equiv t$ ist. Dies muss, trotzdem $s$ und $t$ ganz beliebige Grössen sind, wohl festgehalten werden, weil späterhin $\varrho$ in unserer Untersuchung als Variable auftreten wird. Zunächst jedoch denken wir uns $\varrho$ fest gegeben und

nehmen $s$ und $t$ so gewählt an, dass die beiden obigen Bedingungen erfüllt sind. Alsdann ist

$$\begin{aligned} &\text{jede } \vartheta_\varrho^p \text{ aus } \mathsf{H}_1 \ldots \mathsf{H}_p, \\ &\text{jede } \vartheta_{\sigma-\varrho}^q \text{ aus } \mathsf{Z}_{p+1} \ldots \mathsf{Z}_{p+q}, \\ &\text{jede } \vartheta_\sigma^{p+q} \text{ aus } \vartheta_1 \ldots \vartheta_{p+q} \end{aligned}$$

zusammensetzbar.

Das Product

$$\mathsf{H}_i(u)\,\mathsf{Z}_\lambda(u)$$

ist nach Satz 10 stets eine $\vartheta_\sigma^{p+q}$ und es müssen sich daher Grössen $n_1^{i\lambda} \ldots n_{p+q}^{i\lambda}$ so finden lassen, dass:

$$\mathsf{H}_i(u)\,\mathsf{Z}_\lambda(u) \underset{u}{\equiv} \sum_{\mu=1}^{\mu=p+q} n_\mu^{i\lambda}\,\vartheta_\mu(u). \tag{14}$$

Die Grössen $n_\mu^{i\lambda}$ sind leicht zu bestimmen. Setzt man nämlich in (14) $u = \alpha_\mu$ so ergiebt sich

$$\mathsf{H}_i(\alpha_\mu)\,\mathsf{Z}_\lambda(\alpha_\mu) = n_\mu^{i\lambda}\,\vartheta_\mu(\alpha_\mu)$$

da $\vartheta_i(\alpha_\mu)$ nur für $i = \mu$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Es ist also:

$$n_\mu^{i\lambda} = \frac{\mathsf{H}_i(\alpha_\mu)\,\mathsf{Z}_\lambda(\alpha_\mu)}{\vartheta_\mu(\alpha_\mu)}. \tag{15}$$

Ist $\mu \leqq p$, so ist $\mathsf{H}_i(\alpha_\mu) = 0$ ausser wenn $\mu$ gleich $i$ ist; ist $\mu > p$, so ist $\mathsf{Z}_\lambda(\alpha_\mu) = 0$ ausser für $\mu = \lambda$. Es folgt hieraus, dass von den Grössen:

$$n_1^{i\lambda},\ n_2^{i\lambda},\ \cdots\ n_{p+q}^{i\lambda}$$

nur zwei, nämlich $n_i^{i\lambda}$ und $n_\lambda^{i\lambda}$ von Null verschieden sind und zwar ist:

$$\begin{aligned} n_i^{i\lambda} &= \frac{\mathsf{H}_i(\alpha_i)\,\mathsf{Z}_\lambda(\alpha_i)}{\vartheta_i(\alpha_i)}, \\ n_\lambda^{i\lambda} &= \frac{\mathsf{H}_i(\alpha_\lambda)\,\mathsf{Z}_\lambda(\alpha_\lambda)}{\vartheta_\lambda(\alpha_\lambda)}, \\ n_\mu^{i\lambda} &= 0 \quad \text{für } \mu \neq i,\ \mu \neq \lambda. \end{aligned} \tag{16}$$

Indem wir auf die Gleichungen (13) zurückgehen, und aus denselben die Werthe für $\mathsf{H}_i$, $\mathsf{Z}_\lambda$, $\vartheta_\mu$ einsetzen, ergeben sich nach einfachen Umformungen die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned} n_i^{i\lambda} &= -\frac{\vartheta_1[\varrho - s]\,\vartheta_1[\varrho - (\sigma - t + a_\lambda - \alpha_i)]}{\vartheta_1(s+t-\sigma)\,\vartheta_1(\alpha_i - \alpha_\lambda)}, \\ n_\lambda^{i\lambda} &= \frac{\vartheta_1[\varrho - (\sigma - t)]\,\vartheta_1[\varrho - (\sigma + \alpha_\lambda - \alpha_i)]}{\vartheta_1(s+t-\sigma)\,\vartheta_1(\alpha_i - \alpha_\lambda)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Wir können nun an die oben gestellte Aufgabe herantreten. Es sei eine $(p+q-g)$-gliedrige Gruppe $G$ von $\vartheta_\sigma^{p+q}$-Functionen gegeben.

Die Elemente derselben können, nach dem Obenbemerkten, aus der Gesammtheit der $\vartheta_\sigma^{p+q}$, d. h. aus der Gesammtheit der Functionen der Form $\sum_{\mu=1}^{\mu=p+q} N_\mu \vartheta_\mu(u)$ dadurch ausgeschieden werden, dass man die Coefficienten $N_1 \ldots N_{p+q}$ gewissen $g$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{\mu=p+q} N_\mu a_{1\mu} &= 0, \\ \sum_{\mu=1}^{\mu=p+q} N_\mu a_{2\mu} &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{\mu=1}^{\mu=p+q} N_\mu a_{g\mu} &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

unterwirft. Soll nun $\sum_{i=1}^{i=p} l_i \mathsf{H}_i(u)$ eine $\vartheta_\varrho^p$ sein, wie wir sie suchen, die nämlich die Eigenschaft hat, mit *jeder* $\vartheta_{\sigma-\varrho}^q$ zusammen eine $\vartheta_\sigma^{p+q}$ unserer Gruppe $G$ zu liefern, so ist nothwendig und hinreichend, dass jede der Functionen

$$\left(\sum l_i \mathsf{H}_i(u)\right) \mathsf{Z}_\lambda(u) \qquad (\lambda = p+1, \ldots p+q) \tag{19}$$

eine $\vartheta_\sigma^{p+q}$ vorstellt, deren Coefficienten $N_1^\lambda \ldots N_{p+q}^\lambda$ den Gleichungen (18) Genüge leisten. Die Coefficienten von (19) sind aber leicht herzustellen; denn nach (14) ist

$$\left(\sum_{i=1}^{i=p} l_i \mathsf{H}_i(u)\right) \mathsf{Z}_\lambda(u) \underset{u}{\equiv} \sum_{\substack{i=1 \\ i=p}}^{\substack{\mu=1 \\ \mu=p+q}} l_i n_\mu^{i\lambda} \vartheta_\mu(u)$$

also

$$N_\mu^\lambda = \sum_{i=1}^{i=p} l_i n_\mu^{i\lambda}.$$

Es ist also nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen bestehen:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i=p}}^{\substack{\mu=1 \\ \mu=p+q}} l_i n_\mu^{i\lambda} a_{h\mu} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \lambda = p+1 \cdots p+q \\ h = 1 \cdots g. \end{pmatrix} \tag{20}$$

Dies sind $g \times q$ lineare homogene Gleichungen in den $p$ Unbekannten $l_1 \ldots l_p$, für welche also, wenn $p > gq$ ist, eine mindestens $(p-qg)$-gliedrige Gruppe von Lösungen existirt.

Wir haben in Folge dessen den Satz:

11. *Liegt eine $(p+q-g)$-gliedrige Gruppe von $\vartheta_\sigma^{p+q}$-Functionen vor, so giebt es für $p - gq > 0$ mindestens eine $(p-qg)$-gliedrige*

*Gruppe von $\vartheta_\varrho^p$-Functionen, die durch jede $\vartheta_{\sigma-\varrho}^q$ zu Elementen der vorliegenden Gruppe ergänzt werden.*

Wenn $p - qg = 0$ ist, so wird es, so lange wir $\varrho$ als fest gegeben betrachten, im Allgemeinen keine $\vartheta_\varrho^p$ geben, welche unseren Forderungen genügt, da alsdann die Determinante der Gleichungen (20) verschwinden müsste. Wenn wir jedoch die Grösse $\varrho$ variabel denken, so wird man, da sie in den Elementen der erwähnten Determinante auftritt, gewisse Werthe von $\varrho$ finden können, für die eine $\vartheta_\varrho^p$ der geforderten Art existirt.

Wir wollen indessen die Untersuchung, die sich daran knüpft, gleich etwas allgemeiner fassen, und uns für den Fall, dass $p - qg \geqq 0$ ist, die Aufgabe stellen, die Werthe $\varrho$ zu bestimmen, für welche eine $\vartheta_\varrho^p$ der gewünschten Art vorhanden ist, die überdies $(p - qg)$ gegebene Werthe $\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_{p-qg}$ zu Nullwerthen hat. Es ist klar, dass wenn $p - qg = 0$ ist, diese Aufgabe auf den soeben erwähnten Fall zurückführt.

Soll $\sum_{i=1}^{i=p} l_i \mathsf{H}_i(u)$ eine $\vartheta_\varrho^p$ sein, die mit *jeder* Function $Z_\lambda(u)$ multiplicirt eine Function giebt, die unseren Bedingungen entspricht, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Gl. (20) und die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i=1\\ i=p}} l_i \mathsf{H}_i(\beta_1) = 0, \\ &\qquad\vdots \\ &\sum_{\substack{i=1\\ i=p}} l_i \mathsf{H}_i(\beta_{p-qg}) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

gleichzeitig erfüllt sind. Damit aber diese $p$ Gleichungen in den $p$ homogenen Grössen $l_1 \ldots l_p$ nebeneinander bestehen können, muss die Determinante $\Delta$ derselben gleich 0 sein, welche ich andeutungsweise folgendermassen schreibe:

$$0 = \Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} \sum_{\mu=1}^{\mu=p+q} n_\mu^{1,p+1} a_{h\mu} & \sum_\mu n_\mu^{2,p+1} a_{h\mu} & \cdots & \sum_\mu n_\mu^{p,p+1} a_{h\mu} \\ \sum_\mu n_\mu^{1,p+2} a_{h\mu} & \sum_\mu n_\mu^{2,p+2} a_{h\mu} & \cdots & \sum_\mu n_\mu^{p,p+2} a_{h\mu} \\ \vdots & \vdots & & \\ \sum_\mu n_\mu^{1,p+q} a_{h\mu} & \sum_\mu n_\mu^{2,p+q} a_{h\mu} & \cdots & \sum_\mu n_\mu^{p,p+q} a_{h\mu} \\ \vdots & \vdots & & \\ \mathsf{H}_1(\beta_1) & \mathsf{H}_2(\beta_1) & \cdots & \mathsf{H}_p(\beta_1) \\ \mathsf{H}_1(\beta_2) & \mathsf{H}_2(\beta_2) & \cdots & \mathsf{H}_p(\beta_2) \\ \vdots & \vdots & & \\ \mathsf{H}_1(\beta_{p-qg}) & \mathsf{H}_2(\beta_{p-qg}) & \cdots & \mathsf{H}_p(\beta_{p-qg}) \end{vmatrix} \tag{22}$$

$(gq+1)$
$(gq+2)$
$(p)$

Dabei hat man sich die ersten $q$ Zeilen $g$ mal unter einander geschrieben zu denken, indem man der Reihe nach $h$ durch $1, 2 \ldots g$ ersetzt; alsdann folgt die $(gq+1)^{te}$, $(gq+2)^{te} \ldots p^{te}$ Horizontalreihe, welche durch die linksstehenden eingeklammerten Zahlen charakterisirt sind.

Bevor ich die Gleichung (22) näher betrachte, muss ein Bedenken beseitigt werden, welches sich hier einstellt, und das schon oben angedeutet worden ist. In der Form $\sum_{\substack{i=1 \\ i=p}} l_i \mathsf{H}_i(u)$ sind nämlich nur dann *alle* $\vartheta_\varrho^p$ enthalten, wenn $\varrho$ nicht $\equiv s$ ist; ebenso stellen

$$Z_{p+1}(u)\ Z_{p+2}(u) \ldots Z_{p+q}(u)$$

nur dann *alle* $\vartheta_\sigma^q$ vor, wenn $\varrho$ nicht $\equiv \sigma - t$ ist. Wir können also nur behaupten: Wenn $\varrho$ ein Werth ist, der unsere oben gestellte Aufgabe befriedigt und $\varrho$ weder $\equiv s$, noch $\equiv \sigma - t$ ist, so ist $\Delta(\varrho) = 0$.

Da $s, t$ willkürliche Grössen sind, die nur an die Bedingung $s+t$ nicht $\equiv \sigma$ oder $s$ nicht $\equiv \sigma - t$ geknüpft sind, so würden, falls nicht etwa *alle* $\varrho$ unserer Aufgabe genügen, sich stets zwei nicht congruente Grössen $\varrho'\ \varrho''$ finden lassen, die nicht Lösungen des Problems sind. Wählt man dann $s = \varrho'$; $t = \sigma - \varrho''$ so muss jeder Werth $\varrho$, der unsere Aufgabe befriedigt, $\Delta(\varrho)$ annulliren.

Sollte aber für jeden möglichen Werth $\varrho$ unser Problem erfüllt sein, so würde bei beliebiger Wahl von $s, t$ von allen Werthen $\varrho$ feststehen, dass für sie $\Delta(\varrho) = 0$ ist, ausser für die Werthe $\varrho \equiv s$; $\varrho \equiv \sigma - t$, für welche man darüber zweifelhaft sein könnte. Indessen ist aus der stetigen Natur des Ausdrucks $\Delta(\varrho)$ klar, dass alsdann $\Delta$ auch für diese Werthe, also identisch verschwinden müsste.

Wir sehen also, dass unter allen Umständen man $s, t$ so gewählt denken kann, dass jeder Werth $\varrho$, der unsere Aufgabe löst, $\Delta(\varrho)$ annullirt.

Wenn umgekehrt $\Delta(\varrho) = 0$ ist, so existiren die Gleichungen (20) (21) d. h. es giebt $p$ Grössen $l_1\ l_2 \ldots l_p$, die nicht alle Null sind, und die den genannten Gleichungen Genüge leisten. Denkt man sich dieselben bestimmt, so gelten unter Anderem für irgend einen Werth von $\lambda$ aus den Zahlen $p+1 \cdots p+q$ die Gleichungen:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i=p}} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu=p+q}} l_i n_\mu^{i\lambda} a_{h\mu} = 0 \qquad h = 1 \cdots g$$

Aus ihnen folgt, dass die Grössen:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i=p}} l_i n_1^{i\lambda} \qquad \sum_i l_i n_2^{i\lambda} \cdots \sum_i l_i n_{p+q}^{i\lambda}$$

wenn sie nicht sämmtlich Null sind, sich als Coefficienten (vergl. die obige Definition) einer $\vartheta_\sigma^{p+q}$ ansehen lassen, die der gegebenen $(p+q-g)$-gliedrigen Gruppe angehört. Wir können auch sagen: Aus $\Delta(\varrho)=0$ folgt für einen bestimmten Werth von $\lambda$ entweder:

$$(23)\qquad \sum_{\substack{i=1\\ i=p}} l_i n_1^{i\lambda}=0 \quad \sum l_i n_2^{i\lambda}=0 \cdots \sum_i l_i n_{p+q}^{i\lambda}=0$$

oder die Zugehörigkeit von:

$$(24)\qquad \sum_{\substack{i=1\\ i=p}}^{\mu=1} \sum_{\mu=p+q} l_i n_\mu^{i\lambda}\vartheta_\mu(u)$$

zur Gruppe $G$.

Im ersten Fall beachte man, dass nach Gl. (15)

$$\sum_i l_i n_\mu^{i\lambda} = \frac{Z_\lambda(\alpha_\mu)}{\vartheta_\mu(\alpha_\mu)} \sum_{i=1}^{i=p} l_i \mathsf{H}_i(\alpha_\mu).$$

Da nun $\vartheta_\mu(\alpha_\mu)$ für jeden Werth von $\mu$ endlich ist, so folgt aus (23)

$$Z_\lambda(\alpha_\mu)\sum_i l_i \mathsf{H}_i(\alpha_\mu)=0$$

$$\mu=1,2\cdots(p+q)$$

und mithin, dass

$$(25)\qquad Z_\lambda(u)\sum_i l_i \mathsf{H}_i(u)$$

für die $(p+q)$ Werthe $\alpha_1 \ldots \alpha_{p+q}$ verschwindet. Nun ist aber (25) als Product einer $\vartheta_{\sigma-\varrho}^{q}$ und einer $\vartheta_\varrho^p$ stets eine $\vartheta_\sigma^{p+q}$; andererseits ist $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p+q}$ nicht congruent zu $\sigma$, und es folgt mithin aus Satz 9, dass (25) in $u$ identisch verschwindet. Da dies von $Z_\lambda(u)$ nicht gilt, so ist

$$\sum_{i=1}^{i=p} l_i \mathsf{H}_i(u) \underset{u}{\equiv} 0$$

und weil nicht alle $l_i$ gleich 0 sind, so folgt, dass $\mathsf{H}_1\,\mathsf{H}_2 \ldots \mathsf{H}_p$ linear dependent sind, oder was dasselbe, dass $\varrho \equiv s$ ist.

Wenn $\varrho$ nicht $\equiv s$ ist, so können nach der eben gegebenen Deduction die Gleichungen (23) für *keinen* Werth von $\lambda$ stattfinden, und es bleibt also für jeden einzelnen Werth von $\lambda$ nur die zweite Möglichkeit übrig. Wenn also $\Delta(\varrho)=0$ und $\varrho$ nicht $\equiv s$, so gehören die $q$ Functionen

$$(26)\qquad \sum_{\substack{i=1\\ i=p}}^{\mu=1} \sum_{\mu=p+q} l_i n_\mu^{i\lambda}\vartheta_\mu(u) \qquad \lambda=p+1,\cdots p+q$$

sämmtlich der Gruppe $G$ an. Diese Functionen können aber unter Anwendung von (14) in der Gestalt:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=p} l_i \mathsf{H}_i(u)\right) \mathsf{Z}_\lambda(u) \qquad (\lambda = p+1, \cdots p+q)$$

geschrieben werden, aus der hervorgeht, dass $\sum_i l_i \mathsf{H}_i(u)$ die Eigenschaft hat, durch Multiplication mit:

(27) $$\mathsf{Z}_{p+1}(u) \quad \mathsf{Z}_{p+2}(u) \ldots \mathsf{Z}_{p+q}(u)$$

je zu einem Element unserer Gruppe zu werden. Sind also die Formen (27) unabhängig, d. h. stellen sie *alle* $\vartheta_{\sigma-\varrho}^{q}$ vor, so ist, da überdies die Gleichungen (21) gelten, $\sum l_i \mathsf{H}_i(u)$ eine $\vartheta_\varrho^p$, wie sie verlangt wurde. Sind die Formen (27) aber dependent, so folgt $\varrho \equiv \sigma - t$.

Wir sehen also, dass, wenn $\varrho$ der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ genügt, entweder

a) eine $\vartheta_\varrho^p$ der gewünschten Art existirt oder

b) $\varrho \equiv s \pmod{\omega, \omega'}$ oder

c) $\varrho \equiv \sigma - t \pmod{\omega, \omega'}$

ist. *Die Werthe* $\varrho \equiv s$, $\varrho \equiv \sigma - t$ *sind also die einzigen Wurzeln der (transcendenten) Gleichung* $\Delta(\varrho) = 0$, *die keine Lösungen unseres Problems vorstellen.*

Wir wollen nun die Determinante (22) *als Function von* $\varrho$ näher untersuchen. Zu diesem Zwecke beachte man zunächst, dass nach den Gleichungen (17) $n_i^{i\lambda}$ als Function von $\varrho$ eine $\vartheta^2$ mit dem Index: $s - t + \sigma + \alpha_\lambda - \alpha_i$ vorstellt, und dass von $n_\lambda^{i\lambda}$ genau dasselbe gilt. Da dies aber die einzigen der Grössen:

$$n_1^{i\lambda}\, n_2^{i\lambda} \cdots n_{p+q}^{i\lambda}$$

sind, welche von 0 verschieden, so folgt, dass $\sum_{\mu=1}^{\mu=p+q} n_\mu^{i\lambda} a_{h\mu}$ *stets eine* $\vartheta^2$ *mit dem Index* $s - t + \sigma + \alpha_\lambda - \alpha_i$ *ist.* Ausser Elementen dieser Form enthält $\Delta$ noch Elemente $\mathsf{H}_i(\beta_\lambda)$ welche nach Gleichung (13) in der Gestalt:

$$C\vartheta_1(\beta_\lambda - \varrho + s - \alpha_i) = -C\vartheta_1[\varrho - (\beta_\lambda + s - \alpha_i)]$$

geschrieben werden können, wo $C$ ein von $\varrho$ freier Factor ist. Es folgt hieraus, dass $\mathsf{H}_i(\beta_\lambda)$ als *Function von* $\varrho$ *eine* $\vartheta^1$ *mit dem Index* $\beta_\lambda + s - \alpha_i$ *vorstellt.*

Bezeichnen wir in den Elementen der Determinante $\Delta$, nämlich in $\sum_\mu n_\mu^{i\lambda} a_{h\mu}$ und in $\mathsf{H}_i(\beta_\lambda)$ $i$ als *den ersten Stellenzeiger des Elementes,*

so ist klar, dass alle Colonnen von $\Delta$ aus der ersten dadurch entstehen, dass man den ersten Stellenzeiger 1 der Reihe nach durch 2, 3 ... $p$ ersetzt. Es folgt mithin, dass alle Glieder der Determinante, abgesehen vom Vorzeichen aus dem Diagonalglied:

$$(28)\quad \sum_\mu n_\mu^{1,p+1} a_{1\mu} \sum_\mu n_\mu^{2,p+2} a_{1\mu} \dots \sum_\mu n_\mu^{q,p+q} a_{1\mu} \sum_\mu n_\mu^{q+1,p+1} a_{2\mu} \dots$$
$$\sum_\mu n_\mu^{2q,p+q} a_{2\mu} \dots \sum_\mu n_\mu^{q(g-1)+1,p+1} a_{g,\mu} \dots \sum_\mu n_\mu^{qg,p+q} a_{g\mu} \mathsf{H}_{qg+1}(\beta_1) \dots$$
$$\dots \mathsf{H}_p(\beta_{p-qg})$$

dadurch entstehen werden, dass man die ersten Stellenzeiger:

$$1, 2 \dots q,\ q+1 \dots 2q \dots qg+1 \dots p$$

auf alle Arten permutirt. Nun ist aber (28) nach unsern obigen Bemerkungen und nach Satz 10 als Function von $\varrho$ eine $\vartheta^{qg+p}$ mit einem bestimmten Index $J$, der gleich der Summe der Indices der einzelnen Factoren ist. Die Function $\sum_\mu n_\mu^{i\lambda} a_{h\mu}$ hatte den Index $s-t+\sigma+\alpha_\lambda-\alpha_i$, in welchem nur der Summand $(-\alpha_i)$ vom ersten Stellenzeiger abhängt; $\mathsf{H}_i(\beta_\lambda)$ hatte den Index $\beta_\lambda + s - \alpha_i$, in welchem ebenfalls nur der Summand $(-\alpha_i)$ vom ersten Stellenzeiger beeinflusst ist. Diejenigen Summanden von $J$, die von den ersten Stellenzeigern abhängen, sind also

$$-\alpha_1 - \alpha_2 \cdots - \alpha_q - \alpha_{q+1} \cdots - \alpha_{2q} \cdots - \alpha_{q(g-1)+1} \cdots - \alpha_{qg} \cdots - \alpha_p .$$

Dieser Theil von $J$ ist mithin gleich $-(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_p) = -s$ und ändert bei Permutation der Stellenzeiger seinen Werth nicht. In Folge dessen sind alle andern Glieder der Determinante gleichfalls $\vartheta^{qg+p}$-Functionen mit dem Index $J$ und dasselbe gilt nach Satz 6 von der ganzen Determinante. Es ergiebt sich überdies leicht nach einigen Reductionen unter Benutzung von Gleichung (12a):

$$(29)\quad J = (p-1)s + (q-1)g(\sigma-t) + g\sigma + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{p-qg}.$$

Wir wissen schon, dass $\varrho \equiv s$ und $\varrho \equiv \sigma - t$ Nullwerthe von $\Delta(\varrho)$ sind. Man kann dies nun direct zeigen und gleichzeitig die Vielfachheit dieser Nullwerthe bestimmen. Da aber $\Delta(\varrho)$ eine $\vartheta_J^{p+qg}$ ist, so haben wir nur nöthig, nachzuweisen, dass und wie $\Delta(\varrho)$ für $\varrho = s$ und $\varrho = \sigma - t$ verschwindet, da alsdann eo ipso alle homologen Werthe Nullen derselben Art sind.

Es sei zunächst $\varrho = s$; dann ist nach Gleichung (16) und (17)

$$n_i^{i\lambda} = 0, \qquad n_\mu^{i\lambda} = 0 \quad \mu \gtrless i;\ \mu \gtrless \lambda.$$
$$n_\lambda^{i\lambda} = 1,$$

Zu gleicher Zeit werden nach Gleichung (13) alle $\mathsf{H}_i(u)$ identisch gleich:

$$\vartheta_1(u-\alpha_1)\,\vartheta_1(u-a_2)\ldots\vartheta_1(u-\alpha_p)=\mathsf{H}(u)$$

und es ergiebt sich aus (22)

$$(30)\qquad \Delta(s)=\begin{vmatrix} a_{h,p+1} & a_{h,p+1} & \ldots & a_{h,p+1}\\ a_{h,p+2} & a_{h,p+2} & \ldots & a_{h,p+2}\\ \vdots & \vdots & & \\ a_{h,p+q} & a_{h,p+q} & \ldots & a_{h,p+q}\\ \vdots & \vdots & & \\ \mathsf{H}(\beta_1) & \mathsf{H}(\beta_1) & \ldots & \mathsf{H}(\beta_1)\\ \vdots & \vdots & & \\ \mathsf{H}(\beta_{p-qg}) & \mathsf{H}(\beta_{p-qg}) & \ldots & \mathsf{H}(\beta_{p-qg}) \end{vmatrix},$$

wobei die Determinante in dem oben angegebenen Sinne zu verstehen ist. Da in (30) sämmtliche $p$ Verticalreihen gleich sind, so folgt nicht nur, dass $\Delta(s)=0$, sondern es ergiebt sich gleichzeitig, dass

$$\frac{d\Delta(\varrho)}{d\varrho}\;\frac{d^2\Delta(\varrho)}{d\varrho^2}\;\ldots\;\frac{d^{p-2}\Delta}{d\varrho^{p-2}}$$

sämmtlich verschwinden, sobald man $\varrho=s$ substituirt. *Die Werthe* $\varrho\equiv s$ *sind also mindestens* $(p-1)$*-fache Nullwerthe von* $\Delta(\varrho)$.

Es sei nun $\varrho=\sigma-t$; alsdann folgt nach Gleichung (17) und (16)

$$n_\lambda^{i\lambda}=1,\qquad n_\mu^{i\lambda}=0\quad\text{für}\quad \mu\lesseqgtr i\quad \mu\lesseqgtr\lambda$$
$$n_\lambda^{i\lambda}=0$$

und es ist nach (22)

$$(31)\qquad \Delta(\sigma-t)=\begin{vmatrix} (1)\;a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hp}\\ (2)\;a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hp}\\ \vdots\;\vdots & \vdots & & \vdots\\ (q)\;a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hp}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \overline{\mathsf{H}_1(\beta_1)} & \overline{\mathsf{H}_2(\beta_1)} & \ldots & \overline{\mathsf{H}_p(\beta_1)}\\ \overline{\mathsf{H}_1(\beta_2)} & \overline{\mathsf{H}_2(\beta_2)} & \ldots & \overline{\mathsf{H}_p(\beta_2)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \overline{\mathsf{H}_1(\beta_{p-qg})} & & \ldots & \overline{\mathsf{H}_p(\beta_{p-qg})} \end{vmatrix}$$

wo $\overline{\mathsf{H}_i(\beta_\lambda)}$ dasjenige ist, was aus $\mathsf{H}_i(\beta_\lambda)$ wird, indem man $\varrho=\sigma-t$ setzt. Die Determinante (31) hat $g$ Systeme von je $q$ gleichen Horizontalreihen. Wenn man $\Delta(\varrho)$ $(qg-g-1)$-Mal oder weniger oft nach $\varrho$ differentiirt, so entsteht eine Summe von Determinanten; setzt man

alsdann $\varrho = \sigma - t$, so treten offenbar in jeder dieser Determinanten noch mindestens zwei Horizontalreihen auf, die einander gleich sind, und es folgt mithin, dass

$$\Delta, \frac{d\Delta}{d\varrho} \cdots \frac{d^{qg-g-1}\Delta}{d\varrho^{qg-g-1}}$$

sämmtlich für $\varrho = \sigma - t$ verschwinden; d. h. dass $\varrho = \sigma - t$ *ein mindestens* $(q-1)g$*-facher Nullwerth von* $\Delta(\varrho)$ *ist. Das Gleiche gilt natürlich von allen Werthen* $\varrho \equiv \sigma - t$.

Wir wissen dass eine $\vartheta_z^n$-Function, die für $u \equiv v$ verschwindet, $\vartheta_1(u-v)$ als Factor enthält. Mithin ist $\Delta(\varrho)$ jedenfalls durch

$$[\vartheta_1(\varrho - s)]^{p-1}[\vartheta_1(\varrho - \sigma + t)]^{(q-1)g}$$

theilbar, und der Quotient:

$$R(\varrho) = \frac{\Delta(\varrho)}{[\vartheta_1(\varrho - s)]^{p-1}\,[\vartheta_1(\varrho - \sigma + t)]^{(q-1)g}} \tag{32}$$

ist wiederum eine $\vartheta$-Function von bestimmter Ordnung und bestimmten Index. Da der Zähler eine $\vartheta^{p+qg}$ vom Index $J$, der Nenner eine $\vartheta^{p-1+(q-1)g}$ vom Index $(p-1)s+(q-1)g(\sigma-t)$ ist, so stellt $R$ nach Satz 10 eine $\vartheta^{g+1}$ vom Index:

$$J-(p+1)s-(q-1)g(\sigma-t) = g\sigma+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{p-qg}$$

vor. Da der Index einer $\vartheta^n$ der Summe ihrer Nullwerthe congruent ist, die willkürlichen Grössen $s$, $t$ aber im Index von $R$ nicht mehr auftreten, so folgt, dass $s$, $\sigma - t$ keine Wurzeln von $R(\varrho) = 0$ sein können. Weil wir überdies oben gesehen haben, dass $\varrho \equiv s$, $\varrho \equiv \sigma - t$ die einzigen Nullwerthe von $\Delta(\varrho)$ sind, die *keine* Lösung unseres Problems liefern, so giebt $R(\varrho) = 0$ die Gesammtheit der $\varrho$, die wir suchen. Diese Gleichung hat aber, da $R$ eine $\vartheta$-Function vom Grade $(g+1)$ ist, $(g+1)$ Wurzeln, deren Summe uns überdies bekannt ist. Es folgt also:

11 a. *Liegt eine* $(p+q-g)$*-gliedrige Gruppe* $G$ *von* $\vartheta_\sigma^{p+q}$*-Functionen vor, und sind* $\beta_1\beta_2\ldots\beta_{p-qg}$ *gegebene Werthe, so giebt es* $(g+1)$ *dem ersten Periodenparallelogramm zugehörige Werthe* $\varrho$*, für welche eine* $\vartheta_\varrho^p$ *existirt, die mit jeder* $\vartheta_{\sigma-\varrho}^q$ *multiplicirt, je ein Element von* $G$ *liefert. Die Summe dieser* $(g+1)$ *Werthe ist congruent zu* $g\sigma + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{p-qg}$*; sie selbst sind durch Nullsetzung von* (32) *und Auflösung der so erhaltenen (transcendenten) Gleichung zu bestimmen.*

Ist insbesondere $p - qg = 0$, so ergiebt sich:

11 b. *Wenn eine* $(p+q-g)$*-gliedrige Gruppe* $G$ *von* $\vartheta_\sigma^{p+q}$ *gegeben und* $p - qg = 0$ *ist, so giebt es* $(g+1)$ *dem ersten Periodenparallelogramm zugehörige Werthe* $\varrho$*, für welche eine* $\vartheta_\varrho^p$ *existirt, die durch jede* $\vartheta_{\sigma-\varrho}^q$ *zu einem Element von* $G$ *ergänzt wird. Die Summe dieser* $(g+1)$ *Werthe ist* $\equiv g\sigma$.

Die Sätze 11 erleiden nur dann eine Ausnahme, wenn $\Delta(\varrho)$ identisch verschwindet; d. h. wenn *jedes* $\varrho$ eine Lösung unseres Problems liefert.

## § 2.

### Die $\vartheta_\varrho^n$-Functionen auf der allgemeinen Curve 3. O.

Wenn irgend eine Curve dritter Ordnung und vom Geschlechte 1 vorliegt, so können bekanntlich die Coordinaten eines Punktes derselben als elliptische Functionen eines Parameters dargestellt werden.*) Wenn man irgend eine dieser Darstellungen näher ins Auge fasst, so überzeugt man sich leicht, dass sie darauf hinauskommt, die homogenen Coordinaten des Curvenpunktes zu 3 $\vartheta$-Functionen $3^{\text{ter}}$ Ordnung und von gleichem Index $\tau$ proportional zu setzen.**) Man kann leicht zeigen,***) dass auch umgekehrt, wenn man $x_1\, x_2\, x_3$ drei independenten $\vartheta_\tau^3$-Functionen $\mathsf{H}_1(u)\, \mathsf{H}_2(u)\, \mathsf{H}_3(u)$ proportional setzt, der durch $x_1 : x_2 : x_3$ dargestellte Punkt bei Variation von $u$ eine Curve dritter Ordnung vom Geschlechte 1 durchläuft. Ich lege daher die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon x_1 &= \mathsf{H}_1(u), \\ \varepsilon x_2 &= \mathsf{H}_2(u), \\ \varepsilon x_3 &= \mathsf{H}_3(u) \end{aligned} \tag{33}$$

der weiteren Untersuchung zu Grunde, nehme jedoch, um die geometrische Discussion zu erleichtern, an, dass der Index $\tau$ der Function $\mathsf{H}_i$ gleich 0 ist.

Diese Annahme ist gestattet, wie aus der Gestalt hervorgeht, die ich unten der Parameterdarstellung von Clebsch gegeben habe. Die Curve, die alsdann durch (33) dargestellt wird, nenne ich $C^3$. Dann gehören zu jedem Punkte $x$ derselben unendlich viele nach $\omega\, \omega'$ congruente Werthe von $u$; denjenigen dieser Werthe, welcher dem ersten Parallelogramm angehört, werde ich speciell als Parameter des Curvenpunktes ansprechen und in der Regel auch den Punkt mit dem Parameter $\alpha$ als Punkt $\alpha$ bezeichnen. Es ergiebt sich dann zunächst der Satz:

---

*) Clebsch, Crelles Journal, Bd. 63, p. 96. Clebsch-Lindemann, p. 604 und p. 649.

**) So z. B. kann die bekannte Darstellung einer Curve 3. O. (cfr. Clebsch, l. c.)

$$\begin{aligned} \varepsilon x_1 &= \sin^3 \operatorname{am} u, \\ \varepsilon x_2 &= \sin \operatorname{am} u, \\ \varepsilon x_3 &= \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u \end{aligned}$$

offenbar in die Form gesetzt werden:

$$x_1 : x_2 : x_3 = A\vartheta_1^3(u) : B\vartheta_1(u)\left[\vartheta_1\left(u+\tfrac{\omega'}{2}\right)\right]^2 : C\vartheta_1\left(u+\tfrac{\omega}{2}\right)\vartheta_1\left(u+\tfrac{\omega'}{2}\right)\vartheta_1\left(u+\tfrac{\omega+\omega'}{2}\right)$$

wo die Glieder der rechten Seite offenbar $\vartheta_0^3$-Functionen sind.

***) Cfr. Hermite, Crelles Journal Bd. 82; Klein, Math. Ann. Bd. 17, p. 234.

12. *Zu jeder Curve $n^{ter}$ Ordnung $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ gehört auf unserer $C^3$ eine $\vartheta_0^{3n}$, deren Nullpunkte die Parameter der Schnittpunkte von $f$ und $C^3$ sind;*

denn soll ein Punkt $u$ Schnittpunkt von $f$ und $C^3$ sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ durch $x_i = \mathsf{H}_i(u)$ befriedigt wird. Die Parameter des Schnittpunktsystems werden also geliefert durch die Gleichung:

$$f(\mathsf{H}_1\, \mathsf{H}_2\, \mathsf{H}_3) = 0.$$

Jeder Term von $f$ enthält nun $\mathsf{H}_1\, \mathsf{H}_2\, \mathsf{H}_3$ zur $n^{ten}$ Potenz und ist mithin nach Satz 10 eine $\vartheta_0^{3n}$, folglich gilt nach Satz 6 dasselbe von dem ganzen Ausdruck $f(\mathsf{H}_1\, \mathsf{H}_2\, \mathsf{H}_3)$.

Die so erhaltene $\vartheta_0^{3n}$ werden wir zweckmässig *als zur Curve $f$ gehörig oder als die $\vartheta_0^{3n}$ des Schnittpunktsystems von $f$ und $C^3$* bezeichnen.

Es ergeben sich ferner leicht die bekannten Sätze: *)

13. *Sind $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{3n}$ die Parameter der Schnittpunkte einer Curve $n^{ter}$ Ordnung mit der $C^3$, so ist:*

$$\sum_{i=1}^{i=3n} \alpha_i \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}. \tag{36}$$

14. *Sind $\alpha_1 \ldots \alpha_{3n}$ Parameter von $3n$ Punkten, für die die Gleichung* (36) *gilt, so geht jede Curve $n^{ter}$ Ordnung, die $(3n-1)$ dieser Punkte enthält, auch durch den $3n^{ten}$.*

Da die Nullpunkte einer $\vartheta_0^{3n}$ stets der Gleichung (36) genügen, so kann man dem Satze 14 auch die Form geben:

15. *Durch die Nullpunkte einer beliebigen $\vartheta_0^{3n}$ lassen sich stets unendlich viele Curven $n^{ter}$ Ordnung legen (nämlich eine $\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3n + 1\right]$-gliedrige Gruppe).*

Irgend $p$ Punkte unserer Curve 3. O. mit den Parametern $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ können nach Satz 5 stets als Nullpunkte einer und nur einer $\vartheta^p$-Function mit bestimmtem Index angesehen werden. Umgekehrt gehören zu jedem Index $\varrho$ unendlich viele $\vartheta_\varrho^p$ und somit unendlich viele Gruppen von je $p$ Punkten. Es ist nun von Wichtigkeit, alle zu einem Index gehörigen Punktgruppen geometrisch zu construiren**);

---

*) Clebsch, l. c. cfr. Hermite, Crelle's Journal Bd. 32.

**) In den Sitzungsberichten der Wiener Academie Bd. 88, S. 437 hat Herr Em. Weyr direct und ohne Bezugnahme auf die $\vartheta^n$-Functionen die Aufgabe behandelt, auf einer $C^3$ alle linearen $(p-1)$-fach unendlichen Mannigfaltigkeiten der Systeme von je $p$ Punkten, oder was dasselbe ist, alle Involutionen $p^{ten}$ Grades und $(p-1)^{ter}$ Stufe aufzusuchen. Offenbar stellt die Gesammtheit aller $\vartheta_\varrho^p$ *eine*

wir unterscheiden zu diesem Zwecke die Fälle $p = 3q$, $p = 3q + 1$, $p = 3q + 2$.

*a*) Sind $\alpha_1 \ldots \alpha_{3q}$ die Punkte einer $\vartheta_\varrho^{3q}$, so ist (nach Satz 4)

$$\sum_{i=1}^{i=3q} \alpha_i \equiv \varrho \quad \text{oder} \quad \sum_{1}^{3q-1} \alpha_i + \alpha_{3q} \equiv \varrho \quad (\text{mod. } \omega\omega').$$

Alle Curven $q^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch die Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_{3q-1}$ gehen, schneiden $C^3$ noch in einem weiteren Punkte. Derselbe sei $\alpha'_{3q}$. Dann ist auch:

$$\sum_{1}^{3q-1} \alpha_i + \alpha'_{3q} + \alpha_{3q} \equiv \varrho + \alpha'_{3q}.$$

Da die beiden ersten Summanden der linken Seite zusammen $\equiv 0$ sind, so folgt:

$$0 + \alpha_{3q} \equiv \varrho + \alpha'_{3q}.$$

Fixiren wir auf der $C^3$ die Punkte 0 und $\varrho$, so ergiebt sich, dass die Geraden $\overline{0\alpha_{3q}}$ und $\overline{\varrho\alpha'_{3q}}$ sich in demselben Punkte der Curve schneiden; wir können also von $\alpha_1 \ldots \alpha_{3q-1}$ ausgehend den Punkt $\alpha_{3q}$, welcher sie zu einer $\vartheta_\varrho^{3q}$ ergänzt, construiren.

Nennen wir in gebräuchlicher Weise den Punkt, welcher $3q - 1$ Punkte zu einem vollständigen Schnittpunktsystem ergänzt, den Restpunkt*) derselben, so kann man das erhaltene Resultat folgendermassen aussprechen:

16. *Die $3q$ Punkte einer $\vartheta_\varrho^{3q}$ sind so beschaffen, dass wenn man zu irgend $(3q - 1)$ von ihnen den Restpunkt $\alpha'$, zu $\alpha'$ und $\varrho$ den Restpunkt $\alpha''$, schliesslich zu $\alpha''$ und 0 den Restpunkt construirt, dieser Letztere mit dem $3q^{\text{ten}}$ Punkte identisch ist.*

Dass die $3q$ Punkte einer $\vartheta_0^{3q}$ stets ein Schnittpunktsystem $q^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellen, ergiebt sich als Specialfall, indem man $\varrho$ in 0 hineinfallen lässt und beachtet, dass der Punkt 0 ein Wendepunkt der $C^3$ ist.

*b*) Sind $\alpha_1 \ldots \alpha_{3q+1}$ die Punkte einer $\vartheta_\varrho^{3q+1}$, so ist:

$$\sum_{1}^{3q+1} \alpha_i \equiv \varrho.$$

---

dieser Involutionen vor, und man erhält alle möglichen, indem man $\varrho$ variirt. Die Frage, die ich soeben gestellt habe, kommt also mit der in der citirten Abhandlung erörterten überein. Man findet dort neben Resultaten, die ein anderes Ziel verfolgen, ihrem geometrischen Inhalte nach die Sätze (16), (17), (18) des Textes. Der Satz (17) z. B. lautet in dieser Fassung: „*Es giebt unendlich viele Involutionen $(3q + 1)^{\text{ten}}$ Grades und $3q^{\text{ter}}$ Stufe. Alle Punktsysteme einer dieser Involutionen haben denselben beigeordneten Rest.*"

*) cfr. Salmon-Fiedler, höhere ebene Curven, erste Auflage p. 164.

Es seien nun $\alpha'\ \alpha''$ 2 Punkte der $C^3$, die nur der Bedingung unterliegen, dass sie mit $\alpha_1 \ldots \alpha_{3q+1}$ zusammen ein Schnittpunktsystem bilden, so folgt:

$$0 \equiv \sum_{\substack{i=1 \\ i=3q+1}} \alpha_i + \alpha' + \alpha'' \equiv \varrho + \alpha' + \alpha'',$$

d. h. $\alpha'\ \alpha''\ \varrho$ liegen in gerader Linie, oder was dasselbe ist, jede durch $\alpha_1 \ldots \alpha_{3q+1}$ gehende Curve $(q+1)^{\text{ter}}$ Ordnung schneidet $C^3$ noch in 2 Punkten, deren Verbindungslinie durch $\varrho$ geht. Die Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_{3q+1}$ und der Punkt $\varrho$ sind also nach einer Bezeichnung Sylvesters*) *beigeordnete Reste;* wir können also sagen:

17. *Jede* $\vartheta_\varrho^{3q+1}$ *besteht aus* $(3q+1)$ *Punkten, die den Punkt* $\varrho$ *zum beigeordneten Rest haben***).

Beispielsweise wird jede $\vartheta_\varrho^4$ von 4 Punkten gebildet, für die der Punkt $\varrho$ gegenüberliegender Punkt***) ist; d. h. die $C^3$ kann aus dem durch jene 4 Punkte gehenden Kegelschnittbüschel und dem durch $\varrho$ gehenden Strahlbüschel projectivisch erzeugt werden.

*c*) Sind $\alpha_1 \ldots \alpha_{3q+2}$ die Punkte einer $\vartheta_\varrho^{3q+2}$, so gilt die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=3q+2} \alpha_i \equiv \varrho.$$

Ist $\alpha'$ der Restpunkt dieser Punkte, so ergiebt sich:

$$0 \equiv \sum_{1}^{3q+2} \alpha_i + \alpha' \equiv \varrho + \alpha' + 0,$$

d. h. $\varrho\ 0\ \alpha'$ liegen in gerader Linie; mithin folgt:

18. *Die* $(3q+2)$ *Punkte einer* $\vartheta_\varrho^{3q+2}$ *sind so beschaffen, dass ihr Restpunkt dritter Schnittpunkt der Geraden* $\overline{\varrho 0}$ *mit der Curve ist.*

Legen wir mithin durch einen Punkt $\alpha'$ der $C^3$ alle möglichen Curven $(q+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so schneidet jede derselben noch in $(3q+2)$ Punkten, zu welchen eine $\vartheta^{3q+2}$ gehört. Alle so erhaltenen $\vartheta^{3q+2}$ sind, wie aus $\sum_{\substack{i=1 \\ i=3q+2}} \alpha_i + \alpha' \equiv 0$ hervorgeht, von dem Index $(-\alpha')$; es folgt also:

18a. *Die durch einen Punkt* $\alpha'$ *von* $C^3$ *gehenden Curven* $(q+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung schneiden auf* $C^3$ *sämmtliche* $\vartheta^{3q+2}$ *einer Classe aus. Der*

---

*) cfr. Salmon, höhere ebene Curven, 1. Aufl. der deutschen Uebersetzung p. 164.

**) cfr. Weyr. l. c. p. 457.

***) cfr. Pluecker, algebraische Curven p. 56.
Durège, Curven 3. O. p. 158.

*Index dieser Classe ist* $(-\alpha')$ *z. B. schneiden die durch* $\alpha'$ *gehenden Kegelschnitte alle* $\vartheta^5_{-\alpha'}$ *aus.*

Wir bemerken schliesslich, dass wenn irgend eine $\vartheta_\varrho{}^p$ vorliegt, die Gesammtheit der Punktgruppen, die $\vartheta_\varrho{}^p$ zu einem Schnittpunktsystem $n^{\text{ter}}$ Ordnung ergänzen, durch die Gesammtheit der $\vartheta^{3n-p}_{(-\varrho)}$ dargestellt wird; denn jede $\vartheta^{3n-p}_{(-\varrho)}$ ergänzt $\vartheta_\varrho{}^p$ zu einer $\vartheta_0{}^{3n}$, d. h. zu einem Schnittpunktsystem, und umgekehrt kann die Gleichung $\vartheta_\varrho{}^p \cdot X = \vartheta_0{}^{3n}$ nur erfüllt werden, wenn $X$ eine $\vartheta^{3n-p}_{(-\varrho)}$ ist. Da aber die Gesammtheit der $\vartheta^{3n-p}_{(-\varrho)}$ von der besonderen $\vartheta_\varrho{}^p$, von der wir ausgingen, gar nicht abhängt, so können wir sagen:

19. *Die Gesammtheit der* $\vartheta^{3n-p}_{(-\varrho)}$ *wird repräsentirt durch die Gesammtheit der Punktgruppen von je* $(3n-p)$ *Punkten, die eine beliebige* $\vartheta_\varrho{}^p$ *zu einem Schnittpunktsystem ergänzen (Restsystem von* $\vartheta_\varrho{}^p$**)).*

Hieraus ergiebt sich, was auch geometrisch klar, dass alle $\vartheta_\varrho{}^p$ mit festem $\varrho$ beigeordnete Reste sind.

## § 3.

## Die auf der $C^3$ liegenden Polar-$p$-Ecke der zu $C^3$ apolaren Classencurven.

Nachdem wir uns in den Stand gesetzt haben, Punktgruppen der $C^3$ durch $\vartheta^p$-Functionen zu repräsentiren, wenden wir uns insbesondere denjenigen Punktgruppen der $C^3$ zu, welche Polar-$p$-Ecke einer zu $C^3$ conjugirten oder apolaren Curve bilden**). Ist $\varphi(u_1 u_2 u_3) = 0$ eine Curve $n^{\text{ter}}$ Classe $(n \geq 3)$, die zu $C^3$ apolar (resp. conjugirt) ist, so giebt es im Ganzen eine $\frac{n(n+3)}{2}$-gliedrige Gruppe von zu $\varphi$ conjugirten Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung. Sind

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0 \cdots f_{\frac{n\cdot(n+3)}{2}}(x) = 0$$

independente Elemente derselben, ist ferner $F(x_1 x_2 x_3) = 0$ die Gleichung der vorliegenden $C^3$, so liefert das Product von $F$ mit irgend einer Form $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung stets eine zu $\varphi$ conjugirte ternäre Form, und jedes derartige Product muss sich also linear aus

$$f_1 \quad f_2 \cdots \quad f_{\frac{n\cdot(n+3)}{2}}$$

---

*) Salmon-Fiedler, l. c.

**) Die Definition der Polar-$p$-Ecke findet man in meiner schon erwähnten Abhandlung, Math. Ann. Bd. 30, p. 453.

Ueber den Begriff apolarer Curven cfr. Reye, Crelle's Journal Bd. 78; [illegible] conjugirte Curven cfr. Rosanes, Crelle's Journal Bd. 76.

zusammensetzen. Da es aber eine $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$-gliedrige Gruppe von ternären Formen $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung giebt, so resultiren, wenn

$$G_1(x)\, G_2(x) \cdots G_{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(x)$$

independente Repräsentanten derselben sind, die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Identitäten:

$$(37) \qquad F(x_1 x_2 x_3)\; G_\varkappa(x_1 x_2 x_3) \underset{x}{\equiv} \sum_{i=1}^{i=\frac{n(n+3)}{2}} \varrho_{\varkappa i} f_i(x_1 x_2 x_3),$$

$$\varkappa = 1 \cdots \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Setzen wir in diese Gleichungen $x_i = \mathsf{H}_i(u)$ (cfr. Gl. (33)), so wird $F$ identisch gleich 0 und es ergeben sich die Identitäten in $u$:

$$(38) \qquad 0 \underset{u}{\equiv} \varrho_{\varkappa 1} f_1(\mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2 \mathsf{H}_3) + \cdots + \varrho_{\varkappa, \frac{n(n+3)}{2}} f_{\frac{n(n+3)}{2}}(\mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2 \mathsf{H}_3)$$

$$\varkappa = 1 \cdots \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Nun ist aber $f_i(\mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2 \mathsf{H}_3)$ nichts anderes, als die $\vartheta_0^{3n}$, welche die Curve $f_i$ auf $C^3$ ausschneidet. Zwischen den $\frac{n(n+3)}{2}$ $\vartheta_0^{3n}$-Functionen, die von $f_1 f_2 \cdots f_{\frac{n(n+3)}{2}}$ ausgeschnitten werden, bestehen mithin $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ lineare homogene Gleichungen und dieselben bilden demnach nur eine

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 3n - 1\text{-}$$

gliedrige Gruppe, oder:

20. *Ist $\varphi(u_1 u_2 u_3)$ eine Curve $n^{\text{ter}}$ Classe, die zu $C^3$ apolar ist, so schneidet die $\frac{n(n+3)}{2}$-gliedrige Gruppe der zu $\varphi$ conjugirten Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung nur eine $(3n-1)$-gliedrige Gruppe von $\vartheta_0^{3n}$ aus.*

Diese $G_{3n-1}$ von $\vartheta_0^{3n}$ verdient besondere Beachtung. $3n$ Punkte der $C^3$, durch welche *nur* conjugirte Curven von $\varphi$ hindurchgehen, die also nach Satz 2 meiner oben citirten Abhandlung ein Polar-$3n$-Eck von $\varphi = 0$ bilden, müssen eine $\vartheta_0^{3n}$ der erwähnten $G_{3n-1}$ constituiren, da sie ja durch zu $\varphi$ conjugirte Curven ausgeschnitten werden. Umgekehrt liefern die Nullpunkte $\alpha_1 \ldots \alpha_{3n}$ jeder $\vartheta_0^{3n}$ der genannten Gruppe ein Polar-$3n$-Eck von $\varphi = 0$. Diese Punkte werden nämlich durch mindestens *eine* zu $\varphi$ conjugirte Curve $f = 0$ auf $C^3$ $(F = 0)$ ausgeschnitten. Ist nun $f' = 0$ eine andere Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch

$\alpha_1 \cdots \alpha_{3n}$ geht, so lässt sich bekanntlich stets eine Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $G = 0$ so finden, dass:

$$f' \equiv \varrho f + FG.$$

Da nun $f$ zu $\varphi$ conjugirt, $F$ dazu apolar ist, so ist auch $f'$ zu $\varphi = 0$ conjugirt, und man sieht, dass jede durch $\alpha_1 \ldots \alpha_{3n}$ gehende Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung dieselbe Eigenschaft hat; d. h. dass $\alpha_1 \ldots \alpha_{3n}$ ein Polar-$3n$-Eck von $\varphi = 0$ ist. Wir können daher den Satz 20. in folgender Form aussprechen:

20a. *Ist $\varphi(u_1 u_2 u_3) = 0$ eine zu $C^3$ apolare Curve $n^{ter}$ Classe, so giebt es auf $C^3$ eine $G_{3n-1}$ von $\vartheta_0^{3n}$, deren Nullpunkte Polar-$3n$-Ecke von $\varphi = 0$ bilden.*

Die beiden letzten Sätze lassen sich erweitern, indem man an Stelle von $\varphi(u_1 u_2 u_3) = 0$ mehrere zu $F$ apolare Curven $n^{\text{ter}}$ Classe:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \cdots \varphi_g = 0$$

treten lässt. Der Gang der Betrachtung wird dadurch gar nicht geändert; die Zahl der Curven $f_k = 0$ ist nicht mehr

$$\frac{n(n+3)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1,$$

sondern

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - g.$$

Die Zahl der Gleichungen, die an Stelle von (37) und (38) treten, bleibt dagegen dieselbe, und da sich auch die Erwägung, die von Satz 20. zu 20a hinüberführte, mutatis mutandis übertragen lässt, so folgt:

21. *Sind $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0 \cdots \varphi_g = 0$ $g$ independente zu $C^3$ apolare Curven $n^{ter}$ Classe, so giebt es auf der $C^3$ eine $G_{3n-g}$ von $\vartheta_0^{3n}$, deren Nullpunkte gemeinschaftliche Polar-$3n$-Ecke sämmtlicher Curven $\varphi$ vorstellen.*

Ich frage mich nun nach einer $\vartheta_\varrho^p$, deren Nullpunkte $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ ein Polar-$p$-Eck sämmtlicher $\varphi$ bilden. Nach Satz 1 meiner schon mehrfach erwähnten Arbeit muss *jede* Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ geht, zu allen $\varphi$ conjugirt sein und mithin jedes zu $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ gehörige Restsystem von je $(3n-p)$ Punkten mit $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ zusammen ein Polar-$3n$-Eck sämmtlicher $\varphi$, d. h. ein Element unserer $G_{3n-g}$ vorstellen. Umgekehrt, wenn jedes zu $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ gehörige Restsystem von je $(3n-p)$ Punkten mit $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ vereinigt ein Polar-$3n$-Eck aller $\varphi$ liefert, so ist es unmöglich, durch $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung zu legen, die *nicht* zu allen $\varphi$ conjugirt ist, d. h. $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ ist (l. c. Satz 2) ein Polar-$p$-Eck sämmtlicher Curven $\varphi$. Die Gesammtheit der zu den Nullpunkten der $\vartheta_\varrho^p$ gehörigen Restsysteme von

je $(3n-p)$ Punkten wird aber nach Satz 19 vertreten durch die Gesammtheit der $\vartheta_{(-\varrho)}^{3n-p}$; soll also $\vartheta_{\varrho}^{p}$ ein Polar-$p$-Eck aller $\varphi$ vorstellen, so ist nothwendig und hinreichend, dass es durch jede $\vartheta_{-\varrho}^{3n-p}$ zu einer $\vartheta_0^{3n}$ unserer $G_{3n-g}$ ergänzt wird. Die Frage nach diesen $\vartheta_{\varrho}^{p}$ wird durch unsere Sätze 11, 11a und 11b sofort erledigt, wenn man in denselben

$$\sigma = 0,$$

$$p + q = 3n$$

setzt. Es ist alsdann

$$p - qg = p - (3n - p)\, g = (g+1)\, p - 3gn.$$

Da die Anwendung der Sätze 11 und 11a voraussetzt, dass

$$p - qg = (g+1)\, p - 3gn > 0$$

ist, so folgen zunächst aus ihnen die Sätze:

22. *Sind* $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0 \cdots \varphi_g = 0$ *independente zu* $C^3$ *apolare Curven* $n^{ter}$ *Classe und ist* $r = (g+1)\, p - 3gn$ *grösser als Null, so giebt es auf* $C^3$ *im Allgemeinen (und mindestens) für jeden Werth von* $\varrho$ *eine* $r$*-gliedrige Gruppe von* $\vartheta_{\varrho}^{p}$*, deren Punkte Polar-*$p$*-Ecke sämmtlicher Curven* $\varphi$ *repräsentiren.*

22a. *Sollen unter denselben Voraussetzungen* $r$ *beliebige Punkte* $\beta_1 \ldots \beta_r$ *zu einem auf* $C^3$ *gelegenen Polar-*$p$*-Eck aller Curven* $\varphi$ *ergänzt werden, so ist dies auf* $(g+1)$ *verschiedene Arten möglich. Die so erhaltenen* $(g+1)$ *Polar-*$p$*-Ecke bilden* $\vartheta^{p}$*-Functionen, die zu verschiedenen oder gleichen Indexwerthen* $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_{g+1}$ *gehören. Es gilt aber die Relation:*

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{g+1} \equiv \beta_1 + \cdots + \beta_r \ (\text{mod. } \omega\, \omega'). \tag{39}$$

Ebenso folgt aus Satz 11b:

22b. *Sind* $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0 \cdots \varphi_g = 0$ *independente, zu* $C^3$ *apolare Curven* $n^{ter}$ *Classe und ist* $(g+1)\, p - 3gn = 0$, *so giebt es im Allgemeinen auf* $C^3$ $(g+1)$ *Polar-*$p$*-Ecke sämmtlicher Curven* $\varphi$. *Dieselben stellen* $\vartheta^{p}$*-Functionen mit den Indexwerthen* $\varrho_1 \ldots \varrho_{g+1}$ *vor, für welche die Relation*

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{g+1} \equiv 0 \ (\text{mod. } \omega\, \omega') \tag{39a}$$

*besteht.*

Aus der grossen Zahl einzelner Sätze, die sich hieraus ergeben, will ich nur einige einer näheren Discussion unterziehen. Zunächst sei $g = 1$ und $n = 3$; d. h. es liege nur *eine* zu $C^3$ conjugirte $K^3$ vor. Alsdann ist:

$$r = 2p - 9.$$

Da dieser Ausdruck für $p = 4$ negativ ist, so sieht man, *dass eine*

*$C^3$ im Allgemeinen kein Polarviereck einer zu ihr conjugirten $K^3$* enthält. Ferner ergiebt sich

$$\text{für } p = 5,\ 6,\ 7$$
$$r = 1,\ 3,\ 5.$$

Der Fall $p = 5$, $r = 1$ lehrt insbesondere, dass für jeden Werth $\varrho$ *eine* $\vartheta_\varrho^5$ existirt, welche ein Polarfünfeck von $K^3$ bildet. Da nach Satz 18a die durch einen Punkt $\alpha'$ von $C^3$ gehenden Kegelschnitte alle $\vartheta^5$ ausschneiden, die zu einem bestimmten Index $(-\alpha')$ gehören, so folgt:

23. *Sind $C^3$ und $K^3$ conjugirt, so geht durch jeden Punkt $y$ von $C^3$ ein und nur ein Kegelschnitt $C_y$, dessen 5 weitere Schnittpunkte ein Polarfünfeck von $K^3$ bilden.*

*Dieser Kegelschnitt ist übrigens zu $K^3$ apolar.* (cfr. Math. Ann. Bd. 30, p. 457, Satz 5).

Es giebt also in der 2-fachen Mannigfaltigkeit der zu $K^3$ apolaren Kegelschnitte eine einfache Mannigfaltigkeit $M$ von der Beschaffenheit, dass 5 der Schnittpunkte eines Kegelschnitts von $M$ mit der $C^3$ ein Polarfünfeck von $K^3$ bilden. Zu jedem Punkt $y$ der $C^3$ gehört ein Kegelschnitt $(C_y)$ von $M$, der zwar durch $y$ hindurchgeht, indessen ein Polarfünfeck ausschneidet, dem $y$ *nicht* angehört.

Aus Satz 22a folgt nun, dass jeder Punkt $y$ der $C^3$ auf 2 verschiedene Arten zu einem Polarfünfeck von $K^3$ ergänzt werden kann. Es gehen mithin durch ihn *drei* Kegelschnitte der Mannigfaltigkeit $M$ hindurch, nämlich erstens der Kegelschnitt $C_y$, der auf $C^3$ ein Polarfünfeck ausschneidet, welchem $y$ *nicht* angehört und demnächst 2 Kegelschnitte $C_\pi C_{\pi'}$, welche die beiden obenerwähnten Polarfünfecke ausschneiden, die $y$ enthalten. Die durch $C_\pi C_{\pi'}$ ausgeschnittenen Polarfünfecke stellen aber (nach Satz 18a) $\vartheta^5$-Functionen von den Indexwerthen $-\pi$ resp. $-\pi'$ vor. Nach Aussage des Satzes 22a ist mithin:

$$-\pi - \pi' \equiv y \pmod{\omega\,\omega'}$$

oder

$$y + \pi + \pi' \equiv 0 \pmod{\omega\,\omega'},$$

d. h. die Punkte $y\,\pi\,\pi'$ liegen in gerader Linie. Es folgt mithin:

23a. *Sind $C^3$ und $K^3$ conjugirt, so lässt sich jeder Punkt $y$ der $C^3$ auf 2 verschiedene Arten zu einem Polarfünfeck von $K^3$ ergänzen. Sind die so erhaltenen Polarfünfecke $y\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $y\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4'$ und legt man durch jedes derselben den einen durchgehenden Kegelschnitt, so schneiden dieselben $C^3$ noch resp. in den Punkten $\pi$ und $\pi'$. Alsdann liegen $y\,\pi\,\pi'$ in derselben Geraden.*

Die soeben bewiesenen Sätze habe ich in meiner schon mehrfach citirten Abhandlung auf wesentlich anderem Wege erlangt, und dabei

gleichzeitig die Aufgabe gelöst, sowohl die Polarfünfecke in ihrer Gesammtheit, als auch diejenigen, welche einen bestimmten Punkt $y$ enthalten, geometrisch zu construiren. Ich gehe auf diese constructiven Probleme, die sich hier unmittelbar aufdrängen, an dieser Stelle nicht ein und erlaube mir ihrethalben auf die angeführte Stelle zu verweisen. Man findet dort auch den Nachweis, dass die Verwandtschaft, welche zwischen den Punkten $y$ der Curve und den ihnen zugehörigen Curven $C_y$ besteht, auf eine Collineation zurückgeführt werden kann.

Betrachten wir weiterhin den Fall, dass $p = 6$, also $r = 3$ ist, so folgt, dass für jeden Werth von $\varrho$ eine 3-gliedrige Gruppe von $\vartheta_\varrho^6$ existirt, die Polar-6-Ecke von $K^3$ vorstellen. Es lassen sich also bei gegebenem $\varrho$ zwei beliebige Punkte $\alpha_5 \alpha_6$ auf eine und nur eine Art zu einer $\vartheta_\varrho^6$ ergänzen, die ein Polar-6-Eck von $K^3$ formirt. Nun sind die Gruppen von 5 Punkten, welche $\alpha_6$ zu einer $\vartheta_\varrho^6$ vervollständigen, identisch mit der Gesammtheit der $\vartheta^5_{\varrho-\alpha_6}$. Diese werden aber nach Satz 18a von den $C^2$ ausgeschnitten, die durch den Punkt mit dem Parameter $\alpha_6 - \varrho$ gehen. Durch $\alpha_6 - \varrho$ und $\alpha_5$ geht also *ein* Kegelschnitt, dessen weitere Schnittpunkte $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ mit $\alpha_5 \alpha_6$ zusammen ein Polarsechseck bilden. Da dies aber für jedes $\varrho$ gilt, so kann durch passende Wahl von $\varrho$ *jeder* Punkt $\alpha'$ der Curve zu $\alpha_6 - \varrho$ gemacht werden (nach der Gl. $\alpha' \equiv \alpha_6 - \varrho$) und es folgt mithin:

23b. *Ist $K^3$ zu $C^3$ conjugirt und sind 2 Punkte $\alpha_5 \alpha_6$ auf $C^3$ gegeben, so giebt es durch jeden Punkt $\alpha'$ der $C^3$ einen Kegelschnitt, der durch $\alpha_5$ geht und dessen weitere Schnittpunkte $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ mit $\alpha_5 \alpha_6$ zusammen ein Polarsechseck von $K^3$ bilden.*

Andererseits giebt uns der Satz 22a wiederum Auskunft über die Art, wie 3 gegebene Punkte $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ zu einem Polarsechseck von $K^3$ ergänzt werden können. Es ist auf 2 Arten möglich. Die ergänzenden Punkte seien das eine Mal $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, das andere Mal $\alpha_1' \alpha_2' \alpha_3'$ und sie mögen die Punkte $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ im ersten Fall zu einer $\vartheta_\varrho^6$, im 2ten zu einer $\vartheta_{\varrho'}^6$ ergänzen. Dann ist:

$$\sum_1^3 \alpha_i + \sum_1^3 \beta_i \equiv \varrho \quad (\text{mod. } \omega\omega'),$$

$$\sum_1^3 \alpha_i' + \sum_1^3 \beta_i \equiv \varrho' \quad (\text{mod. } \omega\omega')$$

und nach Satz 22a:

$$\varrho + \varrho' \equiv \sum_1^3 \beta_i \quad (\text{mod. } \omega\omega').$$

Mithin folgt:

$$\sum_1^3 \alpha_i + \sum_1^3 \alpha_i' + \sum_1^3 \beta_i \equiv 0$$

und wir haben den Satz:

23c. *Ist $K^3$ zu $C^3$ conjugirt, so lassen sich 3 beliebige Punkte $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3$ von $C^3$ auf 2 verschiedene Arten zu einem Polarsechseck von $K^3$ ergänzen. Die 6 Punkte, die dies leisten, bilden mit $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3$ zusammen ein abhängiges System von 9 Punkten.*

Ebenso ergiebt sich durch eine analoge Interpretation des Satzes 22 im Falle $p = 7$, $r = 5$ das folgende Resultat:

23d. *Ist $K^3$ zu $C^3$ conjugirt und ist $\varrho$ ein beliebiger Punkt der $C^3$, so lassen sich zu 4 beliebigen Punkten $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ stets 3 Punkte auf eine Art so hinzubestimmen, dass die sieben Punkte zugleich einen beigeordneten Rest von $\varrho$ und ein Polarsiebeneck von $K^3$ formiren.*

*Andrerseits können 5 beliebige Punkte $\beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_5$ auf 2 Arten zu je einem Polarsiebeneck von $K^3$ ergänzt werden. Die 4 Punkte, welche dies leisten, bilden mit $\beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_5$ ein abhängiges System von 9 Punkten.*

Jeder der soeben abgeleiteten Sätze 23—23d ist geeignet, eine geometrische Interpretation für die sonst nur algebraisch definirte conjugirte Beziehung der Curven $C^3$ und $K^3$ darzubieten. Indessen wird unter ihnen derjenige den Vorzug haben müssen, der sich auf die geometrisch einfachste Figur bezieht. Wir werden hier in der That so verfahren, wie es gewöhnlich bei den Kegelschnitten geschieht. Wenn eine $C^2$ zu einer $K^2$ conjugirt ist, so können bekanntlich der $C^2$ nicht nur einfach unendlich viele Polardreiecke, sondern auch 3-fach unendlich viele Polarvierecke von $K^2$ eingeschrieben werden; indessen pflegt man in der Regel nur die erste einfachere Thatsache zu benutzen. Es ist demnach klar, dass wir an dieser Stelle zunächst den Satz 23. in's Auge fassen müssen. Dass jede Curve 3. O., welche durch ein Polar-5-Eck von $K^3$ geht, zu dieser Curve conjugirt ist, war evident; unser Satz lehrt auch, dass das Umgekehrte der Fall ist. Es ergiebt sich daher:

24. *Unsere $C^3$ ist zu einer Curve $3^{ter}$ Classe $K^3$ dann und nur dann conjugirt, wenn ihr einfach unendlich viele Polarfünfecke von $K^3$ eingeschrieben sind.*

Es wird sich nun darum handeln, ganz entsprechend eine geometrische Interpretation für die Thatsache zu gewinnen, dass eine Curve $n^{ter}$ Classe ($u_\alpha^n = 0$) zu $C^3$ ($a_x^3 = 0$) apolar ist, d. h. für das Stattfinden der Identität:

$$a_\alpha^3\, u_\alpha^{n-3} \underset{u}{\equiv} 0.$$

Wir haben zu diesem Zweck im Satze 22 $g = 1$ zu setzen; es wird alsdann:

$$r = 2p - 3n.$$

Damit die geometrische Definition möglichst einfach wird, muss $p$ oder was dasselbe ist, $r$ möglichst klein sein. Nun wird $r = 0$, wenn $p = \frac{3n}{2}$, was, da $p$ ganzzahlig sein muss, nur möglich, wenn $n$ eine gerade Zahl $= 2\nu$. Es ist also dann:

$$\begin{aligned} n &= 2\nu, \\ p &= 3\nu, \\ r &= 0. \end{aligned} \tag{40a}$$

Ist $n$ im Gegentheil eine ungerade Zahl, $= 2\nu + 1$, so kann $r = 2p - 6\nu - 3$ auf den Werth 1 gebracht werden, indem man $p = 3\nu + 2$ setzt. Dann ist also:

$$\begin{aligned} n &= 2\nu + 1, \\ p &= 3\nu + 2, \\ r &= 1. \end{aligned} \tag{40b}$$

Im ersten Fall giebt es auf $C^3$ nur 2 Polar-$3\nu$-Ecke $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{3\nu})$ $(\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_{3\nu}')$ der apolaren $K^{2\nu}$. Bilden dieselben $\vartheta^{3\nu}$-Functionen resp. vom Index $\varrho$ und $\varrho'$, so ist nach 22b:

$$\varrho + \varrho' \equiv 0.$$

Andrerseits ist aber:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{3\nu} &\equiv \varrho, \\ \alpha_1' + \alpha_2' + \cdots + \alpha_{3\nu}' &\equiv \varrho', \end{aligned}$$

mithin folgt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{3\nu} + \alpha_1' + \alpha_2' + \cdots + \alpha_{3\nu}' \equiv 0.$$

Es ergiebt sich also der Satz:

25a. *Eine Curve $2\nu^{ter}$ Classe $K^{2\nu}$ ist zu einer $C^3$ dann und nur dann apolar, wenn $C^3$ zwei Polar-$3\nu$-Ecke von $K^{2\nu}$ enthält.*

*Ist dies der Fall, so bilden die $6\nu$ Punkte dieser 2 Polar-$3\nu$-Ecke ein vollständiges Schnittpunktsystem.*

Im $2^{ten}$ Fall (40b) giebt es auf $C^3$ einfach unendlich viele Polar-$3\nu + 2$-Ecke der apolaren $K^{2\nu+1}$. Zu jedem Werthe von $\varrho$ gehört nämlich eine und nur eine $\vartheta_\varrho^{3\nu+2}$, welche ein Polar-$(3\nu+2)$-Eck bildet. Aus 18a ergiebt sich, dass durch jeden Punkt von $C^3$ *eine* Curve $(\nu+1)^{ter}$ Ordnung geht, deren weitere Schnittpunkte ein Polar-$(3\nu+2)$-Eck formiren. Weiterhin folgt aber, dass jeder Punkt $\beta$ der $C^3$ zwei verschiedenen $\vartheta^{3\nu+2}$ der genannten Beschaffenheit angehört, deren

Indices $\varrho$ und $\varrho'$, deren Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_{3\nu+2}$, resp. $\alpha_1' \ldots \alpha_{3\nu+2}'$ sein mögen. Dann weiss man dass $-\varrho$ der Restpunkt von $\alpha_1 \ldots \alpha_{3\nu+2}$, $-\varrho'$ der von $\alpha_1' \ldots \alpha_{3\nu+2}'$ ist. Da nun

$$\varrho + \varrho' \equiv \beta,$$
$$\beta - \varrho - \varrho' \equiv 0,$$

so liegen die genannten Restpunkte mit $\beta$ auf derselben Geraden. Im Ganzen haben wir also das folgende Resultat:

25b. *Eine Curve $(2\nu+1)^{ter}$ Classe $K^{2\nu+1}$ ist zu einer $C^3$ dann und nur dann apolar, wenn der $C^3$ einfach unendlich viele Polar-$(3\nu+2)$-Ecke von $K$ eingeschrieben werden können.*

*Alsdann geht durch jeden Punkt der $C^3$ eine Curve $(\nu+1)^{ter}$ Ordnung, deren weitere Schnittpunkte eins der genannten Polar-$(3\nu+2)$-Ecke formiren.*

*Jeder Punkt $\beta$ der $C^3$ lässt sich ferner auf 2 Arten zu je einem Polar-$(3\nu+2)$-Eck von $K^{2\nu+1}$ ergänzen. Die beiden Restpunkte der so erhaltenen zwei Systeme von je $(3\nu+2)$ Punkten liegen mit $\beta$ in gerader Linie.*

Nach diesen Beispielen, die ich für die Anwendung des Satzes 22 gegeben habe, dürfte ein weiteres Eingehen auf specielle Fälle nicht nöthig sein. Um indessen die Fälle, in denen $g$ grösser als 1 ist, d. h. in denen mehrere apolare resp. conjugirte Curven betrachtet werden, nicht zu übergehen, erwähne ich noch die Sätze, die für

$$g = 2, \quad n = 3, \quad p = 6,$$
$$g = 3, \quad n = 3, \quad p = 7$$

resultiren.

26. *Ist die Schaar $(K_1^3 K_2^3)$ zu $C^3$ conjugirt, so giebt es auf der letzteren Curve 3 gemeinschaftliche Polarsechsecke der Schaar. Die $3 \cdot 6$ Punkte derselben bilden zusammen ein vollständiges Schnittpunktsystem.*

27. *Ist die 3-gliedrige Gruppe $(K_1^3 K_2^3 K_3^3)$ zu $C^3$ conjugirt, so giebt es auf $C^3$ einfach unendlich viele gemeinschaftliche Polarsiebenecke der Gruppe. Jeder Punkt $\beta$ gehört 4 verschiedenen Polarsiebenecken an. Construirt man zu diesen 4 Systemen von je 7 Punkten die beigeordneten Reste, so haben die erhaltenen 4 Punkte wiederum den Punkt $\beta$ zum beigeordneten Rest.*

Interessant ist z. B. auch der Satz für $g = 2$, $n = 4$, $p = 8$.

28. *Ist die Schaar $(K_1^4 K_2^4)$ zu $C^3$ apolar, so giebt es auf $C^3$ drei gemeinschaftliche Polarachtecke der Schaar. Die 3 Restpunkte dieser 3 Systeme von je 8 Punkten liegen auf einer Geraden.*

## § 4.

## Die analoge Untersuchung für Curven 3ter Ordnung mit Doppel- resp. Rückkehrpunkt.

Es soll hier nur in möglichster Kürze angedeutet werden, wie man die in den vorhergehenden Paragraphen für Curven vom Geschlechte 1 gewonnenen Resultate ganz analog für Curven 3. O. vom Geschlechte 0 herleiten kann. Wir betrachten zuerst eine $\mathfrak{C}^3$ mit Doppelpunkt, welche dargestellt sei durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon x_1 &= \varphi_1(x), \\ \varepsilon x_2 &= \varphi_2(x), \\ \varepsilon x_3 &= \varphi_3(x), \end{aligned} \tag{40}$$

wo $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ ganze Functionen 3ten Grades von $x$ sind. Es giebt alsdann 2 Werthe $x = \delta$, $x = \delta'$, die *nicht* unendlich benachbart sind, und für welche die Gleichung

$$\varphi_1(\delta) : \varphi_2(\delta) : \varphi_3(\delta) = \varphi_1(\delta') : \varphi_2(\delta') : \varphi_3(\delta')$$

existirt, so dass eine Constante $\varpi$ sich finden lässt, für welche:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\delta) &= \varpi \varphi_1(\delta'), \\ \varphi_2(\delta) &= \varpi \varphi_2(\delta'), \\ \varphi_3(\delta) &= \varpi \varphi_3(\delta'). \end{aligned} \tag{41}$$

Ich unterwerfe nun $x$ einer linearen Transformation vermöge der Gleichungen:

$$\frac{x-\delta}{x-\delta'} = m\xi, \qquad x = \frac{\delta - \delta' m\xi}{1 - m\xi}, \tag{42}$$

wo $m$ eine zunächst unbestimmte Grösse ist. Wir haben alsdann:

$$(1 - m\xi)^3 \varphi_i(x) = \psi_i(\xi),$$

wo $\psi_i$ eine ganze Function 3ten Grades von $\xi$ vorstellt. Es gehen nun die Gleichungen (40) über in die ganz gleichartigen:

$$\begin{aligned} \varepsilon' x_1 &= \psi_1(\xi) = b_{10}\xi^3 + b_{11}\xi^2 + b_{12}\xi + b_{13}, \\ \varepsilon' x_2 &= \psi_2(\xi) = b_{20}\xi^3 + b_{21}\xi^2 + b_{22}\xi + b_{23}, \\ \varepsilon' x_3 &= \psi_3(\xi) = b_{30}\xi^3 + b_{31}\xi^2 + b_{32}\xi + b_{33} \end{aligned} \tag{40a}$$

und da den Werthen

$$x = \delta, \quad x = \delta',$$

resp. die Werthe

$$\xi = 0, \quad \xi = \infty$$

entsprechen, ferner

$$\varphi_i(\delta) = \left[\frac{\psi_i(\xi)}{(1-m\xi)^3}\right]_{\xi=0} = \psi_i(0) = b_{i3},$$

$$\varphi_i(\delta') = \left[\frac{\psi_i(\xi)}{(1-m\xi)^3}\right]_{\xi=\infty} = \left[\frac{\psi_i\left(\frac{1}{z}\right)z^3}{(z-m)^3}\right]_{z=0} = \frac{(-1)^3}{m^3}\, b_{i0}$$

ist, so erhält man an Stelle der Gleichungen (41)

$$b_{13} = \varpi\, \frac{(-1)^3}{m^3}\, b_{10},$$

$$b_{23} = \varpi\, \frac{(-1)^3}{m^3}\, b_{20},$$

$$b_{33} = \varpi\, \frac{(-1)^3}{m^3}\, b_{30},$$

oder, indem wir die bisher willkürliche Grösse $m$ gleich dem absoluten Werth von $\sqrt[3]{\varpi}$ setzen:

$$\begin{aligned} b_{13} + b_{10} &= 0, \\ b_{23} + b_{20} &= 0, \\ b_{33} + b_{30} &= 0. \end{aligned} \tag{41a}$$

Die Gleichungen (40a) geben eine Parameterdarstellung*) der $\mathfrak{C}^3$, von der wir weiterhin ausgehen wollen. Der Punkt mit dem Parameter $\xi$ soll auch als Punkt $\xi$ bezeichnet werden. Dem Doppelpunkt entspricht das Parameterpaar $0, \infty$ und die Functionen $\psi_i$ sind so beschaffen, dass das Product der Wurzeln von $\psi_i(\xi) = 0$ den Werth 1 hat. Man wird hier leicht darauf geführt, ein Analogon für die $\vartheta_{\varrho^n}$-Functionen aufzustellen. Ich verfolge jedoch der Kürze halber den Weg, der dazu hinleitet, nicht, sondern gebe sofort die folgende *Definition:*

*Unter einer $D_{\varrho^n}$-Function verstehe ich eine ganze rationale Function $n^{ten}$ Grades von $\xi$,*

$$A_1\xi^n + A_1\xi^{n-1} + \cdots + A_n,$$

*deren Coefficienten der Gleichung:*

$$A_n - \varrho(-1)^n A_0 = 0 \tag{42}$$

*genügen.*

Man sieht, dass demnach $\psi_i$ als $D_1{}^3$-Functionen anzusehen sind. Es ergiebt sich nun sofort:

---

*) cfr. die Parameterdarstellung der Doppelpunktcurve bei Clebsch-Lindemann. Bd. II, p. 586.

29. *Sind* $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *die Wurzeln einer* $D_\varrho^n$*-Function, so ist*

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \varrho \tag{43}$$

*und umgekehrt ist jede ganze Function, für deren Wurzeln die Gleichung* (43) *gilt, eine* $D_\varrho^n$*-Function.*

Es folgt ferner:

30. *Jede ganze rationale Function* $n^{ten}$ *Grades lässt sich als* $D^n$ *mit bestimmtem Index ansehen, ausser wenn sowohl* 0, *als* $\infty$ *zu ihren Wurzeln gehört.*

*In diesem Ausnahmefall kann der Function jeder Index zugeschrieben werden.*

Ist nämlich die Function

$$A_0 \xi^n + A_1 \xi^{n-1} + \cdots + A_n,$$

so giebt die Gleichung (42) stets einen bestimmten Werth von $\varrho$ (die Werthe 0 und $\infty$ eingeschlossen), ausser wenn sowohl $A_n$, als $A_0$ Null ist. Dann hat aber die Function sowohl 0, als $\infty$ zu Wurzeln und *jeder* Werth von $\varrho$ genügt der Gleichung (42). Man könnte geneigt sein, diesen Fall für ausgeschlossen zu erklären, weil alsdann die Function in Folge von $A_0 = 0$ nur vom $(n-1)^{ten}$ Grade sei. Doch wäre dies ein wesentlicher Fehler, eine überflüssige Einschränkung, weil wir dann bei den auftretenden Functionen stets untersuchen müssten, ob ihr erster Coefficient von Null verschieden ist oder nicht.

Weiter ergiebt sich:

31. *Alle* $D_\varrho^n$ *bilden eine* $n$*-gliedrige Gruppe;*

denn sie werden aus der Gesammtheit aller ganzen Functionen $n^{ten}$ Grades durch die lineare Gleichung (42) ausgeschieden.

Aus der Definitionsgleichung folgt sofort:

32. *Das Product einer* $D_\varrho^p$ *und einer* $D_\sigma^q$ *ist eine* $D_{\varrho\cdot\sigma}^{p+q}$.

33. *Ein lineares Aggregat von* $D_\varrho^n$*-Functionen ist eine Function derselben Art.*

Aus den letzten beiden Sätzen ersieht man, dass wenn $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ eine Curve $n^{ter}$ Ordnung ist,

$$f(\psi_1 \psi_2 \psi_3)$$

eine $D_1^{3n}$ vorstellt. Da aber

$$f(\psi_1 \psi_2 \psi_3) = 0$$

die Parameter der Schnittpunkte der $\mathfrak{C}^3$ mit $f = 0$ giebt, so folgt:

34. *Sind* $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{3n}$ *die Parameter der Schnittpunkte einer Curve* $n^{ter}$ *Ordnung mit der* $\mathfrak{C}^3$, *so ist:*

(44) $$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{3n} = 1,$$

und umgekehrt:

35. *Gilt die Gleichung* (44), *so gehen durch* $\alpha_1 \ldots \alpha_{3n}$ *stets* [illegible] *endlich viele Curven* $n^{ter}$ *Ordnung hindurch;*

denn sind unter $\alpha_1 \ldots \alpha_{3n}$ nicht zu gleicher Zeit die Werthe [illegible] und $\infty$ enthalten, so lege man durch $\alpha_1 \ldots \alpha_{3n-1}$ irgend eine d[illegible] durchgehenden Curven $n^{ter}$ Ordnung. Dieselbe schneidet die $\mathfrak{C}^3$ no[illegible] in dem Punkte $\alpha'_{3n}$. Dann ist nach Satz 32:

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{3n-1} \alpha'_{3n} = 1$$

und da (44) gilt, $\alpha'_{3n} = \alpha_{3n}$.

Sind aber unter $\alpha_1 \ldots \alpha_{3n}$ die Werthe $0, \infty$ gleichzeitig vertreten, so ist die linke Seite von (44) thatsächlich unbestimmt und kann in Folge dessen auch als der Einheit gleich angesehen werden. Da aber $0, \infty$ denselben Punkt vorstellen, so ist von vornherein klar, dass durch die Punkte $\alpha$ eine Curve $n^{ter}$ Ordnung gelegt werden kann.

Um nun die geometrische Bedeutung der $D_\varrho^p$ festzustellen, beachte man zunächst, dass der Punkt mit dem Parameter $\alpha$ eine $D_\alpha^1$ repräsentirt und verfahre alsdann genau so, wie in § 3, indem man die Fälle $p = 3q$, $p = 3q+1$, $p = 3q+2$ unterscheidet. Wir brauchen indessen die Bedeutung der $D_\varrho^p$ nur für den Fall zu untersuchen, dass unter den Punkten derselben nicht gleichzeitig die Punkte 0 und $\infty$ auftreten; denn wir wissen, dass $p$ Punkte, welche diese gleichzeitig enthalten, *allen* Classen von $D^p$-Functionen angehören. Man findet nun sehr leicht, dass die $D_\varrho^p$ auf der $\mathfrak{C}^3$ dieselbe Bedeutung hat, wie die $\vartheta_\varrho^p$ auf der Curve dritter Ordnung vom Geschlechte 1. Es seien z. B. $\alpha_1 \ldots \alpha_{3q}$ die Punkte einer $D_\varrho^{3q}$, dann ist

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{3q} = \varrho.$$

Jede Curve, die durch $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{3q-1}$ geht, geht auch durch einen ganz bestimmten Punkt $\alpha'_{3q}$. Es ist nun

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{3q-1} \alpha'_{3q} \alpha_{3q} = \varrho \alpha'_{3q},$$
$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{3q-1} \alpha'_{3q} = 1,$$

also

$$1 \cdot \alpha_{3q} = \varrho \alpha'_{3q}.$$

Es ergiebt sich mithin, ganz entsprechend dem Satze 16, das folgende Resultat:

36. *Die* $3q$ *Punkte einer* $D_\varrho^{3q}$ *sind so beschaffen, dass wenn man zu irgend* $(3q-1)$ *von ihnen den Restpunkt* $\alpha'$, *zu* $\alpha'$ *und* $\varrho$ *den Restpunkt* $\alpha''$, *schliesslich zu* $\alpha''$ *und dem Punkte* 1 *den Restpunkt construirt, dieser Letztere mit dem* $3q^{ten}$ *Punkte identisch ist.*

Ganz ebenso folgt:

37. *Jede* $D_\varrho^{3q+1}$ *besteht aus* $(3q+1)$ *Punkten, die den Punkt* $\varrho$ *zum beigeordneten Rest haben.*

38. *Die* $(3q+2)$ *Punkte einer* $D_\varrho^{3q+2}$ *sind so beschaffen, dass ihr Restpunkt dritter Schnittpunkt von* $\overline{\varrho 1}$ *mit der Curve ist.*

*Es gelten ferner Bemerkungen, welche den unter Satz* 18a *und* 19 *gemachten, ganz analog sind.*

Wenn nun $g$ zu $\mathfrak{C}^3$ apolare Curven $n^{\text{ter}}$ Classe $\varphi_1 = 0 \ldots \varphi_g = 0$ vorliegen, und wir uns die Aufgabe stellen, alle gemeinschaftliche Polar-$p$-Ecke derselben, die auf $\mathfrak{C}^3$ gelegen sind, zu bestimmen, so kommt dieselbe hier, ganz analog wie oben, darauf hinaus, alle $D_\varrho^p$-Functionen herzustellen, die mit jeder $D_{\left(\frac{1}{\varrho}\right)}^{3n-p}$ zusammen je eine $D_1^{3n}$ liefern, die einer bestimmten $(3n-g)$-gliedrigen Gruppe angehört. Etwas verallgemeinert würde diese Aufgabe folgendermassen lauten:

„Es sollen alle $D_\varrho^p$ bestimmt werden, die mit *jeder* $D_{\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)}^q$ zusammen je eine $\vartheta_\sigma^{p+q}$ einer bestimmten $(p+q-g)$-gliedrigen Gruppe bilden."

Um diese Aufgabe zu lösen, braucht man nur Schritt für Schritt den Weg zu verfolgen, den wir in § 1 innegehalten haben. Wir wählen auch hier $(p+q)$ willkürliche Grössen

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p, \quad \alpha_{p+1} \ldots \alpha_{p+q},$$

welche so beschaffen sind, dass

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i=p+q}} \alpha_i \quad \text{nicht} = \sigma$$

ist; wir setzen

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i=p}} \alpha_i = s, \quad \prod_{\substack{i=p+1 \\ i=p+q}} \alpha_i = t,$$

so dass

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i=p+q}} \alpha_i = st,$$

und bilden die Functionen:

$$H_i = (u-\alpha_1) \cdots (u-\alpha_{i-1}) \left(u - \frac{\varrho \alpha_i}{s}\right) (u-\alpha_{i+1}) \cdots (u-\alpha_p),$$

$$i = 1 \cdots p,$$

$$Z_\lambda = (u-\alpha_{p+1})\cdots(u-\alpha_{\lambda-1})\left(u-\frac{\sigma\alpha_\lambda}{\varrho t}\right)(u-\alpha_{\lambda+1})\cdots(u-\alpha_{p+q}),$$
$$\lambda = p+1\cdots p+q,$$

$$D_\mu = (u-\alpha_1)\cdots(u-\alpha_{\mu-1})\left(u-\frac{\sigma\alpha_\mu}{st}\right)(u-\alpha_{\mu+1})\cdots(u-\alpha_{p+q}),$$
$$\mu = 1\cdots p+q.$$

Wir beziehen nun alle $D_\varrho^p$, $D^q_{\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)}$, $D_\sigma^{p+q}$ resp. auf die Formen $H_i, Z_\lambda, D_\mu$ als Grundformen und setzen die für unser Problem nothwendigen Gleichungen an. Es ergeben sich alsdann genau dieselben Resultate, nur dass, wo früher eine Summe von Parametern auftrat, hier ein Product von solchen an die Stelle tritt, eine Aenderung, die, wie wir gesehen haben, dasselbe geometrische Resultat producirt. Es erscheint daher überflüssig, die weitere Ausführung, die wie gesagt, genau denselben Weg einhält, hier niederzuschreiben.

Es erübrigt aber noch, ein entsprechendes Verfahren für die Curve mit Rückkehrpunkt anzudeuten. Eine solche Curve kann stets durch die Gleichungen:

$$\varepsilon x_1 = 1,$$
$$\varepsilon x_2 = \xi,$$
$$\varepsilon x_3 = \xi^3$$

repräsentirt werden*). Die rechten Seiten sind cubische Functionen, in denen das Glied mit $\xi^2$ fehlt. Man kann umgekehrt, was hier der Kürze halber übergangen werden mag, leicht zeigen, dass auch die allgemeineren Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varepsilon' x_1 &= \varphi_1(\xi) = a_{10}\xi^3 + a_{11}\xi^2 + a_{12}\xi + a_{13},\\ \varepsilon' x_2 &= \varphi_2(\xi) = a_{20}\xi^3 + a_{21}\xi^2 + a_{22}\xi + a_{23},\\ \varepsilon' x_3 &= \varphi_3(\xi) = a_{30}\xi^3 + a_{31}\xi^2 + a_{32}\xi + a_{33}\end{aligned} \tag{45}$$

stets eine Curve mit Rückkehrpunkt vorstellen, sobald nur

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0. \tag{46}$$

Ich lege nun die Gleichungen (45), (46) der weiteren Untersuchung der Curve $\mathfrak{C}^3$ zu Grunde und definire hier eine $D_\varrho^n$ folgendermassen:

*„Unter einer $D_\varrho^n$ verstehe ich eine ganze Function $n^{ten}$ Grades*

$$A_0\xi^n + A_1\xi^{n-1} + \cdots + A_n,$$

*für welche*

*) cfr. Clebsch-Lindemann, Bd. II, p. 592.

$$A_0 \varrho + A_1 = 0$$

*ist.*“

Man sieht sofort, dass nun $\varphi_i(\xi)$ eine $D_0^3$ ist, und dass für die Wurzeln $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ einer $D_\varrho^n$ die Gleichung gilt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \varrho.$$

Die Analogie mit den $\vartheta_\varrho^n$-Functionen ist hier also eine noch vollkommenere, und es erübrigt sich daher, die Consequenzen, die ganz ebenso wie oben aus der Definition gezogen werden können, weiter zu verfolgen. Indem man denselben Weg einschlägt, übersieht man sehr leicht, dass alle unsere Resultate auch für Curven mit Rückkehrpunkt erhalten bleiben.

Zürich, im September 1887.

# Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen linearer Differentialgleichungen.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

Sei

$$(1) \qquad y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \cdots + p_{m-1} y' + p_m y$$

eine lineare Differentialgleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung mit algebraischen Coefficienten; es soll die Frage erörtert werden, ob ein Integral derselben eine algebraische Function eines anderen Integrales und der $m-2$ ersten Ableitungen von der Form

$$(2) \qquad y_2 = F(x, y_1, y_1', y_1'', \cdots, y_1^{(m-2)})$$

sein kann, wenn $y_1$ nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der $m^{\text{ten}}$ genügen soll.

Da bekanntlich in symbolischer Bezeichnungsweise

$$(3) \quad y_2^{(x)} = \sum_{n_1+2n_2+\cdots+xn_x=x} \frac{x!}{n_1!\, n_2! \ldots n_x!} \cdot \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \ldots (x!)^{n_x}}$$
$$\times \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_1'} y_1'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_1^{(m-2)}} y_1^{(m-1)} \right)^{n_1}$$
$$\times \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_1'} y_1'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_1^{(m-2)}} y_1^{(m)} \right)^{n_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1^{(x)} + \frac{\partial F}{\partial y_1'} y_1^{(x+1)} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_1^{(m-2)}} y_1^{(m+x-2)} \right)^{n_x}$$

ist, so wird sich durch Einsetzen von $y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m)}$, nachdem $y_1^{(m)}, y_1^{(m+1)}, \ldots$ vermöge (1) herausgeschafft sind, in die Differentialgleichung (1) eine Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung in $y_1$ ergeben, und diese muss der für $y_1$ gemachten Annahme gemäss eine identische sein. Da aber in $F$ die $m-1^{\text{te}}$ Ableitung von $y_1$ nicht vorkommt, so werden die Coefficienten der mit der $m-1^{\text{ten}}$ Ableitung behafteten Posten der eben erwähnten identischen Gleichung Be-

dingungen für die Function $F(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-2)})$ liefern, welche die Form derselben festzustellen gestatten werden.

Werde z. B. verlangt, dass ein Integral eine algebraische Function eines anderen Integrales und der unabhängigen Variabeln sei, dass also die Gleichung (2) in

$$y_2 = F(x, y_1) \tag{4}$$

übergehe, so wird nach (3)

$$y_2^{(\varkappa)} = \sum_{n_1+2n_2+\cdots+\varkappa n_\varkappa=\varkappa} \frac{\varkappa!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\varkappa!} \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\varkappa!)^{n_\varkappa}} \times \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1'\right)^{n_1} \frac{\partial^{n_2+n_3+\cdots+n_\varkappa} F}{\partial y_1^{n_2+n_3+\cdots+n_\varkappa}} y_1''^{n_2} y_1'''^{n_3} \cdots y_1^{(\varkappa)^{n_\varkappa}}, \tag{5}$$

und diese Werthe in (1) eingesetzt liefern die identisch zu erfüllende Gleichung

$$\begin{aligned} &\sum_{n_1+2n_2+\cdots+mn_m=m} \frac{m!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(m!)^{n_m}} \\ &\qquad \times \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1'\right)^{n_1} \frac{\partial^{n_2+\cdots+n_m} F}{\partial y_1^{n_2+\cdots+n_m}} y_1''^{n_2} \cdots y_1^{(m-1)^{n_{m-1}}} \\ &\qquad \times (p_1 y_1^{(m-1)} + \cdots + p_m y_1)^{n_m} \\ &= p_1 \sum_{n_1+2n_2+\cdots+(m-1)n_{m-1}=m-1} \frac{(m-1)!}{n_1!\, n_2! \ldots n_{m-1}!} \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(m-1!)^{n_{m-1}}} \\ &\qquad \times \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1'\right)^{n_1} \frac{\partial^{n_2+\cdots+n_{m-1}} F}{\partial y_1^{n_2+\cdots+n_{m-1}}} y_1''^{n_2} \cdots y_1^{(m-1)^{n_{m-1}}} \\ &+ p_2 \sum \cdots + \cdots + p_m F. \end{aligned} \tag{6}$$

Ist nun auf der linken Seite dieser Gleichung $n_m = 1$, so dass $n_1 = n_2 = \cdots = n_{m-1} = 0$ werden, so lautet der Coefficient von $y_1^{(m-1)}$: $p_1 \frac{\partial F}{\partial y_1}$; ist dagegen $n_m = 0$, so wird, wenn auf der linken Seite $y_1^{(m-1)}$ in einem Posten vorkommen soll, $n_{m-1} = 1$ sein müssen und somit $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = \cdots = n_{m-2} = n_m = 0$, so dass der Coefficient von $y_1^{(m-1)}$

$$m\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1'\right) \frac{\partial F}{\partial y_1}$$

wird; wir erhalten somit für den Coefficienten von $y_1^{(m-1)}$ auf der linken Seite der Gleichung (6) den Ausdruck

$$p_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + m\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} y_1'\right);$$

bemerkt man nun aber, dass $y_1^{(m-1)}$ auf der rechten Seite der Gleichung (6) nur in der ersten Summe und zwar nur in der Combination

$$n_{m-1} = 1, \quad n_1 = n_2 = \cdots = n_{m-2} = 0$$

vorkommt, also den Coefficienten $p_1 \frac{\partial F}{\partial y_1}$ hat, so folgt durch Vergleichung der Coefficienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} y_1' = 0,$$

und daraus wieder vermöge der obigen Annahme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = 0,$$

woraus sich

$$F(x, y_1) = cy_1 + Q(x) \quad \text{oder} \quad y_2 = cy_1 + Q(x) \tag{7}$$

ergiebt, wenn $c$ eine Constante und $Q(x)$ eine algebraische Function von $x$ bedeutet; da aber in diesem Falle die gegebene Differentialgleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung ein algebraisches Integral haben würde, und umgekehrt, wenn die Differentialgleichung ein solches Integral besitzt, die Verbindung (7) immer wieder ein Integral von (1) liefert, so erhalten wir den nachfolgenden Satz:

*In einer linearen homogenen Differentialgleichung ist dann und nur dann ein Fundamentalintegral $y_2$ eine algebraische Function eines anderen $y_1$ und der unabhängigen Variabeln — vorausgesetzt dass dieses letztere nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung Genüge leistet —, wenn die lineare Differentialgleichung ein algebraisches Integral $\eta$ besitzt, und zwar ist dann die Beziehung von der Form*

$$y_2 = cy_1 + \eta,$$

*wenn $c$ eine Constante bedeutet;*

daraus folgt, *dass für eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung nie eine algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen und der unabhängigen Variabeln bestehen kann.*

Lassen wir nunmehr in die Beziehung (2) auch die Ableitungen eintreten, so wird die Frage schwieriger, aber auch interessanter, und ich will dieselbe hier für Differentialgleichungen $3^{\text{ter}}$ Ordnung erledigen

$$y''' = p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y, \tag{8}$$

für welche nach (2) die algebraische Beziehung stattfinden soll

$$y_2 = F(x, y_1, y_1'), \tag{9}$$

wobei ich bemerke, dass die allgemeinere Annahme einer algebraischen Beziehung zwischen drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen in einer im Journal für Mathematik nächstens erscheinenden Arbeit wenigstens für irreductible Differentialgleichungen ihre Erledigung findet.

Für diesen Fall geht die Gleichung (6) über in:

$$
\begin{aligned}
(10)\quad & \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y_1} y_1' + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1'} y_1'' + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1^2} y_1'^2 \\
& + 6\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1 \partial y_1'} y_1' y_1'' + 3\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} y_1'' + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1'^2} y_1'' \\
& + 3\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1'} (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) + \frac{\partial^3 F}{\partial y_1^3} y_1'^3 \\
& + 3\frac{\partial^3 F}{\partial y_1^2 \partial y_1'} y_1'^2 y_1'' + 3\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} y_1' y_1'' + 3\frac{\partial^3 F}{\partial y_1 \partial y_1'^2} y_1' y_1''^2 \\
& + 3\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'} y_1''^2 + 3\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'} y_1' (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) \\
& + \frac{\partial F}{\partial y_1} (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) + \frac{\partial^3 F}{\partial y_1'^3} y_1''^3 \\
& + 3\frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} y_1'' (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) \\
& + \frac{\partial F}{\partial y_1'} [p_1 (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) + p_2 y_1'' + p_3 y_1'] \\
& + \frac{\partial F}{\partial y_1'} (p_1' y_1'' + p_2' y_1' + p_3' y_1) \\
& = p_1 \Big[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} y_1' + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1'} y_1'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} y_1'^2 \\
& \qquad + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'} y_1' y_1'' + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} y_1''^2 \\
& \qquad + \frac{\partial F}{\partial y_1'} (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) \Big] \\
& + p_2 \Big( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_1'} y_1'' \Big) + p_3 F,
\end{aligned}
$$

und somit, da $y_1$ nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der 3ten genügen sollte, durch Identificirung der Coefficienten von $y_1''^3$, $y_1' y_1''^2$, $y_1'^2 y_1''$, $y_1 y_1''$, $y_1''^2$, $y_1' y_1''$ die nothwendig zu erfüllenden Beziehungen

$$
(11)\quad \frac{\partial^3 F}{\partial y_1'^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y_1 \partial y_1'^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y_1^2 \partial y_1'} = 0, \quad p_3 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} = 0,
$$

$$
(12)\quad 3\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'} + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1'^2} + 2p_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} = 0,
$$

$$
6\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1 \partial y_1'} + 3\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + p_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'} + 3p_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} = 0.
$$

Da wir die Annahme $p_3 = 0$ ausschliessen dürfen, weil dies auf den früher erledigten Fall der Differentialgleichungen zweiter Ordnung führt, so folgt, wie man leicht sieht, aus den Gleichungen (11) und (12)

$$
(13)\quad F(x, y_1, y_1') = f y_1' + g y_1 + h,
$$

worin $f, g, h$ algebraische Functionen von $x$ bedeuten; setzt man nun diese Form in die Gleichung (10) ein, so ergeben sich durch Identificirung der Coefficienten von $y_1''$, $y_1'$, $y_1$ und der freien Glieder die vier Bedingungsgleichungen

$$h''' - p_1 h'' - p_2 h' - p_3 h = 0, \tag{14}$$

$$3f'' + 3g' + p_1 f' + p_1' f = 0, \tag{15}$$

$$f''' + 3g'' + 2p_2 f' + p_2' f - p_1 f'' - 2p_1 g' = 0, \tag{16}$$

$$g''' + 3p_3 f' + p_3' f - p_1 g'' - p_2 g' = 0; \tag{17}$$

da nun die erste dieser Beziehungen aussagt, dass die vorgelegte lineare Differentialgleichung dritter Ordnung ein algebraisches Integral besitzt, so wird, wenn wir diesen Fall hier ausschliessen, weil er nachher im allgemeinen Falle zur Untersuchung kommt (für irreductible Differentialgleichungen kann er überhaupt nicht eintreten), $h = 0$ sein müssen, und somit (13) in

$$y_2 = f y_1' + g y_1 \tag{18}$$

übergehen, worin $f$ und $g$ mit $p_1$, $p_2$, $p_3$ durch die Gleichungen (15), (16), (17) verbunden sind.

*Wir finden somit, dass, wenn für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung ein Fundamentalintegral eine algebraische Function eines anderen, welches nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung genügt, dessen erster Ableitung und der unabhängigen Variabeln sein soll, diese Beziehung eine homogene lineare sein muss von der Form* $y_2 = f y_1' + g y_1$, *worin* $f$ *und* $g$ *mit den Coefficienten* $p_1$, $p_2$, $p_3$ *durch die Gleichungen* (15), (16), (17) *verbunden sind, und umgekehrt sieht man sofort, dass, wenn zwei algebraische Functionen* $f$ *und* $g$ *mit* $p_1$, $p_2$, $p_3$ *durch jene Gleichungen verbunden sind, auch stets eine solche Integralbeziehung stattfindet*,

wie sich unmittelbar durch Einsetzen von (18) in die Differentialgleichung (8) ergiebt.

Um nun die Differentialgleichungen näher zu untersuchen, deren Coefficienten mit zwei algebraischen Functionen $f$ und $g$ durch die Gleichungen (15), (16), (17) verbunden sind, setze man den durch Integration von (15) gewonnenen Werth von

$$p_1 f = c - 3g - 3f \tag{19}$$

in (16) und (17) ein, so erhält man durch Integration dieser Gleichungen die Werthe von $p_2$ und $p_3$ in der Form

$$p_2 f^2 = c_1 + 2cg - 3g^2 + cf' - 3gf' - 3g'f - ff'' - f'^2 \tag{20}$$

und

$$p_3 f^3 = c_2 + cfg' + c_1 g + cg^2 - g^3 - 3fgg' - g'' f^2 - ff'g', \tag{21}$$

und es handelt sich somit um die Untersuchung der Differentialgleichung

$$(22)\quad y''' = \frac{c-3g-3f'}{f}y'' + \frac{c_1+2cg-3g^2+cf'-3gf'-3g'f-ff''-f'^2}{f^2}y' + \frac{c_2+cfg'+c_1g+cg^2-g^3-3fgg'-g''f^2-ff'g'}{f^3}y,$$

in welcher $c$, $c_1$, $c_2$ willkürliche Constante, $f$ und $g$ beliebige algebraische Functionen von $x$ sind.

Einige Transformationen dieser Differentialgleichung, auf die ich hier nicht näher eingehen will, führten zu dem Resultat, dass drei Fundamentalintegrale derselben sich in der Form darstellen

$$(23)\quad \eta_1 = e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_1-g\right)\frac{dx}{f}},\quad \eta_2 = e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_2-g\right)\frac{dx}{f}},\quad \eta_3 = e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_3-g\right)\frac{dx}{f}},$$

worin $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ die 3 Lösungen der cubischen Gleichung

$$(24)\qquad \alpha^3 - \alpha\left(c_1+\frac{c^2}{3}\right) - c_2 = 0$$

sind, wobei, wenn zwei oder drei Lösungen dieser Gleichung einander gleich werden, zu der Exponentialgrösse noch Factoren hinzutreten, die entweder algebraische Functionen oder Integrale solcher Functionen sind. Nun genügt jedes dieser Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{dx} = \left(\frac{c}{3}+\alpha-g\right)\frac{1}{f}\eta,$$

würde also der für $y_1$ gestellten Bedingung, nicht schon das Integral einer algebraischen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung als der dritten zu sein, nicht genügen, was jedoch für das Integral

$$(25)\quad y_1 = \varkappa_1 e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_1-g\right)\frac{dx}{f}} + \varkappa_2 e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_2-g\right)\frac{dx}{f}} + \varkappa_3 e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_3-g\right)\frac{dx}{f}}$$

nicht der Fall ist. Umgekehrt sieht man auch sogleich, dass, wenn man

$$y_1' = \varkappa_1\left(\frac{c}{3}+\alpha_1-g\right)\frac{1}{f}e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_1-g\right)\frac{dx}{f}} + \varkappa_2\left(\frac{c}{3}+\alpha_2-g\right)\frac{1}{f}e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_2-g\right)\frac{dx}{f}} + \varkappa_3\left(\frac{c}{3}+\alpha_3-g\right)\frac{1}{f}e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_3-g\right)\frac{dx}{f}}$$

bildet,

$$fy_1'+gy_1 = \varkappa_1\left(\frac{c}{3}+\alpha_1\right)e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_1-g\right)\frac{dx}{f}} + \varkappa_2\left(\frac{c}{3}+\alpha_2\right)e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_2-g\right)\frac{dx}{f}} + \varkappa_3\left(\frac{c}{3}+\alpha_3\right)e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_3-g\right)\frac{dx}{f}}$$

wird, und dass somit, da die rechte Seite wiederum ein Integral der Differentialgleichung (22) ist, welches wir mit $y_2$ bezeichnen wollen, sich

$$y_2 = fy_1' + gy_1$$

ergiebt. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

*Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung ein Fundamentalintegral eine algebraische Function eines anderen, das nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung als der dritten genügt, dessen erster Ableitung und der unabhängigen Variabeln ist, ist die, dass dieselbe drei Fundamentalintegrale von der Form*

$$e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_1-g\right)\frac{dx}{f}}, \quad e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_2-g\right)\frac{dx}{f}}, \quad e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_3-g\right)\frac{dx}{f}}$$

*besitzt, worin c eine Constante, f und g beliebige algebraische Functionen von x sind, und zwar hat dann jene Beziehung die Form*

$$y_2 = fy_1' + gy_1;$$

*zugleich folgt, dass irreductible Differentialgleichungen dritter Ordnung nie ein Integral als algebraische Function eines anderen, dessen Ableitung und der unabhängigen Variablen darzustellen gestatten.*

Heidelberg, im November 1887.

# Ueber ausgezeichnete Untergruppen in der Gruppe der elliptischen Modulfunctionen.*)

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

## 1.

## Die Integrale erster Gattung.

Die $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$ überall endlichen Integrale der Curve $s^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(\sqrt[s]{\lambda})^s + (\sqrt[s]{1-\lambda})^s = 1$$

haben die allgemeine Form:

$$(1)\quad u_{abc}(\omega) = \int_{i\infty}^{\omega} x_1^a x_2^b x_3^c \frac{(c_1, x_2, dx_3)}{c_1 x_1^{s-1} + c_2 x_2^{s-1} + c_3 x_3^{s-1}}, \quad (a+b+c=s-3),$$

wobei die $x_i$ die Bedeutung haben:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \sqrt[s]{\lambda} : \sqrt[s]{1-\lambda} : e^{\frac{\pi i}{s}}.$$

Aus der bekannten Wirkung der linearen $\omega$-Substitutionen auf $\lambda$ berechnet man für die Wirkung derselben auf die obigen Integrale die beiden fundamentalen Formeln:

$$(2)\quad u_{abc}(\omega+1) = -e^{-\frac{2(b+1)i\pi}{s}} u_{bac}(\omega),$$

$$(3)\quad u_{abc}\left(-\frac{1}{\omega}\right) = -u_{cba}(\omega) + u_{abc}.$$

Hierbei ist $u_{abc}$ eine Constante, nämlich der Werth von $u_{abc}(\omega)$ für $\omega = 0$. Durch Wiederholung und Combination der Erzeugenden folgert man den Satz:

---

*) Verallgemeinerung von Abschnitt I und II meiner Arbeit über die ausgezeichneten Gruppen des Geschlechtes Eins. Math. Ann. Bd. XXX, pag. 345.

*Ist* $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ *eine der Bedingung*

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \pmod 2$$

*genügende Substitution, so geht* $u_{abc}(\omega)$ *von einer multiplicativen* $s^{ten}$ *Einheitswurzel und einer additiven Constanten abgesehen in sich über:*

$$u_{abc}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = e^{\frac{2m\pi i}{s}}\, u_{abc}(\omega) + \text{Const.}$$

Bei beliebigen Substitutionen permutiren sich die Integrale im Allgemeinen zu je sechs, wieder von den eben genannten Dingen abgesehen. Nur wenn zwei der Zahlen $a, b, c$ identisch sind, permutiren sich die $u$ zu drei, und wenn alle drei Zahlen $a, b, c$ gleich sind, hat man eine Function, die sich bei allen Substitutionen linear und ganz transformirt. Dann ist aber $s$ durch 3 theilbar und man ist zur Function $u(\omega)$ meiner cit. Arbeit zurückgeführt. Sei demnach $s$ der einfachen Ausdrucksweise wegen fortan eine Primzahl $> 3$, so gilt die Abzählung:

*Die* $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$ *Functionen* $u_{abc}(\omega)$ *theilen sich in* $\frac{s-1}{2}$ *Tripel und* $\frac{(s-1)(s-5)}{12}$ *Systeme von je sechs Integralen, die sich bei* $\omega$*-Substitutionen jedesmal innerhalb des einzelnen Systems permutiren.*

## 2.

## Bestimmung der Constanten $u_{abc}$.

Aus Formel (3) folgt die Gleichheit von $u_{abc}$ und $u_{cba}$, so dass sich die sechs additiven Constanten eines Systems von sechs Integralen auf drei reduciren. Weiter folgt, indem man in (3) $\omega = 1$ bez. $= -1$ setzt und auf (2) Rücksicht nimmt:

$$u_{abc} + e^{-\frac{2i\pi(b+1)}{s}} \cdot u_{bac} + e^{\frac{2i\pi(c+1)}{s}} \cdot u_{bca} = 0,$$

$$u_{abc} + e^{\frac{2i\pi(a+1)}{s}} \cdot u_{bac} + e^{-\frac{2i\pi(b+1)}{s}} \cdot u_{bca} = 0.$$

Eine der Constanten $u_{abc}$ können wir willkürlich wählen, ohne dadurch die Transformationsformeln der $u$ zu stören. Dadurch sind dann aber alle übrigen bestimmt. Man setze

$$u_{abc} = 1 - e^{-\frac{2i\pi(b+1)}{s}},$$

dann ergeben die soeben geschriebenen Gleichungen das Resultat:

$$u_{ikl} = 1 - e^{-\frac{2i\pi(k+1)}{s}}, \tag{4}$$

so dass die Fundamentalformeln die Gestalt annehmen

$$(5)\qquad \begin{aligned} u_{abc}(\omega+1) &= -e^{-\frac{2(b+1)\pi i}{s}}\cdot u_{bac}(\omega), \\ u_{abc}\left(-\tfrac{1}{\omega}\right) &= -u_{cba}(\omega)+1-e^{-\frac{2i\pi(b+1)}{s}}. \end{aligned}$$

Für eine Substitution, die mod. 2 der Identität congruent ist, folgt hieraus:

$$u_{abc}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \Theta^m u_{abc}(\omega) + \sum a_i \Theta^i.$$

Hierbei ist unter $\Theta$ eine primitive $s^{te}$ Einheitswurzel und unter der rechts geschriebenen Summe *eine ganze complexe Zahl des Kreistheilungskörpers $s^{ten}$ Grades* verstanden.

*Jedem Ideale des genannten Kreistheilungskörpers können wir durch Vermittlung der Function $u_{abc}$ eine Gruppe von $\omega$-Substitutionen entsprechend setzen, deren Polygon nach dem Schema $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2s}\right]$ verzweigt ist.*

## 3.

## Die Integraltripel.

Des näheren verfolgen wir die Einzelheiten nur für die zur Primzahl $s$ gehörigen Integraltripel. Ist somit $b = c$, so setze man abkürzend $u_{abb}$, $u_{bab}$, $u_{bba}$ resp. gleich $u_1, u_2, u_3$ und schreibe

$$e^{\frac{2i\pi(b+1)}{s}} = \Theta.$$

Dann führt eine kurze Zwischenrechnung, wobei übrigens die $u_i$ in neuer Weise durch einen gemeinsamen Factor normirt wurden, auf das Resultat:

$$(6)\qquad \begin{aligned} u_1(\omega+1) &= -\Theta^{-1}u_2(\omega), \\ u_2(\omega+1) &= -\Theta^{2}\ u_1(\omega), \\ u_3(\omega+1) &= -\Theta^{-1}u_3(\omega), \\ u_1\left(-\tfrac{1}{\omega}\right) &= -u_3(\omega)+1+\Theta^2+\Theta^4+\cdots+\Theta^{s-3}, \\ u_2\left(-\tfrac{1}{\omega}\right) &= -u_2(\omega)+1, \\ u_3\left(-\tfrac{1}{\omega}\right) &= -u_1(\omega)+1+\Theta^2+\Theta^4+\cdots+\Theta^{s-3}. \end{aligned}$$

Die Wirkung einer beliebigen Substitution können wir dann wieder durch die Theilnenner ihrer Kettenbruchentwicklung ausdrücken. Man habe unter der Voraussetzung

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv 1:0:0:1 \qquad (\text{mod. } 2)$$

die eindeutige Entwicklung:

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} = 2a_0 - \cfrac{1}{2a_1 - \ddots - \cfrac{1}{2a_{2n}+\omega}},$$

so findet die einfachste Gleichung für $u_2$ statt:

$$(7)\qquad u_2\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \Theta^{a_0+a_1+\cdots+a_{2n}}\cdot u_2(\omega) + \sum_{i=0}^{s-1}\Theta^i\cdot\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left[\frac{a_0+a_1+\cdots+a_{k-1}-i}{s}\right].$$

Hierbei bedeutet das Zeichen $\left[\frac{m}{s}\right]$ die positive Einheit, falls $m$ durch $s$ theilbar ist, sonst stets Null.

Die linear transformirten $u_1(\omega)$ und $u_3(\omega)$ kann man in ähnlicher, nur etwas complicirterer Form durch die Theilnenner ausdrücken.

## 4.

## Die Definition von Untergruppen.

Alle Substitutionen, welche z. B. $u_2$ in die Form:

$$u_2\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = u_2(\omega) + \sum a_i\Theta^i$$

transformiren, bilden eine Untergruppe $G_2$ vom Index $6s$, deren Erzeugende abgesehen von den mit $\omega' = \omega + 2s$ gleichberechtigten Substitutionen die folgenden sind*):

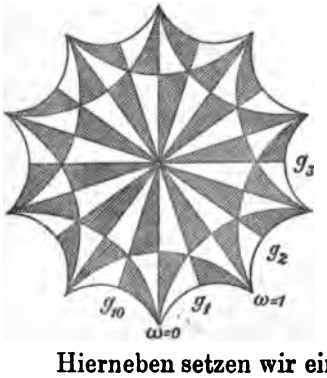
$$(8)\qquad V_0(\omega) = \frac{5\omega+2}{2\omega+1},\quad V_n(\omega) = S^{-2n}V_0S^{2n},\quad n = 1,2,3\ldots(s-1).$$

In nebenstehender Figur ist der Fall $s = 5$ näher erläutert, der ein völlig adäquates Bild des allgemeinen Falles ist. Bezeichnet man auch im allgemeinen Falle die Grenzkreise mit

$$g_1, g_2, \ldots, g_{2s},$$

so entsprechen einander vermöge der $G_2$ die Kanten:

$$g_{2i} - g_{2i+3}.$$




Das Polygon der $G_2$ ist ausnahmslos nach dem Schema $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2s}\right]$ verzweigt, aber nicht regulär.

Hierneben setzen wir eine zweite Untergruppe $\Gamma_2$ von Substitutionen, die der Forderung:

*) Mit einer Substitution wird auch ihre inverse als gegeben angesehen.

$$u_2\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = u_2(\omega)$$

genügen. $\Gamma_2$ ist dann Untergruppe von $G_2$, aber in Bezug auf diese vom Index $\infty$.

*Es muss nun von vornherein betont werden, dass diese $\Gamma_2$ noch keineswegs mit derjenigen Untergruppe vom Index $\infty$ zusammenfällt, die aus den mit $\omega' = \omega + 2s$ gleichberechtigten Substitutionen erzeugt wird.* Diese letzte Gruppe, die ich kurz die Gruppe der zugehörigen Schwarz'schen $s$-Function nenne, ist vielmehr Untergruppe der $\Gamma_2$ und in Bezug auf diese wieder vom Index $\infty$, wie man solches leicht aus der Eigenschaft der $s$-Function ableitet, dass sie sich für $s > 3$ bei Substitution von $\omega$ *linear-gebrochen* reproducirt.*)

Den Spielraum zwischen $G_2$ und $\Gamma_2$ beherrschen wir vollständig vermöge der Function $u_2(\omega)$. In der That berechnet man für die Wirkung der Erzeugenden $V_i(\omega)$ auf $u_2$ die Formel:

$$u_2(V_i(\omega)) = u_2(\omega) + (1-\Theta)\Theta^i, \tag{9}$$

so dass für die Substitutionen der $G_2$, falls man dieselben vermöge der $\Gamma_2$ reducirt denkt, *jede beliebige complexe Zahl $\Sigma a_i\Theta^i$ des vorliegenden Zahlkörpers in*

$$u_2\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = u_2(\omega) + (1-\Theta)\sum_1^{s-1} a_i\Theta^i \tag{10}$$

vorkommt und jede auch nur einmal sich findet.

*Alle Substitutionen*, für welche die in (10) erhaltenen ganzen Zahlen $\Sigma a_i\Theta^i$ die *Individuen eines beliebigen dem Kreistheilungskörper $s^{ten}$ Grades angehörenden Ideals* sind, bilden eine *Untergruppe* der $G_2$, welche die $\Gamma_2$ in sich enthält. Die so gewonnenen Untergruppen *erschöpfen die Gesammtheit ihrer Art.* Dieselben sind im Allgemeinen nicht innerhalb der Gesammtheit der linearen Substitutionen ausgezeichnet, aber doch stets innerhalb derjenigen Congruenzgruppe zweiter Stufe, die man durch die Forderung

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv 1:0:0:1, \quad \equiv 0:1:1:0 \qquad (\text{mod. } 2)$$

festsetzt. Nennen wir die Norm des zur Definition einer einzelnen Untergruppe benutzten Ideals $N$, so ist der Index derselben bezüglich der Gesammtheit $6sN$.

---

*) Die Gruppe $\Gamma_2$ könnte man auch im Anschluss an $G_2$ ohne erneute Benutzung von $u_2(\omega)$ definiren. In der That setze man:

$$V_a V_b V_a^{-1} V_b^{-1} = U_{ab}, \quad V_c U_{ab} V_c^{-1} = U_{abc}, \quad V_d U_{abc} V_d^{-1} = U_{abcd} \cdots,$$

so seien die Operationen $U_{ab}$, $U_{abc}\cdots[a, b, c, d\cdots = 0, 1, 2\cdots(s-1)]$ im Verein mit den mit $\omega' = \omega + 2s$ gleichberechtigten Substitutionen zu Erzeugenden einer Gruppe gesetzt. Diese letztere wird dann $\Gamma_2$ sein.

## 5.

## Ausgezeichnete Untergruppen.

Die im vorigen Paragraphen vermöge eines bestimmten Ideals $J$ gewonnene Untergruppe ist, falls sie nicht innerhalb der Gesammtheit ausgezeichnet ist, *eine von drei gleichberechtigten Untergruppen.* Die beiden andern werden gebildet bez. von den Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\alpha'', & \beta''\\ \gamma'', & \delta''\end{pmatrix}$, die so gewählt sind, dass die ganzen Zahlen $\Sigma b_i\Theta^i$ und $\Sigma c_i\Theta^i$ in:

$$(11)\qquad \begin{aligned} u_1\left(\tfrac{\alpha'\omega+\beta'}{\gamma'\omega+\delta'}\right) &= u_1(\omega) + (\Theta^{s-1}-\Theta^{s-2})\sum_{i=1}^{s-1} b_i\Theta^i,\\ u_3\left(\tfrac{\alpha''\omega+\beta''}{\gamma''\omega+\delta''}\right) &= u_3(\omega) + (\Theta^{s-2}-\Theta^{s-1})\sum_{i=1}^{s-1} c_i\Theta^i \end{aligned}$$

wieder jenem Ideale $J$ angehören. So entsprechen der Gruppe $G_2$ zwei andere $G_1$, $G_3$, bei denen die eben besprochenen Zahlen überhaupt alle Individuen ihres Körpers durchlaufen dürfen. Dabei stimmen die Polygone der $G_1$ und $G_3$ mit dem der $G_2$ bis auf die veränderte Kantendeckung:

$$(12)\qquad g_{2i-3} - g_{2i} \quad \text{resp.} \quad g_i - g_{i+s}$$

überein.

So entsprechen ebenfalls der $\Gamma_2$ zwei andere Gruppen $\Gamma_1$ und $\Gamma_3$ und es ist besonders interessant noch diejenige *ausgezeichnete Untergruppe* $\Gamma$ namhaft zu machen, welche die gemeinsamen Substitutionen von $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ umfasst und somit durch die simultanen Forderungen

$$u_k\left(\tfrac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = u_k(\omega) \qquad (k=1,2,3)$$

definirt ist.*)

---

*) Bezeichne ich $\Gamma$ als zur ganzen Zahl $s$ gehörig genauer durch $\Gamma^{(s)}$ und lasse nun $s$ alle Primzahlen durchlaufen, für welche ja $\Gamma$ zunächst nur definirt ist, so erhalte ich eine unendliche Reihe von Untergruppen $\Gamma^{(5)}$, $\Gamma^{(7)}$, $\Gamma^{(11)}$.... Hier lege ich nun wieder besonderes Gewicht auf den Inbegriff aller Substitutionen, welche sich in jeder einzelnen der eben gekennzeichneten Gruppen $\Gamma^{(s)}$ finden. Diese Substitutionen bilden eine ausgezeichnete Gruppe $g$ vom Index $\infty$, deren Polygon nach dem Schema $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\infty}\right]$ verzweigt ist. Diese Gruppe $g$ ist einer von dem Bisherigen unabhängigen Definition fähig im Anschluss an die Gruppe, welche jede Wurzel aus $\lambda$ und $1-\lambda$ ungeändert lässt. (Annalen XXVIII, p. 110f). Die Erzeugenden von $g$ lassen sich in ähnlicher Weise aus dieser letzteren Gruppe ableiten, wie solches zwischen $G_2$ und $\Gamma_2$ in der Anmerkung pag. 231 geschah.

*Der Inbegriff derjenigen Substitutionen, welche auf* $u_1$, $u_2$, $u_3$ *simultan angewandt drei Zahlen* $\Sigma a_i\Theta^i$, $\Sigma b_i\Theta^i$, $\Sigma c_i\Theta^i$ *erzeugen, die zugleich einem vorliegenden Ideale angehören, bildet dann eine ausgezeichnete Untergruppe von endlichem Index.* Das Polygon dieser Gruppe ist nach dem Schema $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2s}\right]$ verzweigt und zugleich enthält dieselbe die vorbenannte Gruppe $\Gamma$ in sich. Es ist auch ersichtlich, dass man in solcher Weise *zur Gesammtheit der Untergruppen* dieser Art gelangt.

Es verdient bemerkt zu werden, dass man jede der gewonnenen ausgezeichneten Untergruppen auch durch ein einzelnes Integral z. B. $u_2(\omega)$ zu definiren vermag, falls nur die gedachte Untergruppe alle Substitutionen von $\Gamma_2$ in sich enthält. So z. B. ist die einfachste hier überhaupt in Betracht kommende Gruppe $G$, nämlich die von $\sqrt[s]{\lambda}$, $\sqrt[s]{1-\lambda}$, definirt entweder durch die Forderung:

$$a_1\Theta + a_2\Theta^2 + \cdots + a_{s-1}\Theta^{s-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 1-\Theta)$$

oder dadurch, dass man verlangt, es sei zugleich:

$$u_1\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = u_1(\omega) + (\Theta^{s-1}-\Theta^{s-2})\sum b_i\Theta^i,$$

$$u_2\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = u_2(\omega) + (1-\Theta)\sum a_i\Theta^i,$$

$$u_3\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = u_3(\omega) + (\Theta^{s-2}-\Theta^{s-1})\sum c_i\Theta^i,$$

ohne dabei den rechts auftretenden Zahlen Einschränkungen aufzuerlegen.

## 6.

## Schlussbemerkung.

Alle im vorigen Paragraphen gewonnenen ausgezeichneten Untergruppen liegen zwischen $G$ und $\Gamma$ in dem Sinne, dass sie alle in $G$ enthalten sind, während sie $\Gamma$ in sich enthalten, und wir haben zugleich die Gesammtheit dieser Gruppen charakterisirt. Indem wir uns des Ausdrucks bedienen, dass sie eine *Mannigfaltigkeit von einer Dimension bilden*, haben wir zugleich das Resultat:

*Die Gesammtheit der ausgezeichneten Untergruppen, deren Polygone dem Verzweigungsschema* $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2s}\right]$ *angehören, bilden im obigen Sinne eine Mannigfaltigkeit von mehr als einer Dimension.*

---

Man könnte dann insbesondere diese Definition von $g$ zu Grunde legen, um von da aus durch Zusatz der mit $\omega' = \omega + 2s$ gleichberechtigten Substitutionen zur einzelnen $\Gamma^{(s)}$ fortzugehen.

Was wir oben kennen lernten, stellt uns nur die Projection der Gesammtmannigfaltigkeit auf eine ihrer Dimensionen dar, wobei sich z. B. die ausgezeichneten Congruenzgruppen der Stufe $2s$ sogar in die Congruenzgruppe $2^{ter}$ Stufe vom Index 6 projiciren.

Die weitere Aufgabe würde die sein, dass man zwischen $\Gamma$ und der Gruppe der $s$-Function $\Gamma_\nu$ die Reihe von Gruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_{\nu-1}, \Gamma_\nu$ zu bestimmen sucht, welche folgende drei Eigenschaften besitzen: $\Gamma_i$ ist Untergruppe von $\Gamma_{i-1}$, $\Gamma_i$ ist in Bezug auf $\Gamma_{i-1}$ vom Index $\infty$, und es lässt sich zwischen $\Gamma_{i-1}$ und $\Gamma_i$ keine Gruppe $\Gamma_k$ einschieben, welche die beiden ersten Eigenschaften der Reihe nicht stören würde.

Camenz in Schlesien, im October 1887.

# Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés.

Par

H. G. Zeuthen à Copenhague.

La détermination d'une courbe algébrique par des points donnés se fait par des moyens assez simples pour la faire succéder, dans l'instruction, immédiatement aux éléments de la géométrie analytique. Néanmoins la limitation exacte des théorèmes et leur démonstration complète présentent des difficultés tout particulières. D'un point de vue scientifique ces difficultés ont été surmontées depuis plus de quinze ans par M. Nöther,*) qui a même eu égard à la détermination par des points d'intersection confondus de deux courbes. Pour ce dernier cas M. Halphen**) a donné une nouvelle démonstration d'un théorème fondamental dont les autres sont faciles à déduire, en le supposant connu dans le cas où les points sont distincts entre eux. Plus tard M. Voss***) a donné une démonstration complète du même théorème, et le cahier des Mathematische Annalen qui vient de paraître en contient encore des démonstrations dues aux MM. Stickelberger†) et Nöther.††) La première démonstration de M. Nöther a encore été rendue plus accessible par son élève M. Bacharach,†††) qui a montré, en même temps, les limitations des théorèmes connus sur la détermination par des points auxquelles conduit le théorème en question.

Néanmoins je ne le trouve pas mal a propos de m'occuper ici de la même matière en traduisant et étendant un peu un article que je

*) Math. Annalen t. VI, p. 352. — Voir aussi le mémoire de Brill et Nöther dans les Math. Annalen t. VII, p. 269. Des démonstrations rigoureuses de théorèmes plus isolés ont été données par M. Valentiner dans le Tidsskrift for Mathematik 1881.

**) Bulletin de la Société Mathématique t. V. p. 160.

***) Math. Annalen t. XXVII, p. 528.

†) Math. Annalen t. XXX, p. 401.

††) Math. Annalen t. XXX, p. 410.

†††) Ueber Schnittpunktsysteme algebraischer Curven (thèse inaugurale), Erlangen 1881, et Math. Annalen t. XXVI, p. 275.

vient de publier en danois dans le *Tidsskrift for Mathematik.**) Je m'y occupe, non seulement du théorème fondamental dont je viens de parler, mais en général de la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés. En prenant le même point de départ simple que les cours ordinaires sur la théorie des courbes algébriques, j'espère de contribuer, à côté de M. Bacharach, à y faire pénétrer des formulations et des démonstrations complètes de théorèmes d'une grande importance aussi pour la théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Croyant en même temps qu'il a assez d'intérêt scientifique de voir comment les théorèmes en question dépendent logiquement du nombre des constantes de l'équation d'une courbe, du nombre des intersections de deux courbes et de la forme linéaire de l'équation qui exprime qu'une courbe passe par un point donné, je n'hésite pas a envoyer mon article au même journal qui contient la plupart des démonstrations déjà citées.

Un des derniers cahiers de ce journal**) contient encore un article de M. Cayley sur la même matière. Le célèbre auteur d'un théorème très important de cette théorie ne reconnaît pas l'insuffisance du dénombrement ordinaire des constantes pour la démontrer; il doit par conséquent regarder comme superflus les efforts de l'assurer ultérieurement. Bien qu'un dénombrement de constantes fasse la base aussi de mes démonstrations, j'ai besoin de justifier, devant lui, la peine que leur composition m'a causée; car ce qui m'a causé la plus grande difficulté c'est la démonstration des vérités que M. Cayley regarde comme évidentes. Cette justification est le seul but des objections suivantes contre le travail d'un éminent savant dont j'admire le génie mathématique grâce auquel, dans ses vastes recherches étendues sur toutes les mathématiques, il sait partout trouver des résultats justes et importants, même où il n'applique pas aux démonstrations les mêmes précautions dont je n'ose pas me dispenser.

De son article je citerai avant tout le dénombrement, à la page 87, des constantes indéterminées que contient l'équation

$$L_{r-m} P_m + M_{r-n} Q_n = 0,$$

où $P_m$, $Q_n$, $L_{r-m}$, $M_{r-n}$ sont des polynôms en $x$ et $y$ des degrés indiqués par les suffixes, $P_m$ et $Q_n$ connus, $L_{r-m}$ et $M_{r-n}$ inconnus. M. Cayley regarde comme évident que, dans le cas où $r \leqq m+n-3$, le nombre des constantes est égal à la somme des nombres de coefficients de $L_{r-m}$ et $M_{r-n}$ moins un (à cause du facteur arbitraire que peut contenir l'équation); mais je ne vois pas comment on peut voir *sans démonstration* que la composition des polynômes ne conduit à

*) Année 1887, p. 65.

**) Math. Annalen t. XXX, p. 85.

aucune réduction du nombre des constantes. Une telle réduction aurait lieu si $r > m + n - 1$.

A la même page M. Cayley cite le théorème suivant: si l'ensemble, $A + B$, de deux groupes de points, et un seul de ces groupes, $A$, sont formés de tous les points d'intersection de deux courbes, aussi le second groupe, $B$, contiendra tous les points d'intersection de deux courbes. En appellant cette vérité théorème, M. Cayley semble indiquer qu'elle a besoin d'une démonstration. Est-ce donc qu'il pense à celle de M. Nöther? mais alors il reconnaîtrait pour un théorème qui peut être une clef de tous les autres, l'insuffisance du dénombrement ordinaire.

M. Cayley donne encore à la démonstration du théorème qui porte son nom une portée plus petite que ne fait M. Bacharach, et que je ne le ferai dans ce qui suit. Il s'agit de démontrer (voir à la page 85) qu'une certaine courbe passant par $mn - \delta$ points d'un certain groupe de $mn$ points passera d'elle-même par les autres, $\delta$, points. M. Cayley démontre que cela aura lieu si les $mn - \delta$ points donnent des déterminations indépendantes entre elles; il indique un cas d'exception où cette indépendance n'a pas lieu et démontre qu'alors la courbe ne passera pas nécessairement par les $\delta$ points; mais il ne démontre pas que cette exception est la seule qui soit possible. Si je ne me trompe pas, sa démonstration n'établit pas même que les déterminations fournies par les $mn - \delta$ points *peuvent* être indépendantes entre elles. Que cela n'est pas évident *a priori* me semble résulter du fait que $mn - \delta + 1$ points du groupe ne donnent pas $mn - \delta + 1$ déterminations indépendentes entre elles.

---

1. Une courbe d'ordre $n$ sera déterminée par $\frac{n(n+3)}{2}$ de ses points, si ces points sont indépendants entre eux, c'est à dire, si aucun des points donnés ne se trouve sur toute courbe d'ordre $n$ qui passe par les autres.

En effet, l'équation de la courbe contient $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients dont il suffit de connaître les $\frac{n(n+3)}{2}$ rapports, et chaque point donné conduit à une équation du premier degré entre ces rapports.

Pour donner aux applications de cette proposition une sûreté complète il faut avoir des moyens de trouver le nombre de points indépendants entre eux que contient un groupe donné de points.

2. Commençons par chercher le nombre de déterminations indépendantes entre elles d'une courbe $\varphi_n$ d'ordre $n$ que contient la demande qu'elle doit passer par les $nm$ points d'intersection d'une courbe donnée $\chi_n$ d'ordre $n$ avec une courbe donnée, $\psi_m$, d'ordre $m$.

Nous commencerons par supposer que $\psi_m$ soit irréductible, ou bien qu'elle ne soit pas composée de courbes d'ordre inférieur. En parlant de points *d'intersection* de deux courbes, nous supposerons toujours que les courbes ne coïncident, ni en entier ni en partie.

A) Si $n < m$, la courbe $\varphi_n$ sera complêtement déterminée par les $mn$ points d'intersection, qui compteront par consequent pour $\frac{n(n+3)}{2}$ points donnés et indépendants entre eux. En effet, si $\varphi_n$ restait encore indéterminée, on pourrait la faire passer encore par un nouveau point de $\psi_m$. Alors elle passerait par $nm+1$ points de cette courbe, ce qui est impossible; car la courbe irréductible $\psi_m$ ne peut faire partie de $\varphi_n$ parce que $n < m$. Il faut donc que deux courbes $\chi_n$ et $\varphi_n$ d'ordre $n(<m)$, qui ont les mêmes points d'intersection avec $\psi_m$, coïncident entre elles.

B) Si $n > m$ nous désignerons par $nm - x$ le nombre de déterminations indépendantes entre elles de $\varphi_n$ que fournissent les $nm$ points d'intersection de $\chi_n$ et $\psi_m$, ou bien nous supposerons qu'une courbe $\varphi_n$ d'ordre $n$ qui passe par $nm - x$ de ces points, choisis convenablement, passe d'elle-même par les $x$ autres.

Nous déterminerons $x$ en cherchant le nombre de points dont il est besoin encore pour déterminer complètement $\varphi_n$. Si un de ces derniers points se trouve sur la courbe $\psi_m$, celle-ci passera par $mn+1$ points de $\varphi_n$; étant irréductible elle fera partie de $\varphi_n$, qui sera composée d'elle et d'une courbe encore inconnue d'ordre $n-m$. La détermination de cette courbe résidue, et par conséquent la détermination complète de $\varphi_n$, demandera donc encore $\frac{(n-m)(n-m+3)}{2}$ points donnés. En égalant à $\frac{n(n+3)}{2}$ le nombre des points qui ont donné successivement les déterminations indépendantes entre elles et complètes de $\varphi_n$, on trouve

$$\frac{n(n+3)}{2} = mn - x + 1 + \frac{(n-m)(n-m+3)}{2},$$

d'où

$$x = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Donc: *les $nm$ points d'intersection d'une courbe donnée $\chi_n$ d'ordre $n$ avec une courbe donnée et irréductible $\psi_m$ d'ordre $m$ fournissent, pour $n < m$, $\frac{n(n+3)}{2}$, et pour $n \geqq m$, $nm - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ déterminations indépendantes entre elles d'une courbe $\varphi_n$ d'ordre $n$ qui doit passer par eux.* Bien entendu, il ne suffit pas toujours, pour avoir ce nombre de déterminations, de faire passer la courbe $\varphi_n$ par le même nombre de points d'intersection choisis arbitrairement, mais il est toujours possible d'en faire un choix conforme au théorème énoncé.

Comme on a pour $n = m - 1$ et pour $n = m - 2$

$$nm - \frac{n(n+3)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

toutes les deux règles sont applicables à ces deux cas.

*Corollaire. Une courbe irréductible d'ordre m a au plus* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ *points doubles.* En effet, on peut toujours faire passer par les points doubles, dont nous désignerons le nombre par $d$, une courbe $\varphi_n$ d'un ordre $n$ assez élevé. Nous supposerons encore que $n > m - 3$. Au nombre des points d'intersection de $\varphi_n$ avec la courbe donnée appartiendront de nouveaux points coïncidant avec les points doubles. Etant déterminés par les points d'intersection donnés leur nombre est au plus égal à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

3. Nous allons ensuite nous demander si le théorème énoncé dans le n° 2 pour le cas où la courbe $\psi_m$ est irréductible est soumis à des exceptions dans le cas où $\psi_m$ est composée de courbes d'ordre inférieur.

A cet effet il faut se rappeler que, dans la démonstration précédente, l'irréductibilité de $\psi_m$ sert à établir que la courbe entière $\psi_m$ fera partie de $\varphi_n$ si l'on soumet cette courbe aux conditions de passer par les $mn$ points donnés et par un nouveau point, $P$, de $\psi_m$. Supposons maintenant que $\psi_m = \psi_{m_1} \cdot \psi_{m_2}$ soit composée, et que $\psi_{m_1}$ en soit une partie irréductible. Si le point $P$ se trouve sur $\psi_{m_1}$, la condition que la courbe $\varphi_n$ passe par lui, aura pour conséquence immédiate que $\psi_{m_1}$, qu'elle rencontre en $m_1 n + 1$ points, en fera partie. L'autre partie de $\varphi_n$ sera une courbe d'ordre $n - m_1$, qui rencontre $\psi_{m_2}$ à tous ceux des $n \,.\, m_2$ points d'intersection donnés avec $\chi_n$ où ne passe pas déjà la première partie $\psi_{m_1}$. Leur nombre sera plus grand que $(n - m_1) m_2$ à l'exception du cas où tous les $m_1 m_2$ points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ appartiennent au groupe donné de $n \,.\, m$ points.

On voit donc qu'à l'exception du cas où la courbe donnée $\chi_n$ qui détermine ce groupe passe par tous les points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$, $\varphi_n$ passera par plus de $nm_2$ points de $\psi_{m_2}$. Si $\psi_{m_1}$ est irréductible elle fera donc partie de $\varphi_n$, elle aussi; si elle est composée, il faudra continuer la recherche de la même manière.

On trouve ainsi que *les résultats trouvés dans le n° 2 seront encore applicables à une courbe composée* $\psi_m$ *s'il n'en existe aucune décomposition en deux parties dont tous les points d'intersection appartiennent au groupe donné de mn points.*

4. Nous allons ensuite nous occuper du cas d'exception signalé dans le n° précédent, en démontrant que le *nombre de conditions indépendantes entre elles auxquelles on soumet une courbe* $\varphi_n$ *d'ordre n en la faisant passer par tous les points d'intersection des courbes données*

$\chi_n$ *et* $\varepsilon_n$ *se diminuera d'une unité, si* $\psi_m$ *est composée de deux courbes* $\varepsilon_{m_1}$ *et* $\psi_{m_2}$, *et* $\chi_n$ *passe par tous leurs* $m_1 m_2$ *points d'intersection.* Il faut donc, quant à la détermination de $\varphi_n$, compter ici les $nm$ points d'intersection de $\chi_n$ et $\psi_m$ pour $nm - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1$ points, donnés, *au plus*, si $n > m-3$, et pour $\frac{n(n+3)}{2} - 1$, *au plus*, si $n < m$. Nous nous contenterons, pour le moment, de prouver l'exactitude de ces valeurs limites; il se montrera ensuite, dans le n° suivant, qu'elles seront les valeurs effectives du nombre des déterminations dans tous les cas où aucune décomposition ultérieure n'amène une répétition de la même réduction.

La proposition énoncée n'a aucun sens dans les cas où $n < m_1$ ou $n < m_2$; parce que alors $\chi_n$ coïnciderait, en entier ou en partie, avec une partie de $\psi_{m_2}$ ou de $\psi_{m_1}$. Il faut donc supposer que $n \geqq m_1$, $n > m_2$. Nous commencerons aussi par supposer (dans les n$^{os}$ 4—8) que les $m_1 m_2$ points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ soient distincts entre eux.

Commençons par attribuer à $n$ une valeur assez grande pour rendre indépendantes entre elles les conditions que $\varphi_n$ passe par les $m_1 m_2$ points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$. Cela aura lieu, du moins, si $n > m_1 m_2 - 1$, car une courbe composée de droites passant par $m_1 m_2 - 1$ des points d'intersection n'a pas besoin de passer par le dernier. En même temps nous supposerons que $n > m - 3$.

Pour une telle valeur de $n$ les $m_1 m_2$ points peuvent appartenir aux points d'intersection indépendants entre eux de $\varphi_n$, soit avec $\psi_{m_1}$, soit avec $\psi_{m_2}$. Il n'en restera donc que

$$nm_1 - \frac{(m_1-1)(m_1-2)}{2} - m_1 m_2$$

avec $\psi_{m_1}$, et

$$nm_2 - \frac{(m_2-1)(m_2-2)}{2} - m_1 m_2$$

avec $\psi_{m_2}$. Si aussi ces deux groupes de points sont indépendants l'un de l'autre, quant à la détermination de $\varphi_n$, le nombre total de ses intersections indépendantes entre elles avec la courbe composée $\psi_m$ sera égal à la somme de $m_1 m_2$ et des deux derniers nombres, ou bien à

$$nm - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1;$$

mais n'ayant pas démontré la dernière indépendance supposée, nous avons établi seulement que le nombre trouvé est une valeur *maxima* du nombre des intersections indépendantes.

Si, au contraire, l'ordre $n_1$ de la courbe donnée $\chi_{n_1}$ et de la courbe cherchée $\varphi_{n_1}$ est trop petit pour qu'il soit permis de supposer *a priori*

l'indépendence entre eux des $m_1 m_2$ points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$, quant à la détermination de $\varphi_n$, on peut substituer à $n_1$ une valeur assez grande $n = n_1 + n_2$, et à $\chi_{n_1}$ une courbe $\chi_n$ composée de $\chi_{n_1}$ et de $n_2$ droites rencontrant les deux courbes $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ en des points distincts entre eux.

Alors nous venons de voir que les points d'intersection de $\chi_n$ avec la courbe composée $\psi_m$, donnent, au plus, $nm - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1$ déterminations d'une courbe inconnue $\varphi_n$ d'ordre $n$; on peut donc encore la faire passer par $\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} + 1$ points du plan, au moins. Si nous en plaçons $n - m + 1$ sur une des droites qui font partie de $\chi_n$, la courbe $\varphi_n$ sera composée de cette droite et d'une courbe $\varphi_{n-1}$ qu'on peut encore faire passer par $\frac{(n-m)(n-m+1)}{2} + 1$ points du plan. On peut en placer $n - m$ sur une autre des droites qui font partie de $\chi_n$, et on obtient alors une réduction semblable. En continuant on finira, si $n_1 \geqq m$, par trouver qu'il est possible de faire passer une courbe $\varphi_{n_1}$ par tous les points d'intersection de $\chi_n$ avec la courbe composée $\psi_m$ et encore par $\frac{(n_1-m+1)(n_1-m+2)}{2} + 1$ points arbitraires, au moins. Les points d'intersection de $\chi_n$ et $\psi_m$ équivalent donc, au plus, à $n_1 m - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1$ déterminations.

Si $n_1 < m$, on peut continuer la réduction que nous venons de décrire jusqu'à ce que nous parvenons à une courbe $\varphi_m$, passant par les $m^2$ points d'intersection de $\chi_{n_1}$ et des $m - n_1$ droites qui restent encore avec $\psi_m$: on peut la faire passer encore par 2 points arbitraires du plan (au moins). Si nous plaçons un de ces points sur une des $m - n_1$ droites, celle-ci fera partie de $\varphi_m$. La courbe résidue, n'étant que de l'ordre $m - 1$ et devant passer par les $m$ points d'intersection de chacune des droites qui restent encore, doit contenir toutes ces droites. Il ne restera encore qu'une courbe $\varphi_{n_1}$ d'ordre $n_1$ qui passe par tous les points d'intersection de $\chi_{n_1}$ avec $\psi_m$. Comme on peut la faire passer par un point arbitraire (au moins), les points d'intersection de $\varphi_{n_1}$ et $\psi_m$ n'en donnent que $\frac{n_1(n_1+3)}{2} - 1$ déterminations (au plus).

*Corollaire* aux n$^{os}$ 3 et 4. A côté des applications que nous allons faire dans les n$^{os}$ suivants des théorèmes que nous venons de prouver, on peut s'en servir pour voir, si une courbe $\psi_m$ d'ordre $m$ à moins de $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ points doubles est irréductible ou composée. $\psi_m$ sera irréductible, si ses points doubles et ses autres points d'intersection avec une courbe $\chi_n$ passant par les points doubles, donnent pour $n > m - 3$, $nm - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$, et pour $n < m$, $\frac{n(n+3)}{2}$ déter-

minations d'une courbe d'ordre $n$ passant par eux, et elle sera composée si l'on n'obtient de cette façon qu'un nombre plus petit de déterminations. — Par exemple, une courbe irréductible du sixième ordre ne peut avoir tous les points d'intersection de deux courbes du troisième ordre pour points doubles.

5. On peut déduire du n° 4 que, *si* $n > m_1$, $n \geqq m_2$, *une courbe* $\varphi_n$ *d'ordre* $n$ *qui passe par les* $m_1 m_2$ *points d'intersection de* $\psi_{m_1}$ *et* $\psi_{m_2}$ *rencontrera une de ces courbes,* $\psi_{m_2}$, *aux mêmes* $(n - m_1)m_2$ *points qu'une courbe* $\varrho_{n-m_1}$ *d'ordre* $n - m_1$.

Nous commencerons par supposer que les deux courbes $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ soient irréductibles.

Selon le n° 4 on peut toujours assujétir une courbe d'ordre $n$ qui passe par tous les points d'intersection de $\varphi_n$ avec la courbe composée $\psi_{m_1} \cdot \psi_{m_2}$ à une nouvelle condition. Si on la fait passer par un nouveau, point de $\psi_{m_1}$, elle contiendra toute cette courbe. La courbe résidue $\varrho_{n-m_1}$ ne pourra contenir $\psi_{m_2}$ dans le cas où $n < m_1 + m_2$, et dans le cas où $n \geqq m_1 + m_2$ on peut éviter qu'elle ne contienne $\psi_{m_2}$. En effet, $\varphi_n$ a dans ce cas selon le n° 4, au plus,

$$n(m_1 + m_2) - \frac{(m_1 + m_2 - 1)(m_1 + m_2 - 2)}{2} - 1$$

points d'intersection indépendants entre eux avec la courbe composée.

$$m_1 n - \frac{(m_1 - 1)(m_1 - 2)}{2}$$

de ces points sont nécessaires pour déterminer tous les points d'intersection avec $\psi_{m_1}$. Il reste donc (au plus)

$$m_2(n - m_1) - \frac{(m_2 - 1)(m_2 - 2)}{2}$$

points pour déterminer les points d'intersection avec $\psi_{m_2}$, qui ne se trouvent pas sur $\psi_{m_1}$. Selon le n° 2 il est possible de faire passer par ces points une courbe $\varrho_{n-m_1}$ d'ordre $n - m_1$ qui ne contient pas $\psi_{m_2}$. La courbe composée de $\psi_{m_1}$ et $\varrho_{n-m_1}$ sera une courbe d'ordre $n$ qui passe par tous les points d'intersection indépendants entre eux de $\varphi_n$ et $\psi_m$: Elle passera donc par tous les points d'intersection de ces deux courbes.

La courbe $\varrho_{n-m_1}$ est indépendante des points d'intersection de $\varphi_n$ avec $\psi_{m_1}$, car si l'on commence par donner ceux-ci et y ajoute un nouveau point de $\psi_{m_1}$, on obtiendra une courbe composée de $\psi_{m_1}$ et d'une courbe entièrement indéterminée d'ordre $n - m_1$. On voit de cette façon que les valeurs *maximae* du nombre des points d'intersection indépendants entre eux de $\varphi_n$ et de la courbe composée $\psi_{m_1} \cdot \psi_{m_2}$ sont les valeurs effectives de ce nombre. Cela résulte pour $n > m_1 + m_2 - 3$ de la décomposition précédente du nombre total des points d'intersection

indépendants entre eux avec la courbe composée. Pour $n < m_1 + m_2$ on le voit par la décomposition suivante

$$\frac{n(n+3)}{2} - 1 = nm_1 - \frac{(m_1-1)(m_1-2)}{2} + \frac{(n-m_1)(n-m_1+3)}{2}.$$

Notre démonstration du théorème général est pour $n \gtrless m_1 + m_2$ encore applicable au cas, où la courbe $\psi_{m_2}$ est composée; mais le nombre d'intersections indépendantes se diminuera si $\varphi_n$ doit passer par tous les points d'intersection de ses parties. Pour $n < m_1 + m_2$ il faut se demander, dans le cas où $\psi_{m_2}$ est composée de deux courbes $\psi_{m_2'}$ et $\psi_{m_2''}$, si $\varrho_{n-m_1}$ n'en contiendra pas l'une, par exemple $\psi_{m_2'}$. Comme $\varrho_{n-m_1}$ doit passer par tous les $(n-m_1)m_2''$ points d'intersection de $\varphi_n$ avec $\psi_{m_2''}$, cela ne sera possible que dans le cas où $\varphi_n$ passe par tous les $m_2' m_2''$ points d'intersection de $\psi_{m_2'}$ et $\psi_{m_2''}$. Alors la courbe $\varrho_{n-m_1}$ ne sera pas déterminée par ses points d'intersection avec $\psi_{m_2}$, et l'on peut par conséquent éviter que $\varphi_n$ ne contienne aucune des deux parties.

Si $\psi_{m_1}$ est composée de deux courbes $\psi_{m_1'}$ et $\psi_{m_1''}$, cette circonstance n'aura aucune influence sur notre démonstration que dans le cas où $\varphi_n$ passe par tous leurs $m_1' \cdot m_1''$ points d'intersection. Alors on peut faire passer par les points d'intersection de $\varphi_n$ avec $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ une courbe d'ordre $n$ composée de $\psi_{m_1'}$, qu'on peut supposer irréductible, et d'une courbe d'ordre $n - m_1'$. En substituant cette dernière courbe à $\varphi_n$ — et en continuant de la même manière si $\psi_{m_1''}$ n'est pas irréductible — on trouve que les points d'intersection avec $\psi_{m_2}$ se trouvent sur une courbe d'ordre $n - m_1' - m_1''$ c'est à dire d'ordre $n - m_1$.

6. On peut déduire des résultats trouvés dans les nos 4 et 5 *le nombre de déterminations indépendantes entre elles d'une courbe d'ordre n qu'on obtient en la faisant passer par les $m_1 m_2$ points d'intersection de deux courbes $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ des ordres $m_1$ et $m_2$.* Nous supposons toujours que ces points d'intersection soient distincts entre eux, et que $n \geqq m_1$, $n \geqq m_2$.

Si $n > m_1 + m_2 - 3$, il ne sera pas possible de choisir arbitrairement plus de $m_2(n-m_1) - \frac{(m_2-1)(m_2-2)}{2}$ de ses autres points d'intersection avec la courbe $\psi_{m_2}$; car ces $m_2(n-m_1)$ points doivent se trouver sur une courbe d'ordre $n - m_1$ et $n - m_1 > m_2 - 3$. Il en résulte que les conditions de passer par les $m_1 m_2$ points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ sont indépendantes entre elles (voir les nos 2 et 3).

Si $n < m_1 + m_2$, le nombre des points d'intersection indépendants avec $\psi_{m_2}$ qui n'appartiennent pas au groupe qui nous occupe sera égal à

$$\frac{(n-m_1)(n-m_1+3)}{2}.$$

Les conditions de passer par les $m_1 m_2$ points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ comptent donc pour

$$n m_2 - \frac{(n-m_1)(n-m_1+3)}{2} - \frac{(m_2-1)(m_2-2)}{2},$$

ou bien pour

$$m_1 m_2 - \frac{(m_1+m_2-n-1)(m_1+m_2-n-2)}{2}$$

déterminations indépendantes entre elles. (Théorème de Cayley).

7. La démonstration du n° 5 conduit à *une représentation analytique d'une courbe d'ordre $n$, $\varphi_n$, qui passe par les $m_1 m_2$ points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$*. En effet, nous avons vu qu'il passe une courbe d'ordre $n$ composée de $\psi_{m_1}$ et d'une courbe $\varrho_{n-m_1}$ d'ordre $n - m_1$ par les points d'intersection de $\varphi_n$ avec $\psi_{m_2}$. Le faisceau déterminé par $\varphi_n$ et par la courbe composée $\psi_{m_1} \cdot \varrho_{n-m_1}$ contiendra une courbe passant par un nouveau point de $\psi_{m_2}$. Cette courbe sera composée de $\psi_{m_2}$ et d'une courbe $\pi_{n-m_2}$ d'ordre $n - m_2$. Il en résulte que l'équation de $\varphi_n$ aura la forme suivante

$$\psi_{m_1} \cdot \varrho_{n-m_1} + \psi_{m_2} \cdot \pi_{n-m_2} = 0,$$

ou qu'on aura identiquement

$$\varphi_n = \psi_{m_1} \varrho_{n-m_1} + \psi_{m_2} \pi_{n-m_2}.$$

8. Les théorèmes précédents nous permettent de *trouver le nombre de déterminations indépendantes entre elles qu'on obtient d'une courbe $\varphi_n$ d'ordre $n$ en la faisant passer par un groupe donné de points.*

Nous commencerons par supposer que ces points ne déterminent complètement ni la courbe entière ni une partie d'elle, ou bien qu'on puisse faire passer par le groupe des courbes d'ordre $n$, ou même d'ordres inférieurs à $n$, qui ne coïncident entre elles ni entièrement ni en partie. *Le groupe fera* alors *partie du groupe des $m_1 m_2$ points d'intersection de deux courbes $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ dont les ordres $m_1$ et $m_2$ satisfont aux conditions $m_1 \lesseqgtr n$, $m_2 \lesseqgtr n$.* Nous supposerons encore que les $m_1 m_2$ points de ce groupe soient distincts entre eux.

I. Si $n > m_1 + m_2 - 3$ tous les $m_1 m_2$ points d'intersection donneront des déterminations indépendantes entre elles de la courbe $\varphi_n$, ce que nous avons vu dans le n° 6. L'indépendance des déterminations fournies par une partie de ces points en est une conséquence immédiate.

II. Si $n = m_1 + m_2 - 3$, les $m_1 m_2$ points d'intersection ne donneront que $m_1 m_2 - 1$ déterminations de $\varphi_n$, ce qui résulte du théorème de Cayley. Il nous reste de démontrer que ces déterminations peuvent être obtenues par un choix quelconque de $m_1 m_2 - 1$ des points, ou bien qu'un *groupe quelconque qui ne contient pas tous les points d'intersection fournit des déterminations indépendantes entre elles.*

A cet effet nous ferons passer par les $m_1 m_2$ points d'intersection une courbe d'ordre $m_1 + m_2 - 2$ composée d'une droite $\lambda$ passant par un point d'intersection quelconque, $Q$, et d'une courbe $\varphi_n$ par les autres $m_1 m_2 - 1$. Nous désignerons par $(P)$ le groupe formé de ces derniers points. Les $m_2(m_2-2)$ points, où la courbe composée de $\varphi_n$ et de $\lambda$ rencontre encore $\psi_{m_2}$ se trouveront; selon le n° 5, sur une courbe $\varrho_{m_2-2}$ d'ordre $m_2 - 2$. Comme $m_2 - 1$ de ces points se trouvent sur la droite $\lambda$, $\varrho_{m_2-2}$ sera composée de celle-ci et d'une courbe d'ordre $m_2 - 3$. Les $m_2(m_2-2)$ points en question sont 1° les $m_2 - 1$ points d'intersection de $\lambda$ différents de $Q$, et 2° les $m_2(m_2-3)+1$ points d'intersection de $\varphi_n$ différents des points $(P)$. Le point $Q$, qui est un point d'intersection de $\lambda$ sans appartenir aux premiers de ces points, doit appartenir aux derniers. La courbe $\varphi_n$ qu'on a fait passer par les $m_1 m_2 - 1$ points $(P)$ passera donc d'elle-même par le point $Q$, et le groupe $(P)$ fournira autant de déterminations que tous les points d'intersection.

III. Si $n < m_1 + m_2 - 3$, nous désignerons le groupe à étudier par $(P)$, le nombre des points de ce groupe qui fournissent des déterminations de $\varphi_n$ indépendentes entre elles par $k$, et par $l$ le nombre des autres points du groupe — par lesquels passera d'elle même toute courbe d'ordre $n$ assujétie à passer par les $k$ autres —. Nous désignerons encore par $(Q)$ le groupe des $m_1 m_2 - k - l$ autres points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$.

Selon le n° 6 on peut faire passer une courbe $\varphi_n$ par les $k + l$ points $(P)$ et par

$$m_1 m_2 - \frac{(m_1+m_2-n-1)(m_1+m_2-n-2)}{2} - 1 - k$$

des points $(Q)$, sans qu'elle passe par tous ces derniers points. Il est possible de faire passer une courbe $\mu_{m_1+m_2-n-3}$ par les autres

$$\frac{(m_1+m_2-n-1)(m_1+m_2-n-2)}{2} - l + 1$$

points $(Q)$ et par $l - 1$ points arbitraires du plan. En effet, il suffit de faire passer la courbe, qui dépend de

$$\frac{(m_1+m_2-n)(m_1+m_2-n-3)}{2}$$

conditions par les points que nous venons d'indiquer à un des points $(Q)$ près; car la courbe composée $\varphi_n \cdot \mu_{m_1+m_2-n-3}$, qui est de l'ordre $m_1+m_2-3$ passera alors — selon ce que nous venons de démontrer — d'elle-même par ce dernier point. Comme $\varphi_n$ ne passe pas, en tout cas, par tous les points $(Q)$, on obtiendra en choisissant pour dernier point un où elle ne passe pas que $\mu_{m_1+m_2-n-3}$ y passe.

Le choix des points $(Q)$ par lesquels on a fait passer la courbe $\varphi_n$ étant arbitraire, on voit qu'aussi une combinaison quelconque de

$$\frac{(m_1+m_2-n)(m_1+m_2-n-3)}{2}-l+2$$

points $(Q)$ se trouvent sur une courbe d'ordre $m_1+m_2-n-3$ qui passe encore par $l-1$ points fixes et arbitraires. Si pour une de ces combinaisons on obtient de cette façon une détermination complète de $\mu_{m_1+m_2-n-3}$, on trouvera, en substituant successivement au dernier point $Q$ superflu à cette détermination ceux qui n'appartiennent pas à cette combinaison, que la même courbe passe par tous les points du groupe $(Q)$. Si aucune combinaison ne conduisait à la détermination complète de $\varphi_n$, il existerait même une infinité de courbes $\mu_{m_1+m_2-n-3}$ passant par les points $(Q)$ et $l-1$ points donnés; mais en démontrant après que la condition nécessaire, que nous allons énoncer, est aussi suffisante, nous verrons que cela ne peut avoir lieu.

Quoiqu'il en soit, nous avons démontré que *dans le cas où dans un groupe $(P)$ qui fait partie des $m_1 m_2$ points d'intersection de deux courbes d'ordre $m_1$ et $m_2$ il existe $l$ points qui se trouvent sur toute courbe d'ordre $n$ qui passe par les autres points $(P)$, il sera possible de faire passer une courbe d'ordre $m_1+m_2-n-3$ par les points d'intersection $(Q)$ qui n'appartiennent pas au groupe $(P)$ et par $l-1$ points arbitraires du plan.*

Nous allons démontrer qu'inversement *si une courbe d'ordre $m_1+m_2-n-3$ passe par le groupe $(Q)$ et $l-1$ points fixes, $l$ des points $(P)$ se trouveront sur toute courbe d'ordre $n$ qui passe par les autres points $(P)$.*

On le verra en faisant toujours passer par le groupe complet de points d'intersection $(P)+(Q)$ une courbe d'ordre $m_1+m_2-3$ composée d'une courbe $v_{m_1+m_2-n-3}$ d'ordre $m_1+m_2-n-3$ et d'une courbe $\chi_n$ d'ordre $n$. On peut faire passer la première par les points $(Q)$ et $l-1$ des points $(P)$ dont nous désignerons toujours le nombre par $k+l$. Son ordre étant plus petit que $m_1$ et $m_2$, elle ne passera pas par tous les points $(P)$. Pour faire passer la courbe $\chi_n$ par les $k+1$ des points $(P)$ qui n'ont pas servi à la détermination de $v_{m_1+m_2-n-3}$, il suffit donc de la faire passer par $k$ de ces points. Le choix des $l-1$ points $(P)$ étant arbitraire on trouve qu'aucune combinaison de $k+1$ points $(P)$ ne donne plus de $k$ déterminations d'une courbe d'ordre $n$ passant par eux. Il en résulte que la demande que la courbe $\varphi_n$ passe par tous les points $(P)$ ne contient que $k$ conditions indépendantes entre elles, ou bien qu'une courbe $\varphi_n$ qui passe par un nombre de $k$ points $(P)$, convenablement choisis, passera d'elle même par les $l$ autres.

Si en particulier $m_2=n$, une courbe d'ordre $m_1-3$ passera par le groupe $(Q)$ et $l-1$ points arbitraires dans le cas où toute courbe d'ordre $n$ passant par $k$ points du groupe $(P)$ passera d'elle-même par les $l$ autres. —

Au moyen du critère que nous venons de trouver on peut, dans tous les cas où le groupe $(P)$ se trouve sur deux courbes entièrement différentes dont les ordres $m_1$ et $m_2$ sont au plus égaux à $n$, réduire la question de l'indépendance des déterminations d'une courbe d'ordre $n$ que donnent les points $(P)$ à celle des dépendances entre elles des déterminations d'une courbe d'ordre $m_1 + m_2 - n - 3$ que donnent les points d'un autre groupe $(Q)$. La réduction est réelle parce que ce dernier ordre est plus petit que $n$, et s'il est besoin d'appliquer de nouveau le même critère, et ainsi de suite, on finira par avoir un ordre assez bas pour conduire à un résultat connu; mais ordinairement on est conduit assez vite à un groupe $(Q)$, auquel on ne peut immédiatement appliquer le critère.

Cela arrive pour un groupe donné $(P)$ dans le cas où toutes les courbes d'ordre $n$ passant par le groupe contiennent une partie commune d'un ordre $r$ qui est $\leqq n$. Une fois découverte, cette circonstance facilitera essentiellement la recherche parce que après cela on n'aura à s'occuper que de la détermination d'une courbe d'ordre $n - r$; il faut seulement éviter de négliger ce cas en regardant comme entièrement différentes deux courbes d'ordre $n$, ou d'ordres moins élévés $m_1$ et $m_2$, qui ont une partie commune. Pour éviter cette erreur il faut avoir attention aux points du groupe qui se trouvent sur des courbes d'ordre $r$, inférieur ou égal à $n$, et dont le nombre suffirait pour faire de ces courbes des branches de toutes les courbes d'ordre $n$ passant par eux, ou, du moins, des deux courbes $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ dont on va se servir. Alors, avant de faire usage du critère, il faudra s'assurer qu'il existe entre ces points des dépendances suffisant à réduire le nombre des déterminations obtenues par eux autant qu'il devienne certain que $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ n'aient aucune partie commune. Dans cette recherche on pourra avoir occasion à appliquer le critère à un groupe qui est plus petit que le groupe donné et à des courbes des ordres $m_1$ et $m_2$.

Pour faciliter ces recherches il sera commode de connaître la valeur minima du nombre des points d'un groupe $(P)$ qui ne donnent pas des déterminations indépendantes entre elles d'une courbe $\varphi_n$. Commençons par supposer qu'il soit possible de faire passer par $(P)$ des courbes $\varphi_n$ qui n'ont aucune partie commune, et prenons deux de ces courbes pour $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$. Alors ces courbes se rencontreront encore en un groupe de points $(Q)$ qui se trouvent sur une courbe d'ordre $n - 3$. Le nombre des points $(P)$ devant avoir une valeur minima, il faut que le groupe $(Q)$ contienne autant de points que possible ou bien tous les $n(n-3)$ points d'intersection avec la courbe d'ordre $n - 3$. Alors les points $(P)$ se trouveront selon le no. 5 sur une courbe du $3^{me}$ ordre et un de ces points sera déterminé par les autres, la valeur de $l$ étant évidemment égale à 1.

Il n'existera aucune dépendance entre des nombres plus petits de points que dans les cas où toutes les courbes d'ordre $n$ passant par eux ont une partie commune, qui doit être alors d'ordre 1 ou 2. Ces dépendances n'auront lieu que dans les cas où $n+1$ points donnés se trouvent sur une droite, ou $2n+1$ sur une conique. A l'exception de ces deux cas, $3n-1$ points donnés donneront toujours $3n-1$ déterminations indépendantes entre elles d'une courbe d'ordre $n$.

9. Nous avons supposé jusqu'à présent que tous les $m_1$, $m_2$ points d'intersection des courbes que nous avons appelées $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ soient distincts entre eux. En abandonnant ici cette supposition, nous supposerons toujours qu'il n'existe aucune courbe entière faisant partie à la fois de $\psi_{m_1}$ et de $\psi_{m_2}$.

Il faut définir la demande qu'une courbe $\varphi_n$ passe par tous les points d'intersection de deux courbes données qui se confondent en un seul point. Nous obtiendrons à la fois une définition préalable de cette demande et l'extension des théorèmes précédents en regardant ce cas comme un cas limite.

Supposons que la coïncidence de points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ ait lieu à l'origine des coordonnées, et substituons dans $\psi_{m_2}$ $x+h$ à $x$. Alors cette dernière courbe se sera déplacée d'une quantité $h$, que nous supposerons aussi petite qu'il en sera besoin, et les points d'intersection confondus à l'origine, dont nous appellerons le nombre $r$, seront remplacés par $r$ points distincts. Leurs coordonnées, étant des fonctions algébriques de $h$ qui convergent à zéro en même temps que $h$, peuvent être développées en séries convergentes suivant des puissances de $h$ à des exposants positifs et ascendants. En substituant ces séries à $x$ et $y$ dans l'équation $\varphi(x, y) = 0$, on obtient les $r$ équations linéaires entre les coefficients de $\varphi_n$ qui expriment que cette courbe passe par les $r$ points.

Si les valeurs de $n$, $m_1$ et $m_2$ sont données, $r$ pourra avoir, selon les théorèmes précédents, une valeur si grande que les $r$ équations ne sont indépendantes entre elles pour aucune valeur de $h$. De l'autre côté, si $r$ est donné, on pourra toujours attribuer à $n$ une valeur assez grande pour assurer l'indépendance des équations; selon le n° précédent on l'obtiendra, du moins, pour $n > r-1$. A présent il s'agit seulement d'établir *qu'il est possible de substituer aux équations qui restent indépendantes entre elles pour des valeurs finies de $h$ le même nombre d'équations qui restent indépendantes entre elles pour $h = 0$.*

En effet, comme tous les points coïncident avec l'origine pour $h = 0$, le terme indépendant de $h$, dans toutes les équations qu'on obtient immédiatement par la substitution des séries, doit être le terme $a$, indépendant de $x$ et $y$ dans l'équation de la courbe $\varphi_n$. Il faut garder une de ces équations, qui se réduit à $a = 0$ pour $h = 0$,

et former par soustraction $r - 1$ autres équations. En les divisant par les puissances de $h$ les moins élevées qu'elles contiennent, on obtiendra $r - 1$ équations, qui se réduisent pour $h = 0$ à des équations linéaires entre les coefficients de $\varphi_n$. S'il existe une relation linéaire entre les premiers membres de ces équations et $a$, ou entre une partie de ces quantités, on obtiendra, en les y remplaçant par les premiers membres des équations qui contiennent encore le facteur $h$, une nouvelle équation ayant pour facteur une puissance de $h$, si elle ne se réduit pas, elle-aussi, à une identité. En éloignant, dans le premier cas, la puissance de $h$ on aura une nouvelle équation qui se réduit pour $h = 0$ à une équation linéaire entre les coefficients de $\varphi_n$. En continuant de cette manière on aura toujours à sa disposition le moyen de remplacer une équation qu'on a trouvée pour $h = 0$ entre les coefficients de $\varphi_n$ et qui dépend des autres par une nouvelle équation, à moins que la même dépendance n'ait lieu entre les équations correspondantes en $h$. Si en continuant ce procédé à l'infini on n'obtiendra jamais qu'une équation dépendant des autres, l'équation correspondante en $h$ sera formée par des combinaisons linéaires des $r$ équations données en $h$ et par un nombre infini de divisions par des puissances de $h$ à des exposants finis. On voit donc qu'en gardant ces facteurs on pourrait déduire des équations données en $h$ une équation commençant par une puissance de $h$ à exposant infini, ou bien une identité. A toute dépendance impossible à éloigner entre les équations qu'on obtient pour $h = 0$ correspondra donc une dépendance entre les équations données en $h$.

On voit ainsi que les conditions que la courbe $\varphi_n$ passe par $r$ points d'intersection coïncidents de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ s'expriment par $r$ équations linéaires dans ses coefficients, et que ces équations seront indépendantes entre elles pour des valeurs assez grandes de $n$, du moins pour $n > r - 1$. Deux courbes $\varphi_n$ et $\chi_n$ qui satisfont à ces conditions, étant les limites de deux courbes dont $r$ points d'intersection tendent à coïncider, auront $r$ points d'intersection confondus. La détermination de $\varphi_n$ par $r$ points confondus jouit donc de toutes les propriétés de la détermination par $r$ points distincts dont nous avons fait usage dans les démonstrations précédentes. Donc aussi les résultats, que nous avons trouvés, seront applicables aux cas où les courbes $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ ont des points d'intersection confondus.

10. Dans notre définition des conditions de passer par $r$ points d'intersection coïncidents nous avons choisi une manière entièrement déterminée pour regarder ce cas comme une limite. On peut donc se demander si en la remplaçant par une autre on trouvera néanmoins le même système d'équations pour exprimer ces conditions. Au lieu de démontrer que cela a lieu, nous nous servirons de l'identité trouvée

dans le n° 7, et étendue dans le n° précédent au cas dont nous nous occupons, pour remplacer la définition de ces conditions par une autre.

L'identité

$$\varphi_n = \psi_{m_1} \varrho_{n-m_1} + \psi_{m_2} \varrho_{n-m_2}$$

a lieu dans tous les cas où la courbe $\varphi_n$ passe par tous les points d'intersection des courbes $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$. Elle en est donc une condition nécessaire. Dans les cas où les points d'intersection de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$ sont distincts entre eux il est évident qu'elle en est aussi une condition suffisante. On trouvera donc les équations qui expriment que $\varphi_n$ passe par tous les points d'intersection, en éliminant les coefficients de $\varrho_{n-m_1}$ et $\varrho_{n-m_2}$ des équations, linéaires en ces coefficients et en ceux de $\varphi_n$, qui expriment l'identité. Ces $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations sont indépendentes entre elles, parce que chaque équation contient un nouveau coefficient de $\varphi_n$. Le nombre des équations qu'on obtient par l'élimination aura les valeurs indiquées dans le n° 6, et sera en même temps égal à $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - t$, $t$ étant le plus petit nombre auquel on peut réduire les inconnus qu'on élimine. Le nombre $t$ ne s'augmentant pas, en tout cas, dans un cas particulier, le nombre d'équations indépendantes entre elles qui résultent de l'élimination ne se diminuera pas, si plusieurs des points d'intersection se confondent. Le nombre des conditions à exprimer par ces équations étant resté inaltéré, selon le n° précédent, on aura toujours le nombre suffisant d'équations pour les exprimer.

Il s'ensuit qu'on pourra aussi déduire de l'identité les $r$ équations, indépendantes entre elles pour des valeurs assez grandes de $n$, qui expriment que $\varphi_n$ passe par $r$ points d'intersection confondus de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$. Il faut seulement chercher les critères qui distinguent ces équations des autres qu'on peut déduire de l'identité.

Prenons, pour plus de commodité, le point où la coïncidence des points d'intersection a lieu pour origine. Alors il est évident que les équations cherchées ne peuvent contenir les coefficients des termes de $\varphi_n$ dont les degrés surpassent une certaine limite indépendente de $n$. Par exemple, même dans le cas le plus favorable, celui où l'une des deux courbes $\psi$ n'a qu'une branche simple passant par l'origine, la condition de passer par les $r$ points ne peut influencer que sur les termes de $\varphi_n$ d'un degré inférieur à $r$. Pratiquement on trouve les équations en question en se bornant à celles qui resteront inaltérées si l'on substitue à $n$ un nombre arbitrairement grand.

De cette façon, non seulement on obtient toutes les $r$ équations cherchées; mais nous allons démontrer qu'aucune équation déduite de celles qui expriment que $\varphi_n$ passe par les autres points d'intersection n'a la même propriété.

Soit $\varphi_n$ une courbe d'ordre $n$ passant par tous les points d'inter-
on de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$, $\varphi_{n'}$ une courbe d'un ordre $n'$ encore indéfini dont
ermes jusqu'à l'ordre $s$, inclusivement, sont identiques à ceux
. Elle satisfera donc à toutes les conditions qu'on peut exprimer
les équations, indépendantes de l'ordre $n$, entre les coefficients
rmes dont les degrés ne dépassent pas $s$. Nous devons démontrer
pour des valeurs assez élevées de $n'$, aucune de ces équations ne
être déduite d'équations exprimant que $\varphi_n$ et $\varphi_{n'}$ passent par des
s différents de l'origine.

Supposons en effet que cette déduction soit possible pour une de
quations. Alors, si l'on fait passer $\varphi_{n'}$ par tous ces points à un
elle passera d'elle-même par le dernier. La même chose aura lieu
la courbe $\varphi_{n'} - \varphi_n = 0$. Cette courbe a un point $(s+1)$-tuple
igine, ce qui équivaut à passer par $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$ points coïncidant
l'origine. Elle n'est encore soumise qu'aux conditions de passer
n autre nombre fini de points, et selon notre supposition alors
loit passer d'elle même par un dernier point. Cela est impossible
une valeur indéfinie de $n'$; car nous avons vu dans la démon-
on du n° 4 qu'il est possible de donner à l'ordre d'une courbe une
r assez grande pour rendre indépendantes entre elles les con-
s de passer par un nombre donné de points. —

Si l'on forme de cette façon les $r$ équations qui expriment que
asse par les $r$ points d'intersection confondus de $\psi_{m_1}$ et $\psi_{m_2}$, et
ême pour tous leurs points d'intersection, on aura, conformément
éorème de Cayley, $m_1 m_2$ ou

$$m_1 m_2 - \frac{(m_1+m_2-n-1)(m_1+m_2-n-2)}{2}$$

tions indépendantes entre elles, suivant que $n > m_1 + m_2 - 3$
$n \leqq m_1 + m_2 - 3$.

Copenhague, en novembre 1887.

# Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen.

Von

WILHELM KILLING in Braunsberg Ostpr.

## Erster Theil.

Im Gegensatz zu meinen bisherigen Arbeiten über Transformationsgruppen*) schliesse ich mich in der vorliegenden Arbeit ganz den Bezeichnungen des Herrn Lie an und ich verweise für diejenigen Leser, welche mit dessen Arbeiten weniger bekannt sind, auf die Zusammenstellung, welche Herr Engel in seiner Arbeit im 27. Bande der Math. Annalen (S. 1ff) gegeben hat. Auch die von mir neu eingeführten Bezeichnungen sind im Einverständniss mit den Herren Lie und Engel, theilweise nach mündlicher Besprechung mit denselben gebildet. Demnach bezeichne ich diejenigen infinitesimalen Transformationen, durch welche eine $r$-gliedrige Gruppe bestimmt wird, symbolisch durch $X_1 f \ldots X_r f$ (wo kein Missverständniss entstehen kann, durch $X_1 \ldots X_r$). Eine beliebige infinitesimale Transformation $\Sigma \eta_i X_i f$ ist durch $r$ Coefficienten $\eta_1 \ldots \eta_r$ bestimmt und kann bloss durch $(\eta_1 \ldots \eta_r)$ oder $(\eta)$ bezeichnet werden. Jede infinitesimale Transformation führt auf eine einfach unendliche Schaar von endlichen Transformationen, und umgekehrt kann jede beliebige endliche Transformation dadurch erhalten werden, dass man eine infinitesimale unendlich oft wiederholt. Die endlichen Transformationen werden aber in den nachfolgenden Untersuchungen nur betreffs der Frage untersucht, ob sie vertauschbar sind oder nicht. Infinitesimale Transformationen sind, solange nicht das Unendlichkleine einer höhern Ordnung mit berücksichtigt wird, stets vertauschbar. Sobald aber zwischen zwei solchen eine gewisse Relation

*) Erweiterung des Raumbegriffes. Braunsberg 1884. Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen. Braunsberg 1886.

Da die erste Arbeit zunächst dem Verzeichniss der Vorlesungen für den Winter 1884/85, die andere dem für den Sommer 1886 vorgesetzt wurde, soll erstere mit Pr. 1884, letztere mit Pr. 1886 citirt werden.

besteht, ist jede aus der einen hergeleitete endliche Transformation mit jeder aus der andern erhaltenen endlichen Transformation vertauschbar (Programm 1884, S. 12). Wir haben daher kein Missverständniss zu befürchten, wenn wir alle Transformationen, welche aus derselben unendlich kleinen durch Wiederholung hervorgehen, als identisch betrachten und diese Schaar endlicher Transformation durch die zugehörige infinitesimale bezeichnen. Wir sprechen daher (vielleicht im Gegensatz zu Herrn Lie) von einer Transformation $\Sigma\eta_\iota X_\iota f$.

Damit die $r$ Systeme von Differentialgleichungen $X_1 f \ldots X_r f$ zu einer Gruppe führen, hat man nach bekannter Vorschrift die $\frac{r(r-1)}{2}$ Ausdrücke $(X_\iota X_\varkappa)$ zu bilden, und dann muss sein:

$$(X_\iota X_\varkappa) = \sum_\sigma c_{\iota\varkappa\sigma} X_\sigma f.$$

Zwischen den Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ müssen gewisse Beziehungen bestehen, welche man entweder aus den Integrationsbedingungen oder aus einer für endliche Gruppen nahezu selbstverständlichen Gleichung*) herleiten kann, und welche sich aus den Jacobi'schen Relationen ergeben:

$$[X_\iota(X_\varkappa X_\lambda)] + [X_\varkappa(X_\lambda X_\iota)] + [X_\lambda(X_\iota X_\varkappa)] = 0,$$

oder aus

$$\sum_\varrho \{c_{\varkappa\lambda\varrho}(X_\varrho X_\iota) + c_{\lambda\iota\varrho}(X_\varrho X_\varkappa) + c_{\iota\varkappa\varrho}(X_\varrho X_\lambda)\} = 0.$$

Viele Eigenschaften der Gruppe sind nicht von den Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ selbst abhängig, sondern ergeben sich bereits aus den Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$. Wenn daher zwei Gruppen dieselben Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ besitzen, so werden sie als gleich zusammengesetzt bezeichnet. Da man aber die $c_{\iota\varkappa\lambda}$ dadurch verändern kann, dass man die $X_1 f \ldots X_r f$ durch $r$ von einander unabhängige homogene lineare Functionen derselben ersetzt, so hat man zwei $r$-gliedrige Gruppen als *gleich zusammengesetzt* zu bezeichnen, wenn sie entweder dieselben Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ haben, oder wenn man die Gleichheit durch passende Wahl der bestimmenden infinitesimalen Transformationen herbeiführen kann.

Wofern für gegebene Werthe von $\iota$ und $\varkappa$ die $r$ Coefficienten $c_{\iota\varkappa 1} \ldots c_{\iota\varkappa r}$ nicht sämmtlich verschwinden, stellt $\sum_\varrho c_{\iota\varkappa\varrho} X_\varrho f$ wieder eine Transformation dar. Es ist selbstverständlich, dass unter den $\frac{r(r-1)}{2}$ auf diese Weise erhaltenen Transformationen höchstens $r$ von einander unabhängig sind; in vielen Fällen werden sie durch eine kleinere Zahl dargestellt werden können. Ich habe (Programm 1886 S. 7 und 8) die Zahl der hierin enthaltenen von einander unabhängigen

*) Engel, Beiträge zur Gruppentheorie. Leipziger Berichte 1887. S. 89 ff.

Transformationen mit $p$ bezeichnet, und bewiesen, dass diese $p$ Transformationen eine invariante Untergruppe bestimmen, welcher ganz hervorragende Eigenschaften zukommen. Für diese Untergruppe wird man einen eigenen Namen nicht entbehren können und ich bezeichne sie als die *Hauptuntergruppe*. Hiernach ist eine Gruppe, für welche $p = r$ ist, ihre eigne Hauptuntergruppe; dagegen besitzt eine Gruppe mit lauter vertauschbaren Transformationen keine Hauptuntergruppe. Jede zweigliedrige Gruppe, deren Transformationen nicht vertauschbar sind, hat bekanntlich immer eine eingliedrige Hauptuntergruppe; diese mag zuweilen als ihr Hauptelement bezeichnet werden.

Zu einer zweiten für die Gruppe charakteristischen Zahl gelangt man durch folgende Betrachtung. Das Problem, diejenigen zweigliedrigen Untergruppen zu bestimmen, in denen eine gegebene Transformation $(\eta_1 \ldots \eta_r)$ vorkommt, führt auf eine Gleichung $r^{\text{ten}}$ Grades:

$$\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta) + \omega^{r-2}\psi_2(\eta) - \cdots \pm \omega\,\psi_{r-1}(\eta) = 0,$$

wo die $\psi_2(\eta)$ homogene Functionen $\lambda^{\text{ten}}$ Grades in $\eta_1 \ldots \eta_r$ sind und wo das absolute Glied verschwindet. Nun entsteht die Frage, wie viele der Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ von einander unabhängig sind, so dass sich alle andern durch diese ausdrücken lassen. Die Zahl der von einander unabhängigen, welche für $r > 2$ stets kleiner als $r - 1$ ist, soll mit $l$ bezeichnet werden und der *Rang* der Gruppe heissen. Ist $l > 1$, so verschwinden nicht nur die Coefficienten $\psi_{r-1} \ldots \psi_{r-l+1}$ identisch, sondern auch alle Unterdeterminanten $r - l + 1^{\text{ten}}$ Grades einer gewissen Determinante, welche mit der obigen Gleichung in engem Zusammenhange steht. Ferner gehört jede Transformation einer $(l-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit an, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind. Für $l > 1$ ist also eine beliebige endliche Transformation nicht nur mit denen vertauschbar, welche aus derselben unendlich kleinen Transformation abgeleitet werden, sondern mit weiteren Schaaren, und die zugehörigen unendlich kleinen Transformationen bestimmen eine $(l-1)$-gliedrige Untergruppe.

Der Beweis für diese Sätze und für manche andere Beziehung, in welcher die Zahl $l$ zu Eigenschaften der Gruppe steht, gründet sich einmal auf ein Formelsystem, welches aus den Jacobi'schen Relationen durch einfache Operationen hergeleitet wird. Zu einem zweiten Beweis führt eine gewisse canonische Form, in welcher die meisten Gruppen dargestellt werden können. Zu dieser Form gelangt man auf folgendem Wege. Man geht von einer ganz beliebigen inf. Transformation $(\eta)$ aus, stellt für dieselbe die obige Gleichung:

$$\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1 + \omega^{r-2}\psi_2 - \cdots \pm \omega\,\psi_{r-1} = 0$$

auf und bestimmt deren Wurzeln. Enthält dieselbe im allgemeinen $m$

verschwindende Wurzeln, verschwinden also $\psi_{r-1} \ldots \psi_{r-m+1}$ identisch, so kann man noch $m-1$ von einander und von der Transformation $(\eta)$ unabhängige Transformationen bestimmen, welche mit der gegebenen und mit einander vertauschbar sind. Man wähle etwa die gegebene Transformation als $X_r f$ und die gefundenen als $X_{r-1} f \ldots X_{r-m+1} f$. Nun mögen zunächst die $r-m$ nicht verschwindenden Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_{r-m}$ alle von einander verschieden sein. Alsdann kann man $r-m$ Transformationen $X_1 \ldots X_{r-m}$ so wählen, dass ist:

$$(X_r X_1) = \omega_1 X_1 f, \; (X_r X_2) = \omega_2 X_2 f \ldots (X_r X_{r-m}) = \omega_{r-m} X_{r-m} f.$$

Zugleich gelten aber jetzt auch die folgenden Gleichungen:

$$(X_{r-1} X_1) = \omega_1' X_1 f, \; (X_{r-1} X_2) = \omega_2' X_2 f \ldots (X_{r-1} X_{r-m}) = \omega_{r-m}' X_{r-m} f,$$
$$(X_{r-2} X_1) = \omega_1'' X_1 f, \; (X_{r-2} X_2) = \omega_2'' X_2 f \ldots (X_{r-2} X_{r-m}) = \omega_{r-m}'' X_{r-m} f.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Um die Zusammensetzung der Gruppe zu charakterisiren, muss noch der Ausdruck $(X_\iota X_\varkappa)$ für $\iota, \varkappa = 1 \ldots m$ angegeben werden. Dieser ergiebt sich aber unmittelbar aus den Wurzeln $\omega$; es ist nämlich $(X_\iota X_\varkappa) = c_{\iota\varkappa\lambda} X_\lambda f$, wenn $\omega_\iota + \omega_\varkappa = \omega_\lambda$ ist und

$$(X_\iota X_\varkappa) = (c_{\iota\varkappa r} X_r + c_{\iota\varkappa r-1} X_{r-1} + \cdots + c_{\iota\varkappa, r-m+1} X_{r-m+1}) f$$

für

$$\omega_\iota + \omega_\varkappa = 0.$$

Selbstverständlich gilt dasselbe für die Wurzeln $\omega_\varkappa', \omega_\varkappa'' \ldots$ Dadurch werden wir darauf geführt, gewisse Beziehungen zwischen den Wurzeln aufzusuchen.

Eine ähnliche Darstellung erhält man bei gleichen Wurzeln $\omega$, so dass hier ein wesentlicher Unterschied nicht eintritt. Eine eigene Betrachtung erfordert der bei der vorstehenden Skizzirung ausgeschlossene Fall, dass eine Transformation der Gruppe mit allen andern Transformationen vertauschbar ist. Indessen lässt sich auch hier die erforderliche Aenderung leicht angeben. Dagegen wird die vorstehende Darstellung der Gruppe ganz unmöglich, wenn alle Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ identisch verschwinden. Auch hier stelle ich eine gewisse einfache Form auf, aus welcher sich manche Eigenschaften der Gruppe leicht ersehen lassen und welche deshalb als eine kanonische wohl betrachtet werden kann. Aber diese Form hat nicht die hervorragenden Eigenschaften, welche der vorhin mitgetheilten Form eigen sind und welche darauf hinauskommen, dass die meisten Jacobi'schen Relationen von selbst erfüllt sind und unter den nicht identisch befriedigten die unabhängigen von den abhängigen sich unmittelbar abtrennen. Diese Gruppen gehören zu einer Classe, welche Herr Engel ganz vor kurzem betrachtet hat (Leipziger Berichte 1887, S. 95ff), nämlich zu denen, in welchen keine dreigliedrige Untergruppe von der

Zusammensetzung der allgemeinen projectiven Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit (Kegelschnittsgruppen) enthält. Von jeder solchen Gruppe beweist er, dass sie eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe enthält, dass hierin wieder eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe enthalten ist u. s. w. Ausser den Gruppen vom Range Null gehören dieser von Herrn Engel betrachteten Classe diejenigen Gruppen an, für welche alle Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ sich durch lineare Functionen von $\eta_1 \ldots \eta_r$ darstellen lassen. Für letztere folgt der Engel'sche Satz aus § 4 unserer Arbeit, und hierfür war mir Satz und Beweis schon früher bekannt. Die Darstellung in § 9 für $l = 0$ habe ich erst gefunden, nachdem mir Herr Engel seinen Satz mitgetheilt und den Beweis skizzirt hatte; indessen theilte er mir damals die Lie'sche Darstellung dieser Gruppen noch nicht mit; ich würde sonst einerseits leichter zu meiner Darstellung gekommen sein und dieselbe andererseits in grössere Uebereinstimmung mit der Lie'schen gebracht haben.

Um die unendlich kleine Transformation $\Sigma\eta_r X_r f$ zu bezeichnen, kommt es nur auf die Verhältnisse $\eta_1 : \eta_2 : \cdots : \eta_r$ an, so dass es gestattet ist, alle $\eta_i$ mit derselben von Null verschiedenen Zahl zu multipliciren. Wir ordnen daher mit den Herren Lie und Engel*) den sämmtlichen infinitesimalen Transformationen der Gruppe eindeutig und stetig die Punkte eines $(r-1)$-dimensionalen projectiven Raumes zu und betrachten $\eta_1 \ldots \eta_r$ als die homogenen Coordinaten des zugeordneten Punktes, des Bildpunktes der Transformation $\Sigma\eta_i X_i f$. Wenn die Transformationen $\Sigma\eta_i X_i f$ und $\Sigma\eta_i' X_i f$ nicht vertauschbar sind, so führt die Operation $(\Sigma\eta_i X_i, \Sigma\eta_i' X_i)$ wieder auf eine Transformation, und deren Bildpunkt wird als das Product der Punkte $(\eta)$ und $(\eta')$ bezeichnet.

Vorläufig lege ich nur einen Theil meiner Untersuchungen vor; die Fortsetzung gedenke ich bald folgen zu lassen.

## § 1.

### Ein merkwürdiges Gleichungssystem zwischen den Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gehen wir von den Gleichungen aus:

$$(1) \qquad (X_\iota X_\varkappa) = \sum_\sigma c_{\iota\varkappa\sigma} X_\sigma f,$$

$$(2) \qquad \sum_\varrho \{c_{\varkappa\lambda\varrho}(X_\varrho X_\iota) + c_{\lambda\iota\varrho}(X_\varrho X_\varkappa) + c_{\iota\varkappa\varrho}(X_\varrho X_\lambda)\} = 0.$$

*) Engel, zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformations-Gruppen. Leipziger Berichte 1886. S. 83—94.

Unsere Aufgabe wird es sein, aus dem System von Gleichungen zwischen den $c_{\iota\varkappa\varrho}$, welches durch diese beiden Gleichungen dargestellt wird, Schlüsse über die Zusammensetzung von Gruppen zu ziehen. Eine Reihe von Folgerungen ergiebt sich aus einem gewissen Gleichungssystem, welches aus dem ursprünglich gegebenen leicht durch blosse Summation erhalten werden kann. Dieses Gleichungssystem ist:

$$(3)\quad \sum_{\varkappa\lambda} c_{\alpha\beta\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\lambda} = 0,$$

$$(4)\quad \sum_{\varkappa\lambda\mu} (c_{\alpha\beta\varkappa} c_{\mu\gamma\lambda} + c_{\alpha\gamma\varkappa} c_{\mu\beta\lambda})\, c_{\varkappa\lambda\mu} = 0,$$

$$(5)\quad \sum_{\varkappa\lambda\mu\nu} (c_{\alpha\beta\varkappa} c_{\mu\gamma\nu} c_{\nu\delta\lambda} + c_{\alpha\gamma\varkappa} c_{\mu\delta\nu} c_{\nu\beta\lambda} + c_{\alpha\delta\varkappa} c_{\mu\beta\nu} c_{\nu\gamma\lambda})\, c_{\varkappa\lambda\mu} = 0,$$

. . . . . .

$$(6)\quad \sum_{\iota\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_s} (c_{\alpha\beta_1\iota} c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3} c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_1} + c_{\alpha\beta_2\iota} c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3} c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_1\varkappa_s\varkappa_1} + \cdots + c_{\alpha\beta_s\iota} c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3} c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_{s-1}\varkappa_s\varkappa_1})\, c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2} = 0.$$

In der Gleichung (6) erstreckt sich die Summation nach den $s+1$ Marken $\iota, \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_s$ über die Zahlen $1 \ldots r$; $\alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_s$ sind $s+1$ feste Marken; in der Klammer stehen $s$ Producte, von denen jedes folgende aus dem vorangehenden erhalten wird, wenn man $\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_s$ durch $\beta_2\beta_3\beta_4 \ldots \beta_1$ cyklisch ersetzt.

Die erste dieser Gleichungen ist bereits früher von Herrn Engel*) aufgestellt und bewiesen; die übrigen dürften bisher nicht veröffentlicht sein.

Damit der Beweis für die Formel (6) recht deutlich hervortritt; führen wir den Beweis für die Formeln (4) und (5) aus und wiederholen den Beweis, den Herr Engel für die Formel (3) gegeben hat.

Nach der Gleichung (2) ist:

$$\sum_{\varkappa} (c_{\alpha\beta\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\lambda} + c_{\beta\lambda\varkappa}\, c_{\varkappa\alpha\lambda} + c_{\lambda\alpha\varkappa}\, c_{\varkappa\beta\lambda}) = 0.$$

Summiren wir nach $\lambda$, so heben sich die beiden letzten Producte weg und wir erhalten die Formel (3).

Um die Relation (4) zu bilden, gehen wir von den beiden Gleichungen aus:

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu} (c_{\alpha\beta\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\mu} + c_{\beta\lambda\varkappa}\, c_{\varkappa\alpha\mu} + c_{\lambda\alpha\varkappa}\, c_{\varkappa\beta\mu})\, c_{\gamma\mu\lambda} = 0,$$

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu} (c_{\alpha\gamma\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\mu} + c_{\gamma\lambda\varkappa}\, c_{\varkappa\alpha\mu} + c_{\lambda\alpha\varkappa}\, c_{\varkappa\gamma\mu})\, c_{\beta\mu\lambda} = 0$$

*) Leipziger Berichte 1886. p. 89.

und addiren dieselben. Nun ist

$$\sum c_{\beta\lambda\varkappa}\, c_{\varkappa\alpha\mu}\, c_{\gamma\mu\lambda} + \sum c_{\lambda\alpha\varkappa}\, c_{\varkappa\gamma\mu}\, c_{\beta\mu\lambda} = 0,$$

wie man sofort sieht, wenn man in der zweiten Summe die Summationsbuchstaben $\varkappa\,\lambda\,\mu$ durch $\mu\,\varkappa\,\lambda$ ersetzt; ebenso ist

$$\sum c_{\lambda\alpha\varkappa}\, c_{\varkappa\beta\mu}\, c_{\gamma\mu\lambda} + \sum c_{\gamma\lambda\varkappa}\, c_{\varkappa\alpha\mu}\, c_{\beta\mu\lambda} = 0,$$

wo $\varkappa\,\lambda\,\mu$ der zweiten Summe durch $\lambda\,\mu\,\varkappa$ zu ersetzen ist. Somit erhält man die Gleichung (4).

Zu der Gleichung (5) gelangt man auf folgendem Wege. Man bilde die Gleichung:

$$\sum_{\iota\varkappa\lambda\mu} (c_{\alpha\beta\iota}\, c_{\iota\varkappa\lambda} + c_{\beta\varkappa\iota}\, c_{\iota\alpha\lambda} + c_{\varkappa\alpha\iota}\, c_{\iota\beta\lambda})\, c_{\gamma\lambda\mu}\, c_{\delta\mu\varkappa} = 0,$$

und bilde noch diejenigen beiden Gleichungen, welche man hieraus erhält, wenn man $\beta\,\gamma\,\delta$ durch $\gamma\,\delta\,\beta$ und durch $\delta\,\beta\,\gamma$ ersetzt. Die linke Seite einer jeden dieser drei Gleichungen enthält drei Summen (nach $\iota$, $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$). Die dritte Summe der ersten Reihe ist entgegengesetzt gleich der zweiten Summe der zweiten Gleichung; ebenso die dritte Summe der zweiten entgegengesetzt gleich der zweiten Summe der dritten Gleichung, und die dritte Summe der dritten Gleichung entgegengesetzt gleich der zweiten Summe der ersten. Addirt man also die drei Gleichungen, so bleiben nur die ersten Summen, und diese liefern die Gleichung (5).

Zum Beweise von (6) bilde man die Gleichung:

$$\sum_{\iota, \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_s} (c_{\alpha\beta_1\iota}\, c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2} + c_{\beta_1\varkappa_1\iota}\, c_{\iota\alpha\varkappa_2} + c_{\varkappa_1\alpha\iota}\, c_{\iota\beta_1\varkappa_2})\, c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_1} = 0.$$

Dieselbe Gleichung bilde man, indem man $\beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_s$ durch eine cyklische Vertauschung $\beta_2\beta_3\beta_4 \ldots \beta_1$; $\beta_3\beta_4\beta_5 \ldots \beta_2$; …; $\beta_s\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{s-1}$ ersetzt. Nun ist

$$\sum c_{\beta_1\varkappa_1\iota}\, c_{\iota\alpha\varkappa_2}\, c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_1}$$

entgegengesetzt gleich

$$\sum c_{\varkappa_1\alpha\iota}\, c_{\iota\beta_2\varkappa_2}\, c_{\beta_3\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_4\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_1\varkappa_s\varkappa_1},$$

wie man unmittelbar sieht, wenn man die Summationsbuchstaben $\iota\,\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4 \ldots \varkappa_s$ der zweiten Summe durch $\varkappa_1\varkappa_s\iota\varkappa_2\varkappa_3 \ldots \varkappa_{s-1}$ ersetzt. Somit ist die zweite Summe in jeder Gleichung entgegengesetzt gleich der dritten Summe der folgenden Gleichung, und die zweite Summe der $s^{\text{ten}}$ Gleichung entgegengesetzt gleich der dritten Summe in der ersten. Werden also die $s$ so gebildeten Gleichungen addirt, so bleibt jedesmal nur das erste Glied, so dass die Richtigkeit von (6) bewiesen ist.

## § 2.

## Die Invarianten einer gewissen linearen Gruppe, welche zu der gegebenen Gruppe adjungirt ist.

Mit jeder Transformationsgruppe stehen zwei Gruppen von linearen Transformationen in enger Beziehung. Die einzelnen infinitesimalen Transformationen der einen werden für $x = 1 \ldots r$ dargestellt durch das Gleichungssystem:

$$dx_i = dt \sum_\varrho c_{\varrho x i} x_\varrho,$$

oder bei der symbolischen Bezeichnung des Herrn Lie durch die $r$ Gleichungen:

$$\sum_{i\varrho} c_{\varrho x i} x_\varrho \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Diese Gruppe bezeichnen die Herren Lie und Engel*) als die *adjungirte lineare Gruppe.*

Eine zweite ist

$$d\eta_i = dt \sum_\varrho \eta_\varrho c_{i x \varrho} \quad \text{oder} \quad \sum_{i\varrho} \eta_\varrho c_{i x \varrho} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}.$$

Diese wird als die *zweite adjungirte lineare Gruppe* bezeichnet. Beide sind in derselben Weise zusammengesetzt wie die gegebene.

Mit den Invarianten der zweiten adjungirten Gruppe habe ich mich früher beschäftigt (Programm 1886), die Invarianten der andern will ich jetzt herleiten.

Zu dem Ende stelle ich die Gleichung auf:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \sum_\varrho \eta_\varrho c_{\varrho 11} - \omega & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 21} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r1} \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 12} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 22} - \omega & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 1r} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 2r} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho rr} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Der Kürze wegen setzen wir:

$$(8) \quad \sum_\varrho \eta_\varrho c_{\varrho x \lambda} = \gamma_{x\lambda}(\eta) = \gamma_{x\lambda},$$

und können dann die vorstehende Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \omega & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{r1} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} - \omega & \cdots & \gamma_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{1r} & \gamma_{2r} & \cdots & \gamma_{rr} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

*) Briefliche Mittheilung. Man vergl. Engel, Leipziger Berichte 1886. S. 88

Da $c_{\iota\varkappa\lambda} + c_{\varkappa\iota\lambda} = 0$ ist, so ist auch

$$\sum_{\sigma} \eta_\sigma \gamma_{\sigma\lambda} = \sum_{\varrho\sigma} \eta_\varrho \eta_\sigma c_{\varrho\sigma\lambda} = 0$$

und daher verschwindet die Determinante der $\gamma_{\iota\varkappa}$ identisch; es ist:

$$|\gamma_{\iota\varkappa}| = 0. \tag{9}$$

Entwickeln wir also die Gleichung (7) nach Potenzen von $\omega$, so erhalten wir:

$$\omega^r - \psi_1(\eta)\cdot\omega^{r-1} + \psi_2(\eta)\cdot\omega^{r-2} - \psi_3(\eta)\omega^{r-3} + \cdots \pm \omega\psi_{r-1}(\eta) = 0, \tag{10}$$

Für $\nu = 1 \cdots r-1$ ist hier jedes $\psi_\nu$, wenn es nicht identisch verschwindet, eine homogene Function $\nu^{\text{ten}}$ Grades der Grössen $\eta_1 \ldots \eta_r$.

Jetzt gilt der Satz:

*Die Coefficienten $\psi_1(\eta)$, $\psi_2(\eta)$ $\ldots$ $\psi_{r-1}(\eta)$ in der Gleichung* (10) *sind invariante Functionen der adjungirten linearen Gruppe*,

oder mit andern Worten:

*Die Determinante*

$$\begin{vmatrix} \sum \eta_\varrho c_{\varrho 11} - \omega & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 21} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r1} \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 12} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 22} - \omega & \cdot\cdot & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r2} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 1r} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 2r} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho rr} - \omega \end{vmatrix}$$

*ändert sich bei beliebigem Werthe von $\omega$ nicht, wenn man sie irgend einer Transformation derjenigen Gruppe unterwirft, welche durch die $r$ unendlich kleinen Transformationen*

$$\mathsf{H}_\alpha f = \sum_{\varrho\iota} \eta_\varrho c_{\varrho\alpha\iota} \frac{\partial f}{\partial \eta_\iota}$$

*bestimmt wird.*

Wir beweisen diesen Satz zunächst für die niedrigsten Functionen $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$. Es ist $\psi_1 = \sum_{\iota\sigma} \eta_\iota c_{\iota\sigma\sigma}$. Unter Anwendung der inf. Transformation $\mathsf{H}_\alpha f$ hat man $d\eta_\iota$ zu ersetzen durch $dt \sum_\varrho \eta_\varrho c_{\varrho\alpha\iota}$; also ist

$$d\psi_1 = -\,dt \sum_{\iota\varrho\sigma} \eta_\varrho c_{\varrho\alpha\iota} c_{\iota\sigma\sigma},$$

wo der Coefficient von jedem $\eta_\varrho$ infolge von (3) verschwindet. Da also durch jede inf. Transformation der Gruppe die Function $\psi_1$ ungeändert bleibt, so ändert sie sich auch nicht bei einer beliebigen der Gruppe angehörenden Transformation.

Der Coefficient $\psi_2$ von $\omega^{r-2}$ ist

$$\sum_{(\mu\lambda)} (\gamma_{\lambda\lambda}\gamma_{\mu\mu} - \gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\mu\lambda}),$$

wo nur die verschiedenen Combinationen $(\lambda\mu)$ aus der Reihe $1 \ldots r$ zu nehmen sind. Statt dessen können wir setzen:

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu} (\gamma_{\lambda\lambda}\gamma_{\mu\mu} - \gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\mu\lambda})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\gamma\varkappa\lambda\mu} \eta_\gamma \eta_\varkappa (c_{\gamma\lambda\lambda} c_{\varkappa\mu\mu} - c_{\varkappa\lambda\mu} c_{\gamma\mu\lambda}).$$

Somit ist unter Anwendung der inf. Transformation $\mathsf{H}_\alpha f$:

$$d\psi_2 = -\frac{1}{2}\, dt \sum_{\beta\gamma\varkappa\lambda\mu} \eta_\beta \eta_\gamma c_{\alpha\beta\varkappa}(c_{\gamma\lambda\lambda} c_{\varkappa\mu\mu} - c_{\varkappa\lambda\mu} c_{\gamma\mu\lambda}).$$

Hier ist der Coefficient von $-\frac{1}{2}\, dt \cdot \eta_\beta \eta_\gamma$:

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu} \{(c_{\alpha\beta\varkappa} c_{\gamma\lambda\lambda} c_{\varkappa\mu\mu} + c_{\alpha\gamma\varkappa} c_{\beta\lambda\lambda} c_{\varkappa\mu\mu}) - c_{\varkappa\lambda\mu}(c_{\alpha\beta\varkappa} c_{\gamma\mu\lambda} + c_{\alpha\gamma\varkappa} c_{\beta\mu\lambda})\}.$$

Jede der beiden ersten Summen verschwindet wegen der Relation (3), der übrig bleibende Theil wegen (4). Somit ist in der That: $d\psi_2(\eta) = 0$.

Ganz entsprechend ist:

$$\psi_3 = \frac{1}{6}\sum_{\gamma\delta\varkappa\lambda\mu\nu} \eta_\gamma \eta_\delta \eta_\varkappa \begin{vmatrix} c_{\varkappa\lambda\lambda} & c_{\varkappa\lambda\mu} & c_{\varkappa\lambda\nu} \\ c_{\gamma\mu\lambda} & c_{\gamma\mu\mu} & c_{\gamma\mu\nu} \\ c_{\delta\nu\lambda} & c_{\delta\nu\mu} & c_{\delta\nu\nu} \end{vmatrix},$$

also unter Anwendung derselben inf. Transformation:

$$d\psi_3 = -\frac{1}{6}\, dt \sum_{\substack{\beta\gamma\delta \\ \varkappa\lambda\mu\nu}} \eta_\beta \eta_\gamma \eta_\delta c_{\alpha\beta\varkappa} \begin{vmatrix} c_{\varkappa\lambda\lambda} & c_{\varkappa\lambda\mu} & c_{\varkappa\lambda\nu} \\ c_{\gamma\mu\lambda} & c_{\gamma\mu\mu} & c_{\gamma\mu\nu} \\ c_{\delta\nu\lambda} & c_{\delta\nu\mu} & c_{\delta\nu\nu} \end{vmatrix}.$$

Bis auf denjenigen Theil, welcher infolge der Relation (3) und (4) verschwindet, ist der Coefficient von

$$-\frac{1}{6}\, dt\, \eta_\beta \eta_\gamma \eta_\delta \quad \text{gleich:}$$

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu\nu} c_{\varkappa\lambda\mu}(c_{\alpha\beta\varkappa} c_{\gamma\mu\nu} c_{\delta\nu\lambda} + \cdots),$$

wo in der Klammer alle diejenigen Glieder hinzuzufügen sind, welche aus dem hingeschriebenen durch Permutation von $\beta\gamma\delta$ erhalten werden. Diese Permutationen lassen sich in zwei Reihen von Cyklen zerlegen; die Summe eines jeden Cyklus verschwindet wegen (5); also ist $d\psi_3 = 0$.

In derselben Weise können wir fortfahren. Es ist:

$$\psi_s(\eta) = \frac{1}{s!}\sum \eta_\iota \eta_{\beta_2}\eta_{\beta_3}\cdots\eta_{\beta_s}\begin{vmatrix} c_{\iota x_1 x_1} & c_{\iota x_1 x_2} & \cdots & c_{\iota x_1 x_s} \\ c_{\beta_2 x_2 x_1} & c_{\beta_2 x_2 x_2} & \cdots & c_{\beta_2 x_2 x_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{\beta_s x_s x_1} & c_{\beta_s x_s x_2} & \cdots & c_{\beta_s x_s x_s} \end{vmatrix}.$$

Wenden wir also wieder die inf. Transformation an:

$$d\eta_\iota = -\,dt\sum_{\beta_1}\eta_{\beta_1} c_{\alpha\beta_1\iota},$$

so ist bis auf solche Glieder, deren Verschwinden aus Gl. (3), (4), (5) und den entsprechenden für $4, 5 \cdots s-1$ folgt, der Coefficient von

$$-\frac{dt}{s!}\,\eta_{\beta_1}\cdots\eta_{\beta_s} \quad \text{gleich:}$$

$$c_{\iota x_1 x_2}(c_{\alpha\beta_1\iota}\, c_{\beta_2 x_2 x_3}\, c_{\beta_3 x_3 x_4}\cdots c_{\beta_s x_s x_1} + \cdots),$$

wo in der Klammer diejenigen Glieder hinzuzufügen sind, welche sich aus dem niedergeschriebenen Producte durch Permutation von $\beta_1\beta_2\ldots\beta_s$ ergeben. Da alle Permutationen sich in eine Reihe von Cyklen zerlegen, so folgt der Satz aus (6). *)

---

*) Herr Engel, dem ich Ende Juli 1886 den vorstehenden Satz nebst dem hier gegebenen Beweise mittheilte, hat für den Satz einen andern Beweis geliefert, welchen ich hier wörtlich folgen lasse.

„Ich setze

$$B_x f = \sum_{ij}^{1\cdots r} c_{jki} y_j \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad \sum_1^r{}_j c_{jki} y_j - \varepsilon_{ki}\omega = u_{ki},$$

wo $\varepsilon_{ik} = 0$ für $i \neq k$, und $\varepsilon_{ii} = 1$. Dann sei

$$\Delta = \sum \pm u_{11}\ldots u_{rr};$$

es soll bewiesen werden, dass $B_k\Delta \equiv 0$.

Ich finde

$$B_s\Delta = \sum_{ki}^{1\cdots r}\frac{\partial\Delta}{\partial u_{xi}} B_s u_{ki},$$

$$B_s u_{ki} = \sum_{vj}^{1\cdots r} c_{jki}\, c_{vsj}\, y_v,$$

$$\sum_1^r{}_j\ (c_{vsj}\, c_{jki} + c_{skj}\, c_{jvi} + c_{kvj}\, c_{jsi}) = 0,$$

also wird

$$B_s u_{ki} = \sum_1^r{}_j\, c_{skj}\sum_1^r{}_v\, c_{vji}\, y_v + \sum_1^r{}_j\, c_{jsi}\sum_1^r{}_v\, c_{vkj}\, y_v,$$

$$= \sum_1^r{}_j\, c_{skj}(u_{ji} + \varepsilon_{ji}\omega) + \sum_1^r{}_j\, c_{jsi}(u_{kj} + \varepsilon_{kj}\omega);$$

Von den hier betrachteten Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ ist die Function $\psi_1$ bereits vor längerer Zeit von Herrn Lie betrachtet. Derselbe hat nämlich den Satz aufgestellt*), dass wenn nicht alle Ausdrücke $\sum c_{\alpha\lambda\lambda}$ verschwinden, (wenn also die Function $\psi_1(\eta)$ nicht identisch verschwindet), die Gruppe eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe besitzt, und dass diese durch $\psi_1(\eta)=0$ dargestellt wird. Daraus folgt dann (Pr. 1886, S. 11), dass die von mir eingeführte Zahl $p$ kleiner als $r$ ist. Herr Engel hat für die beiden genannten Sätze einen sehr einfachen Beweis geliefert**). Seinem Beweise kann man leicht eine Form geben, die mit der in den folgenden Untersuchungen angewandten Methode eng zusammenhängt. Dennoch halte ich es nicht für überflüssig, aus der Formel (3), auf die sich auch Hr. Engel stützt, einen weiteren Beweis herzuleiten. Nur beweise ich die Sätze in der entgegengesetzten Reihenfolge und zeige zunächst:

*Wenn $\psi_1(\eta)$ nicht identisch verschwindet, so genügen die Coordinaten $\xi_1 \ldots \xi_r$ derjenigen Transformationen, zu denen man durch die Operation*

$$\left(\sum \eta_i X_i, \quad \sum \eta_i' X_i\right) = \sum \xi_\varrho X_\varrho f$$

*bei ganz beliebigen Werthen von $\eta$ und $\eta'$ gelangt, der Gleichung*

$$\psi_1(\xi) = 0.$$

In der That seien $\sum \eta_i X_i f$ und $\sum \eta_i' X_i f$ zwei beliebige inf. Transformationen, und es sei

$$\left(\sum \eta_i X_i, \quad \sum \eta_i' X_i\right) = \sum \xi_\varrho X_\varrho f,$$

so ist

$$\xi_\varrho = \sum_{i\varkappa} \eta_i \eta_\varkappa' c_{i\varkappa\varrho},$$

---

da $(c_{\sigma ki} + c_{ks i})\,\omega$ verschwindet, ist

$$B_s u_{ki} = \sum_1^r{}_j (c_{skj} u_{ji} + c_{jsi} u_{kj}).$$

$$B_s \Delta = \sum_{kj}^{1\ldots r} c_{skj} \sum_1^r{}_i u_{ji} \frac{\partial \Delta}{\partial u_{ki}} + \sum_{ij}^{1\ldots r} c_{jsi} \sum_1^r{}_k u_{kj} \frac{\partial \Delta}{\partial u_{ki}}$$

$$= \Delta \sum_{kj}^{1\ldots r} c_{skj}\, e_{jk} + \Delta \sum_{ij}^{1\ldots r} c_{jsi}\, e_{ji}$$

$$= \Delta \left\{ \sum_1^r{}_k c_{skk} + \sum_1^r{}_i c_{isi} \right\} \equiv 0.\text{“}$$

*) Archiv for Math. og Naturw. X, 88.

**) Leipziger Berichte 1886, S. 89.

also ist

$$\psi_1(\xi) = \sum_{\varrho\sigma} \xi_\varrho c_{\varrho\sigma\sigma} = \sum_{\iota\varkappa\varrho\sigma} \eta_\iota \eta_\varkappa' c_{\iota\varkappa\varrho} c_{\varrho\sigma\sigma} = 0$$

infolge der Relation (3).

Der Bildpunkt einer jeden inf. Transformation, zu der man durch die Operation $\left(\sum \eta_\iota X_\iota, \sum \eta_\iota' X_\iota\right)$, oder durch Multiplication der Punkte $\eta$ und $\eta'$ gelangt, gehört also immer der Ebene $\psi_1(\eta) = 0$ an. Somit wird auch der Bildpunkt dieser Ebene angehören, wenn der eine der gegebenen Punkte auf ihr angenommen wird; d. h. diese Ebene stellt eine invariante Untergruppe dar. Das ist aber der von Herrn Lie zuerst bewiesene Satz.

## § 3.

### Herleitung einer für die Gruppe charakteristischen Gleichung.

Die beiden vorangehenden Paragraphen wurden vorausgeschickt, um die folgenden Entwicklungen recht im Zusammenhang darlegen zu können. Deshalb habe ich auch die Gleichung (7) aufgestellt, ohne das Problem zu erwähnen, welches naturgemäss auf diese Gleichung führt. Das soll jetzt geschehen, und dann wird es uns möglich sein, aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze weitere Folgerungen zu ziehen.

Jede zweigliedrige Gruppe, deren Transformationen nicht mit einander vertauschbar sind, enthält eine eingliedrige Hauptuntergruppe, und wenn $X_1 f$ dieselbe für die durch $X_1 f$ und $X_2 f$ bestimmte Gruppe darstellt, so ist:

$$(X_1 X_2) = \omega X_1 f,$$

wo $\omega$ von null verschieden ist.

Wir suchen jetzt diejenigen zweigliedrigen Untergruppen der vorgelegten Gruppe $(X_1 X_2 \ldots X_r)$, in denen eine gegebene inf. Transformation $(\eta_1 \ldots \eta_r)$ enthalten ist. Zunächst sollen die Transformationen der gesuchten zweigliedrigen Gruppen nicht vertauschbar sein, und $(\xi_1 \ldots \xi_r)$ soll die eingliedrige Hauptuntergruppe darstellen. Dann kommt die Aufgabe, alle zweigliedrige Untergruppen zu suchen, denen die gegebene Transformation $\eta_1 \ldots \eta_r$ angehört, darauf hinaus, $r+1$ Grössen $\xi_1 \ldots \xi_r, \omega$ so zu bestimmen, dass die Gleichung besteht:

$$(11) \qquad \left(\sum \eta_\iota X_\iota, \sum \xi_\iota X_\iota\right) = \omega \sum \xi_\iota X_\iota f.$$

Diese Gleichung liefert auch die zweigliedrigen Untergruppen mit vertauschbaren Transformationen, da alsdann $\omega = 0$ wird. Nur wenn die gegebene Transformation $(\eta_1 \ldots \eta_r)$ die Hauptuntergruppe für eine zweigliedrige Untergruppe darstellt, muss man von einer andern Glei-

chung ausgehen. Wir werden aber zeigen, dass dies nur für ausgezeichnete Lagen des Punktes $(\eta_1 \dots \eta_r)$ möglich ist, so dass wir von diesem Falle absehen können.

Indem wir in die Gleichung (11) aus (1) die Werthe einsetzen, erhalten wir eine Gleichung, welche in die folgenden $r$ Gleichungen zerfällt:

$$\sum_{\iota\varkappa} \eta_\iota \xi_\varkappa c_{\iota\varkappa\varrho} = \omega \xi_\varrho. \tag{12}$$

Um dieses Gleichungssystem zu lösen, hat man bekanntlich zunächst $\omega$ vermittelst der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \sum \eta_\varrho c_{\varrho 11} - \omega & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 21} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r1} \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 12} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 22} - \omega & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 1r} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 2r} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho rr} - \omega \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

zu berechnen. Es ist dies dieselbe Gleichung, welche wir bereits vorhin aufgestellt und auch in der Form

$$\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta) + \omega^{r-2}\psi_2(\eta) - \cdots \pm \omega\psi_{r-1}(\eta) = 0 \tag{10}$$

geschrieben haben.

Zu jeder von null verschiedenen Wurzel $\omega$ lässt sich ein System von Grössen $\xi$ bestimmen, welches der Gl. (12) und damit auch der Gl. (11) genügt. Wenn aber $\omega$ eine $\alpha$-fache von null verschiedene Wurzel ist, und es verschwinden für diesen Werth von $\omega$ alle Unterdeterminanten $r - \alpha + 1^{\text{ten}}$ Grades auf der linken Seite von (7), so lassen sich $\alpha$ Systeme $\xi, \xi', \xi'' \dots \xi^{(\alpha-1)}$ derartig bestimmen, dass für ganz beliebige Coefficienten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{\alpha-1}$ die Gleichung besteht:

$$\begin{aligned} &\Big(\sum \eta_\iota X_\iota, \sum \big(\lambda\xi_\iota + \lambda_1\xi_\iota' + \lambda_2\xi_\iota'' + \cdots + \lambda_{\alpha-1}\xi_\iota^{(\alpha-1)}\big) X_\iota\Big) \\ &\quad = \omega \sum_\iota \big(\lambda\xi_\iota + \lambda_1\xi_\iota' + \lambda_2\xi_\iota'' + \cdots + \lambda_{\alpha-1}\xi_\iota^{(\alpha-1)}\big) X_\iota f. \end{aligned}$$

In diesem Falle geht durch den Bildpunkt der gegebenen Transformation $(\eta_1 \dots \eta_r)$ eine $\alpha$-dimensionale Ebene, in welcher jede durch diesen Punkt gezogene Gerade eine zweigliedrige Untergruppe darstellt.

Wenn ferner $\omega$ eine von null verschiedene mehrfache Wurzel ist, für welche nicht wenigstens alle Unterdeterminanten $r - 1^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so liefert dieselbe nur eine einzige zweigliedrige Untergruppe. Aber man kann in diesem Falle $\alpha$ Systeme $\xi, \xi' \dots \xi^{(\alpha-1)}$ so bestimmen, dass sich bei beliebigen Werthen von $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{\alpha-1}$ die Gleichung erfüllen lässt:

$$\left(\sum \eta_i X_i,\ \sum \left(\lambda \xi_i + \lambda_1 \xi_i' + \lambda_2 \xi_i'' + \cdots + \lambda_{\alpha-1} \xi^{(\alpha-1)}\right) X_i\right)$$
$$= \sum \left(\mu \xi_i + \mu_1 \xi_i' + \mu_2 \xi_i'' + \cdots + \mu_{\alpha-1} \xi^{(\alpha-1)}\right) X_i f,$$

wofern die $\mu, \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{\alpha-1}$ in passender Weise als lineare Functionen von $\lambda, \lambda_1 \ldots \lambda_{\alpha-1}$ bestimmt werden.

Dass von den $r$ Wurzeln der Gl. (7) immer eine verschwindet, wurde bereits oben angegeben. Eine einfache verschwindende Wurzel führt aber zu keiner zweigliedrigen Untergruppe, sondern zu der selbstverständlichen Relation

$$\left(\sum \eta_i X_i,\ \sum \eta_i X_i\right) = 0.$$

Wenn aber $\omega = 0$ eine $\alpha$-fache Wurzel der Gl. (7) ist und zugleich für $\omega = 0$ alle Unterdeterminanten $r - \alpha + 1^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so gelangen wir zu einer $\alpha$-gliedrigen Untergruppe, deren Transformationen sämmtlich mit der gegebenen vertauscht werden können. Was endlich den Fall anbetrifft, dass $\omega = 0$ eine $\alpha$-fache Wurzel ist, ohne dass die sämmtlichen Unterdeterminanten $r - \alpha + 1^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so wollen wir zunächst davon absehen, da wir uns in § 10 um so ausführlicher mit diesem Fall beschäftigen müssen. Hier genüge die Bemerkung, dass dann entweder alle Functionen $\psi_1(\eta) \ldots \psi_{r-1}(\eta)$ für einen solchen Werth verschwinden oder alle Unterdeterminanten $r - 1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ gleich null sind.

## § 4.

## Eintheilung der Gruppen nach ihrem Range.

Schreibt man wieder die Gleichung (7) in der Form (10):

$$\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta) + \omega^{r-2}\psi_2(\eta) + \cdots + \omega\psi_{r-1}(\eta) = 0,$$

so soll die kleinste Zahl derjenigen Functionen, durch welche sich alle Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{r-1}$ ausdrücken lassen, mit $l$ bezeichnet, und die Gruppen sollen nach dem zugehörigen Werthe von $l$ eingetheilt werden. Für $l = 0$ verschwinden alle Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{r-1}$ identisch; für $l = 1$ lassen sich alle Functionen $\psi_r$, soweit sie nicht identisch verschwinden, rational durch eine einzige Function von $\eta$ darstellen. Auch für ein beliebiges $l$ lassen sich $l$ Functionen $P_1 \ldots P_l$ so wählen, dass alle Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{r-1}$ sich rational durch $P_1 \ldots P_l$ ausdrücken lassen. Diese Zahl $l$ bezeichne ich als den *Rang* der Gruppe.

Setzt man wieder zur Abkürzung

$$\gamma_{\varkappa\iota} = \sum_{\varrho} \eta_\varrho c_{\varrho\varkappa\iota},$$

so gilt für jede Function $\psi_\nu(\eta)$, wenn $\nu = 1 \cdots r-1$ genommen wird, nach den Entwicklungen des zweiten Paragraphen, die Gleichung

$$\sum_i \frac{\partial \psi_\nu}{\partial \eta_i} \gamma_{\varkappa i} = 0. \tag{13}$$

Da sich die Functionen $\psi_\nu(\eta)$ durch die $l$ Functionen $P_1 \ldots P_l$ ausdrücken lassen, so muss für jeden Werth von $\varkappa$ die Gleichung bestehen:

$$\gamma_{\varkappa 1} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \eta_1} + \gamma_{\varkappa 2} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \eta_2} + \cdots + \gamma_{\varkappa r} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \eta_r} = 0,$$

wo $\alpha = 1 \cdots l$ gesetzt werden muss. Hier sind aber die $P_1 \ldots P_l$ von einander unabhängig, und daher gilt der Satz:

*Wenn die sämmtlichen Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ sich durch $l$ von einander unabhängige Functionen darstellen lassen, so verschwinden alle Unterdeterminanten $r-l+1^{ten}$ Grades von $|\gamma_{i\varkappa}|$ identisch. Zugleich sind natürlich auch $\psi_{r-1} \ldots \psi_{r-l+1}$ identisch gleich null.*

Wenn wir mit diesem Satze eine im vorigen Paragraphen über das Verschwinden von $\omega$ gemachte Bemerkung verbinden, so kommen wir zu folgendem Ergebniss:

*Wenn für eine Gruppe der Rang grösser ist als eins, so gehört jede Transformation einer $(l-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit an, deren Transformationen sämmtlich mit der gegebenen vertauschbar sind.*

Ich erinnere hier daran, in welchem Sinne das Wort „vertauschbar" nach der in der Einleitung getroffenen Festsetzung zu nehmen ist. Gehen wir also bei $l > 1$ von einer beliebigen endlichen Transformation aus, so ist dieselbe nicht nur mit allen denjenigen Transformationen vertauschbar, welche mit der gegebenen Transformation aus derselben infinitesimalen Transformation hergeleitet werden, sondern auch mit allen denjenigen Transformationen, für welche die zugehörigen unendlich kleinen Transformationen eine bestimmte $(l-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden.

Umgekehrt schliessen wir:

*Geht durch jeden Punkt des Bildraumes eine $(k-1)$-dimensionale Ebene, welche lauter mit der gegebenen vertauschbare Transformationen abbildet, aber keine $k$-dimensionale derartige Ebene, so verschwinden natürlich $\psi_{r-1} \ldots \psi_{r-k+1}$ identisch; zugleich lassen sich alle Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{r-k}$ rational durch höchstens $k$ Functionen darstellen, oder es ist $l \leq k$.*

Speciell ergiebt sich der Satz:

*Wenn es in einer Gruppe eine endliche Transformation giebt, welche nur vertauschbar ist mit den aus derselben infinitesimalen Transformation (wie sie selbst) hervorgehenden Transformationen, so lassen sich*

*alle $r-1$ Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{r-1}$ rational durch eine einzige Function darstellen.*

Jetzt kann der Lie'sche Satz, dass die Gruppe eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe hat, wenn die Function $\psi_1(\eta)$ nicht identisch verschwindet, in folgender Weise verallgemeinert werden:

*Wählt man die $l$ Functionen $P_1 \ldots P_l$, durch welche sich die sämmtlichen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ rational ausdrücken lassen, in der einfachsten Weise und ist dann eine derselben, etwa $P_1(\eta)$ eine lineare Function, so stellt $P_1(\eta) = 0$ eine invariante Untergruppe dar.*

Der Beweis ist genau derselbe wie der für den Lie'schen Satz am Schluss von § 2 gegebene. Wenn wir setzen:

$$P_1(\eta) = \sum p_\iota \eta_\iota,$$

so ist nach (13) für jede Combination $\alpha, \beta$:

$$\sum_\nu c_{\alpha\beta\nu} p_\nu = 0.$$

Bilden wir also

$$\left(\sum \eta_\iota X_\iota, \sum \eta_\iota' X_\iota\right) = \sum \xi_\varrho X_\varrho f,$$

so ist

$$\xi_\varrho = \sum_{\iota\varkappa} \eta_\iota \eta_\varkappa' c_{\iota\varkappa\varrho},$$

also

$$P_1(\xi) = \sum p_\varrho \xi^\varrho = \sum_{\iota\varkappa\varrho} \eta_\iota \eta_\varkappa' c_{\iota\varkappa\varrho} p_\varrho,$$

so dass der Coefficient eines jeden Productes $\eta_\iota \eta_\varkappa'$ verschwindet, und der Bildpunkt einer jeden durch die Operation

$$\left(\sum \eta_\iota X_\iota, \sum \eta_\iota' X_\iota\right)$$

erhaltenen inf. Transformation auf der Ebene $P_1(\eta) = 0$ liegt.

Als speciellen Fall des vorstehenden Satzes erwähne ich:

*Wenn eine der Functionen $\psi_2(\eta) \ldots \psi_{r-1}(\eta)$ die Potenz einer linearen Function ist, so stellt deren Verschwinden eine invariante Untergruppe dar.*

Man kann aber den Satz noch erweitern:

*Wenn $i$ unter den $l$ Functionen $P_1 \ldots P_l$, durch welche sich die Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ darstellen lassen, etwa $P_1 \ldots P_i$ linear sind, so ist die Hauptuntergruppe höchstens $(r-i)$-gliedrig und in derjenigen Gruppe, welche durch die Gleichungen*

$$P_1(\eta) = P_2(\eta) = \cdots = P_i(\eta) = 0$$

*dargestellt wird, enthalten oder mit ihr identisch. Für diese Hauptuntergruppe lassen sich die Functionen $\psi^\nu$ durch die Functionen $P_{i+1} \ldots P_l$ darstellen.*

Der Satz bedarf keines Beweises. Ich mache nur darauf aufmerksam, dass wenn alle Functionen $P_1 \ldots P_l$ linear sind, die Haupt-Untergruppe höchstens $r-1$-gliedrig und ihr Rang gleich null ist, so dass alle zweigliedrigen Untergruppen der letzteren vertauschbare Transformationen enthalten.

Mit den vorstehenden Sätzen hängen auch die folgenden auf's Engste zusammen:

*Wenn eine Gruppe nicht ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so ist der Rang der letzteren kleiner als der der gegebenen Gruppe.*

*Besitzt eine Gruppe eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe, so ist der Rang der letzteren um eins kleiner als der der gegebenen Gruppe.*

Hierbei ist nur vorausgesetzt, dass für die gegebene Gruppe selbst nicht bereits $l = 0$ ist. Speciell folgt:

*Wenn in einer $r$-gliedrigen Gruppe nicht mit jeder Transformation eine andere vertauschbar ist und zugleich entweder $\psi_1(\eta)$ nicht identisch verschwindet oder doch eine der Functionen $\psi_2(\eta) \ldots \psi_{r-1}(\eta)$ die Potenz einer linearen Function ist, so hat sie eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe, für welche $l = 0$ ist.*

## § 5.

## Die Haupttransformationen der in der Gruppe enthaltenen zweigliedrigen Untergruppen.

Wenn die inf. Transformation $\sum \eta_i' X_i f$ die eingliedrige Hauptuntergruppe und $\sum \eta_i X_i f$ eine beliebige Transformation einer zweigliedrigen Untergruppe ist, so müssen bei nicht-verschwindendem $\omega$ die Gleichungen (12) bestehen, denen wir jetzt die Form geben:

$$\sum_{ix} \eta_i \eta_x' c_{ix\varrho} = -\sum_i \eta_i \gamma_{i\varrho}' = \omega \eta_\varrho', \tag{12a}$$

wenn für $\gamma_{i\varrho}(\eta')$ kurz $\gamma_{i\varrho}'$ geschrieben wird.

Wird wieder eine beliebige der Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ mit $\psi_\nu$ bezeichnet und $\psi_\nu'$ kurz statt $\psi_\nu(\eta')$ geschrieben, so ist nach (13):

$$\sum_\varrho \frac{\partial \psi_\nu'}{\partial \eta_\varrho'} \gamma_{i\varrho}' = 0.$$

Multipliciren wir also beide Seiten der Gl. (12a) mit $\frac{\partial \psi_\nu'}{\partial \eta_\varrho'}$ und summiren nach $\varrho$, so verschwindet die linke Seite und es ist bei nicht-verschwindendem Werthe von $\omega$:

$$\psi_1(\eta') = 0, \quad \psi_2(\eta') = 0 \cdots \psi_{r-1}(\eta') = 0. \tag{14}$$

Daraus folgt der Satz:

*Die Coefficienten $\eta_1' \ldots \eta_r'$ einer jeden Transformation $\sum \eta_i' X_i f$, welche die Haupttransformation für irgend eine der Gruppe angehörige zweigliedrige Untergruppe ist, genügen den Gleichungen* (14), *und die Gleichung* (7) *hat für dieselben nur verschwindende Wurzeln.*

Dieser Satz lässt auch folgenden Ausspruch zu:

*Jeder Punkt, welcher die Haupttransformation einer in der Gruppe enthaltenen zweigliedrigen Untergruppe abbildet, liegt auf demjenigen Gebilde, welches durch das Verschwinden der Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ dargestellt wird. Die Gesammtheit dieser Punkte bildet also höchstens eine $(r - l - 1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.*

Es folgt aus den vorangehenden Entwicklungen keineswegs, dass jede Transformation, für welche die Gl.

$$\psi_1(\eta) = \psi_2(\eta) = \cdots = \psi_{r-1}(\eta) = 0$$

erfüllt werden, die Haupttransformationen einer zweigliedrigen Untergruppe sind; in der That genügen in vielen Gruppen die Coordinaten der bezeichneten Transformationen noch weiteren Gleichungen, und ihre Gesammtheit bildet also eine Mannigfaltigkeit von weniger als $r - l - 1$ Dimensionen.

Als Corollar zu dem vorangehenden Satze möge der folgende erwähnt werden:

*Gehört eine Transformation, welche das Hauptelement einer zweigliedrigen Untergruppe ist, noch weiteren zweigliedrigen Untergruppen an, so sind deren Transformationen entweder mit einander vertauschbar, oder die gegebene Transformation ist auch für die weiteren Untergruppen das Hauptelement.*

Dieser Satz kann uns dazu führen, die am Schlusse von § 3 aufgestellte Behauptung zu beweisen; wir werden aber dem Satze noch bei einer andern Betrachtung begegnen und dann wird sich die weitere Folgerung unmittelbar anschliessen.

Dieselbe Entwicklung, welche von der Formel (12a) zu (14) geführt hat, liefert bei leichter Aenderung der Buchstaben den folgenden Satz:

*Die sämmtlichen zweigliedrigen Untergruppen, deren Transformationen nicht mit einander vertauschbar sind, bilden sich ab als Tangenten an ein $(r - l - 1)$-dimensionales Gebilde und dieses wird durch das Verschwinden sämmtlicher Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{r-2}$ bestimmt.*

Ich hebe hierbei aber hervor, dass, selbst in dem Falle, wo alle Punkte des genannten Gebildes Haupttransformationen von zweigliedrigen Untergruppen abbilden, nicht immer die sämmtlichen Tangenten zweigliedrigen Untergruppen entsprechen. Mit Ausnahme der Kegel-

schnittsgruppe (s. u. § 8 am Ende) dürfte keine weitere Gruppe existiren, in welcher sämmtliche Tangenten an das Gebilde

$$\psi_1 = \cdots = \psi_{r-1} = 0$$

zweigliedrige Untergruppen abbilden.

## § 6.

### Beispiele zu den vorstehenden Entwicklungen.

Als Beispiele zu den Resultaten, welche uns durch die vorangehenden Paragraphen geliefert sind, und zur Vorbereitung auf die im zweiten Theile durchzuführenden Untersuchungen wollen wir zwei allbekannte Classen von einfachen Gruppen etwas näher betrachten. Hierbei bezeichnen wir mit Herrn Lie eine Gruppe als einfach, wenn sie keine invariante Untergruppe besitzt.

Wir untersuchen zunächst diejenige Gruppe, welche die allgemeinste projective Umgestaltung eines $l$-dimensionalen Raumes liefert. Bei passender Wahl der Coordinaten $x_1 \ldots x_l$ gelangt bei der allgemeinsten unendlich kleinen Umgestaltung der Punkt $(x_\varkappa)$ nach $(x_\varkappa + \delta x_\varkappa)$, wofern bei ganz beliebig gewählten unendlich kleinen Grössen $\alpha_{0\varkappa}$, $\alpha_{\varkappa 0}$, $\alpha_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1 \cdots l)$ die Gleichung besteht:

$$x_\varkappa + \delta x_\varkappa = \frac{x_\varkappa + \sum^\lambda \alpha_{\varkappa\lambda} x_\lambda + \alpha_{\varkappa 0}}{1 + \sum^\lambda \alpha_{0\lambda} x_\lambda}.$$

Demnach ist:

$$\delta x_\varkappa = \alpha_{\varkappa 0} + \sum^\lambda \alpha_{\varkappa\lambda} x_\lambda - \sum^\lambda \alpha_{0\lambda} x_\varkappa x_\lambda.$$

Indem man diejenigen Transformationen zu Grunde legt, für welche alle $\alpha_{\varrho\sigma}$ bis auf eines verschwindet, und indem man das nichtverschwindende gleich $\delta t$ setzt, erhält man $l(l+2)$ infinitesimale Transformationen $X_{\varkappa 0}$, $X_{0\varkappa}$, $X_{\iota\varkappa}$, welche sich in folgender Weise darstellen lassen:

$$\text{(a)} \qquad X_{\varkappa 0} = \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}, \quad X_{0\varkappa} = -\sum^\nu x_\varkappa x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \quad X_{\iota\varkappa} = \frac{\partial f}{\partial x_\iota} x_\varkappa.$$

Wenn weder $\iota = \mu$, noch $\varkappa = \lambda$ ist, so ist $(X_{\iota\varkappa} X_{\lambda\mu}) = 0$. Dagegen ist im übrigen:

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} (X_{\iota\varkappa} X_{\varkappa\lambda}) &= -X_{\iota\lambda} + \varepsilon_{\iota\lambda} X_{\varkappa\varkappa}, \\ (X_{\varkappa 0} X_{0\lambda}) &= -X_{\varkappa\lambda} - \varepsilon_{\varkappa\lambda} \sum X_{\mu\mu}, \\ (X_{0\varkappa} X_{\varkappa\lambda}) &= -X_{0\lambda}, \quad (X_{\iota\varkappa} X_{\varkappa 0}) = -X_{\iota 0}, \end{aligned}$$

wo $\varepsilon_{\varkappa\lambda} = 1$ oder $0$ ist, jenachdem $\varkappa$ und $\lambda$ gleich oder ungleich sind.

Um zu zeigen, dass diese Gruppe einfach ist, gehen wir von einer beliebigen inf. Transformation $\sum \eta_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma} f$ aus. Wenn hier nicht alle $\eta_{\varrho 1}$ verschwinden, verbinden wir sie für $\nu = 0, 1 \cdots l$ mit allen $X_{1\nu}$ durch die Operation $\left(\sum \eta_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma}, X_{1\nu}\right)$; dann gelangt man mindestens zu einigen unter den Transformationen

$$X_{10} \cdots X_{l0}, \quad 2X_{11} + X_{22} + \cdots + X_{ll}, \quad X_{12} \cdots X_{1l}.$$

Eine beliebige unter diesen mit allen $l(l+2)$ zu Grunde gelegten inf. Transformationen führt nothwendig auf weitere, und die Wiederholung der Operation für diese auf alle inf. Transformationen. Die Gruppe hat also keine invariante Untergruppe.

Wir wollen einige Eigenschaften dieser Gruppe anführen und zunächst diejenigen Functionen angeben, welche durch alle Transformationen

$$\mathsf{H}_{\lambda\mu} f = \sum_{\iota,\varkappa,\varrho,\sigma} c_{\iota\varkappa,\lambda\mu,\varrho\sigma}\, \eta_{\varrho\sigma} \frac{\partial f}{\partial \eta_{\iota\varkappa}}$$

ungeändert bleiben, welche also nach einem Lie'schen Ausdrucke zu dieser Transformationsgruppe gehören. Diese lassen sich durch Einführung einer unbestimmten Grösse $s$ in folgender Weise darstellen:

$$\text{(c)} \quad D(s) = \begin{vmatrix} -s + \eta_{11} + \cdots + \eta_{ll} & \eta_{10} & \eta_{20} & \cdots & \eta_{l0} \\ \eta_{01} & s + \eta_{11} & \eta_{21} & \cdots & \eta_{l1} \\ \eta_{02} & \eta_{12} & s + \eta_{22} & \cdots & \eta_{l2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_{0l} & \eta_{1l} & \eta_{2l} & \cdots & s + \eta_{ll} \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante ist der Coefficient von $s^{l+1}$ gleich $-1$, der von $s^l$ gleich 0, und die Coefficienten der Potenzen $s^{l-1}, s^{l-2} \cdots s, s^0$ sind die gesuchten Functionen.

Da die Transformationen im Wesentlichen gleichartig sind, genügt es zu zeigen, dass die Function $D(s)$ durch irgend eine, etwa $\mathsf{H}_{12} f$, nicht geändert wird. Für diese Transformation hat man aber, wofern $\varrho$ von 1 verschieden ist, zu ersetzen $d\eta_{\varrho 2}$ durch $dt \cdot \eta_{\varrho 1}$, und wenn $\sigma$ von 2 verschieden ist, $d\eta_{1\sigma}$ durch $-dt\, \eta_{2\sigma}$; für $d\eta_{12}$ hat man aber beide Aenderungen vorzunehmen, welche sich sowohl bei der Annahme $\varrho = 1$, als für $\sigma = 2$ ergeben. Demnach besteht die durch die Transformation $\mathsf{H}_{12} f$ hervorgerufene Aenderung von $D(s)$, wofern dieselbe durch $dt$ dividirt wird, in der Summe:

$$\begin{vmatrix} -z+\eta_{11}+\cdots+\eta_{11} & \eta_{10} & -\eta_{10}\cdots & \eta_{10} \\ \eta_{01} & \eta_{11}+z & -\eta_{11}\cdots & \eta_{11} \\ \eta_{02} & \eta_{12} & -\eta_{12}\cdots & \eta_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\cdots & \vdots \\ \eta_{0l} & \eta_{1l} & -\eta_{1l}\cdots & z+\eta_{1l} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -z+\eta_{11}+\cdots+\eta_{11} & \eta_{10} & \eta_{20} & \cdots & \eta_{l0} \\ \eta_{02} & \eta_{12} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{l2} \\ \eta_{02} & \eta_{12} & z+\eta_{22} & \cdots & \eta_{l2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_{0l} & \eta_{1l} & \eta_{2l} & \cdots & z+\eta_{ll} \end{vmatrix},$$

von denen die erste dadurch erhalten wird, dass man die dritte Verticalreihe von $D(z)$ durch $-\eta_{10}, \ldots -\eta_{l0}$ ersetzt, und die zweite dadurch, dass man die zweite Horizontalreihe durch $\eta_{02} \ldots \eta_{l2}$ ersetzt. Man übersieht aber sofort, dass diese Summe verschwindet.

Ganz ähnlich lassen sich diejenigen Functionen darstellen, welche durch die $l(l+2)$ inf. Transformationen

$$\sum_{\varrho,\sigma,\iota,\varkappa} \eta_{\varrho\sigma}\, c_{\varrho\sigma,\alpha\beta,\iota\varkappa} \frac{\partial f}{\partial \eta_{\iota\varkappa}}$$

ungeändert bleiben. Diese werden bei beliebigem $z$, wenn man noch $\eta_{11}+\eta_{22}+\cdots+\eta_{ll}=\sigma$ setzt, durch die Determinante angegeben:

$$\text{(d)}\quad E(z) = \begin{vmatrix} -z+\frac{\sigma}{l+1} & \eta_{01} & \eta_{02}\cdots & \eta_{0l} \\ \eta_{10} & z+\eta_{11}-\frac{\sigma}{l+1} & \eta_{12}\cdots & \eta_{1l} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \cdots & \vdots \\ \eta_{l0} & \eta_{l1} & \cdots z+\eta_{ll}-\frac{\sigma}{l+1} & \end{vmatrix}$$

$$= -z^{l+1} + z^{l-1}P_1 + P_2 \cdot z^{l-2} + \cdots + P_{l-1}\cdot z + P_l.$$

Es wird nicht nöthig sein, den Beweis durchzuführen. Ebenso möge es gestattet sein, die folgenden Sätze ohne Beweis anzuführen.

Genügt das System $(\eta_{01}, \eta_{02} \ldots \eta_{ll})$ keiner der $l$ Gleichungen

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0 \cdots P_l = 0,$$

so gehört die Transformation $\sum \eta_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma} f$ genau $l(l+1)$ zweigliedrigen Untergruppen ohne vertauschbare Elemente an. Die Hauptelemente aller auf diese Weise erhaltenen zweigliedrigen Untergruppen bilden nur eine $(2l-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Diese wird analytisch dargestellt durch das Verschwinden aller Unter-

determinanten zweiten Grades in der Determinante $E(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$. Diese Mannigfaltigkeit gehört auch allen $l$ Gebilden $P_1 = P_2 = \cdots = P_l = 0$ an.

Wenn ein Punkt Hauptpunkt einer zweigliedrigen Untergruppe ist und letztere nicht dem Gebilde $P_1 = \cdots = P_l = 0$ angehört, so ist der Punkt auch Hauptpunkt für eine $(l^2-1)$-gliedrige Schaar von zweigliedrigen Untergruppen, und alle diese bilden eine $(l^2+1)$-gliedrige Untergruppe.

Der Gruppe gehören allgemeine projective Gruppen des Ranges $1, 2 \ldots l-1$ an. Die allgemeinen projectiven Gruppen des Ranges $l-1$ gehören sämmtlich dem Gebilde $P_l = 0$ an; die des Ranges $l-2$ liegen auf dem Gebilde $P_l = P_{l-1} = 0$, u. s. w. Endlich gehören die Kegelschnittsgruppen (allgemeine projective Gruppen für $l = 1$) den Gebilden $P_l = P_{l-1} = \cdots = P_2 = 0$ an.

Aus jeder allgemeinen projectiven Gruppe des Ranges $l'$ lässt sich, wie man leicht übersieht und wie im zweiten Theile noch besonders hervorgehoben werden soll, eine zusammengesetzte Gruppe desselben Ranges $l'$ bilden, deren Gliederzahl $l'^2 + 3l' + 1$ beträgt. Für $l' < l$ sind auch jedesmal solche als Untergruppen in der vorgelegten Gruppe enthalten, und zwar füllen die betreffenden Gruppen des Ranges $l-1$ das Gebilde $P_l=0$ an, die des Ranges $l-2$ das Gebilde $P_l = P_{l-1} = 0$ u. s. w. Somit gehen durch jeden Punkt von $P_l = 0$ ebene Mannigfaltigkeiten von $(l-1)(l+2)$ Dimensionen; der Schnitt von $P_l = 0$ und $P_{l-1} = 0$ enthält $(l-2)(l+1)$-dimensionale, der Schnitt der $\lambda$ Gebilde $P_l = 0$, $P_{l-1} = 0 \ldots P_{l-\lambda+1} = 0$ ebenso $(l-\lambda)(l-\lambda+3)$-dimensionale Ebenen.

Durch jeden Punkt des Bildraumes geht ein $(l-1)$-dimensionales ebenes Gebilde, dessen Punkte mit einander vertauschbare Transformationen abbilden. Durch $\frac{l(l+1)}{2}$ Punkte einer solchen Ebene gehen Kegelschnittsgruppen, welche Untergruppen der vorgelegten Gruppe sind.

Eine zweite Classe von einfachen Gruppen wird durch diejenigen continuirlichen projectiven Transformationen bestimmt, welche in einem Raume von mehr als drei Dimensionen ein eigentliches Gebilde zweiter Ordnung in sich verschieben, wobei als „eigentliches" Gebilde im Gegensatz zum Kegelgebilde ein solches verstanden wird, dessen Determinante nicht verschwindet. Diese Gruppe ist in derselben Weise gebildet, wie diejenige Gruppe eines $(m+1)$-dimensionalen Raumes, wenn alle Variabeln durch lineare ganze Transformationen geändert werden und eine eigentliche Form zweiten Grades ungeändert bleibt. Setzt man zwischen den $m+1$ Variabeln $x_1 \ldots x_{m+1}$ die Beziehung fest:

$$x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1, \tag{e}$$

so sollen für die Gruppe die $\frac{m(m+1)}{2}$ inf. Transformationen

$$(e') \qquad X_{\iota\varkappa} f = x_\iota \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} - x_\varkappa \frac{\partial f}{\partial x_\iota}$$

zu Grunde gelegt werden. Hieraus folgt

$$(f) \qquad (X_{\iota\varkappa} X_{\iota\lambda}) = X_{\varkappa\lambda}, \quad (X_{\iota\varkappa} X_{\lambda\mu}) = 0,$$

wenn $\iota, \varkappa, \lambda, \mu$ sämmtlich ungleich sind. Dass die so gebildeten Gruppen für $m > 3$ einfach sind, hat Herr Lie im zehnten Bande seines Archivs S. 412 bewiesen.

Die im Anfang von § 2 aufgestellten adjungirten linearen Gruppen werden für diese Gruppe identisch. Die Invarianten ergeben sich aus folgender Determinante, in welcher $\eta_{\iota\varkappa} + \eta_{\varkappa\iota} = 0$ zu nehmen ist:

$$(g) \qquad \begin{vmatrix} z & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1,m+1} \\ \eta_{21} & z & & \eta_{2,m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \eta_{m+1,1} & \eta_{m+1,2} & & z \end{vmatrix} = z^{m+1} + P_1 z^{m-1} + P_3 z^{m-3} + \cdots$$

Daher ist $l = \frac{m+1}{2}$ oder $= \frac{m}{2}$, jenachdem $m$ ungerade oder gerade ist. Ist $m$ gerade, so sind die $2l^2$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung (7): $\pm\omega_\varkappa$, $\pm\omega_\varkappa \pm\omega_\lambda$; für ein ungerades $m$ nehme man $l$ Grössen $\pi_1 \ldots \pi_l$ und bilde daraus die $2l(l-1)$ Wurzeln $\pm\pi_\varkappa \pm\pi_\lambda$. Die ersteren $2l$ Wurzeln $\pm\omega_\varkappa$ für ein gerades $m$ gehören einer $(4l-3)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit an, welche, durch das Verschwinden aller Ausdrücke $(\iota\varkappa\lambda\mu)$ und von $P_1 = \Sigma\eta_{\iota\varkappa}^2$ bestimmt wird.*) Dieses $(4l-3)$-fach ausgedehnte Gebilde hat ein $(4l-5)$-dimensionales Doppelgebilde, welches durch die Gleichungen

$$\sum_\varrho \eta_{\iota\varrho}\, \eta_{\varkappa\varrho} = 0$$

bei beliebigen Werthen von $\iota$ und $\varkappa$ gegeben ist. Dieses Doppelgebilde liefert die zu den Wurzeln $\pm\omega_\iota \pm\omega_\varkappa$ gehörigen Hauptpunkte.

Für ein gerades $m$ enthält die vorgelegte Gruppe solche Untergruppen, welche für $m' = 1 \cdots m-1$ in entsprechender Weise gebildet sind. Setzt man $m' = m-1$, so haben die entsprechenden Untergruppen denselben Rang $l = \frac{m}{2}$ und erfüllen dieselbe Mannigfaltigkeit, wie die gegebene Gruppe, so dass jede Transformation der gegebenen Gruppe einer solchen Untergruppe angehört. Die entsprechend gebildeten Untergruppen des Ranges $l-1$, deren Gliederzahl $(l-1)(2l-1)$

*) Sollen alle $(\iota\varkappa\lambda\mu) = \eta_{\iota\lambda}\eta_{\lambda\mu} + \eta_{\iota\lambda}\eta_{\mu\varkappa} + \eta_{\iota\mu}\eta_{\varkappa\lambda}$ verschwinden, so ist bekanntlich nothwendig und hinreichend, dass für $\eta_{12} \neq 0$ alle Ausdrücke $(12\lambda\mu)$ verschwinden, was $(l-1)(2l-1)$ Gleichungen liefert.

oder $(l-1)(2l-3)$ betrügt, gehören einer $(2l^2+l-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit an u. s. w. In jeder $(l-1)$-dimensionalen Ebene des Bildraumes, welche durch einen beliebigen Punkt geht und lauter mit einander vertauschbare Transformationen abbildet, liegen nur einzelne Punkte, für welche die entsprechende infinitesimale Transformation einer Kegelschnittsgruppe angehört. Auch allgemeine projective Gruppen, deren Rang $l'$ kleiner als $l$ ist, gehören der gegebenen Gruppe an.

Diese Resultate ändern sich sehr wenig für ein ungerades $m$. Jede allgemeine Transformation gehört $2l(l-1)$ zweigliedrigen Untergruppen ohne vertauschbare Elemente an, und ihre Hauptpunkte füllen eine $(4l-7)$-dimensionale Mannigfaltigkeit an, für welche alle Gleichungen $(\iota\varkappa\lambda\mu)=0$ und $\sum_\varrho \eta_{\iota\varrho}\eta_{\varkappa\varrho}=0$ bestehen müssen. Damit eine Transformation $\sum \eta_{\iota\varkappa} X_{\iota\varkappa} f$ einer $r$-gliedrigen Untergruppe angehört, für welche $p=r$ ist, müssen die Coefficienten $\eta_{\iota\varkappa}$ gewissen Bedingungen genügen, die im einzelnen aufzuführen hier wohl nicht der Ort sein dürfte.

## § 7.

### Die charakteristische Gleichung hat lauter ungleiche Wurzeln.

Wir machen eine Annahme, welche auf den ersten Blick recht allgemein scheinen könnte, welche aber wegen der zwischen den $c$ bestehenden Bedingungen, wie aus den Entwicklungen des § 4 folgt, ganz speciellen Charakter hat. Wir setzen nämlich voraus, die Gleichung (7) habe für ein bestimmtes Werthsystem $\eta_1 \ldots \eta_r$ keine zwei gleiche Wurzeln. Wie schon bemerkt, ist eine Wurzel gleich Null; die andern $\omega_1 \ldots \omega_{r-1}$ sollen also unter einander und von Null verschieden sein. Zu jeder Wurzel $\omega_\nu$ gehört ein einziges System von Coefficienten $\xi_1^{(\nu)} \ldots \xi_r^{(\nu)}$ und die $r-1$ hierdurch bestimmten infinitesimalen Transformationen $\sum_\iota \xi_\iota^{(\nu)} X_\iota f$ sind unter einander und von der gegebenen Transformation $\sum \eta_\iota X_\iota f$ unabhängig. Wir können also diese $r$ infinitesimalen Transformationen zur Bestimmung der Gruppe benutzen. Um sofort diejenige Form zu erhalten, welche für die weitere Untersuchung am geeignetsten ist, bezeichnen wir die gegebene Transformation als $X_{r-1}f$, die anderen als $X_1 \ldots X_{r-2}$, $X_r$, so dass die Gleichungen bestehen:

$$(15)\quad (X_{r-1}X_1)=\omega_1 X_1 f, \ldots (X_{r-1}X_{r-2})=\omega_{r-2}X_{r-2}f, (X_{r-1}X_r)=\omega_r X_r f.$$

Indem wir die Jacobi'sche Relation für $r-1, \varkappa, \lambda$ bilden, folgt:

$$(16)\qquad (\omega_\varkappa+\omega_\lambda-\omega_\mu)\, c_{\varkappa\lambda\mu}=0,$$

worin auch für $v = r - 1$ die Gleichung enthalten ist:

$$(\omega_x + \omega_\lambda)\, c_{x\lambda r-1} = 0. \tag{16a}$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass wenn nicht zwischen den Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_{r-2}, \omega_r$ der Gleichung (7) bestimmte Relationen bestehen, die $r-1$ infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_{r-2} f, X_r f$ eine Gruppe bestimmen, in welcher zwei beliebige Transformationen mit einander vertauschbar sind.

Zu der eben gemachten Voraussetzung fügen wir jetzt eine weitere hinzu, nämlich die, dass von den $\frac{r(r-1)}{2}$ Transformationen $\sum_\varrho c_{x\lambda\varrho} X_\varrho f$ $r$ von einander unabhängig sind, dass also $p = r$ ist. In diesem Falle muss wegen (16a) mindestens zu einer Wurzel die entgegengesetzt gleiche vorkommen. Es sei demnach $\omega_{r-2} + \omega_r = 0$ und $c_{r,r-2,r-1}$ von Null verschieden, so dass gesetzt werden kann:

$$(X_{r-2} X_r) = X_{r-1} f.$$

Nun wenden wir die Jacobi'sche Relation auf die Nummern $r, r-2, x$ an, wo $x$ eine der Zahlen $1 \ldots r-3$ ist, und erhalten:

$$\omega_x X_x f = \sum_\varrho \left\{ c_{r-2,x\varrho} (X_\varrho X_r) - c_{rx\varrho} (X_\varrho X_{r-2}) \right\}. \tag{17}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nicht verschwinden kann, so folgt aus dieser Gleichung in Verbindung mit (16), dass, wenn $\omega_x$ eine Wurzel ist, entweder $\omega_x + \omega_r$ oder $\omega_x - \omega_r$ eine neue Wurzel ist oder dass man aus $\omega_x$ sowohl durch Addition als Subtraction von $\omega_r$ eine neue Wurzel erhält.

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, dürfen wir $\omega_r = 2$ setzen. Ist dann $\omega_x$ eine beliebige Wurzel, so ist auch mindestens eine der beiden Grössen $\omega_x + 2$ und $\omega_x - 2$ unter den Wurzeln enthalten. Wir gehen von einer beliebigen Wurzel $\omega_x$ aus und suchen alle diejenigen Wurzeln, zu denen man durch wiederholte Addition und Subtraction von 2 gelangt. Die Zahl derselben sei $m$, und der Einfachheit wegen mögen sie als $\omega_1 \ldots \omega_m$ bezeichnet werden. Da sie sich nur um Vielfache von 2 unterscheiden, so kann man sie nach der Grösse des reellen Theiles ordnen und setzen:

$$\omega_2 = \omega_1 - 2,\ \omega_3 = \omega_1 - 4,\ \omega_4 = \omega_1 - 6 \cdots \omega_m = \omega_1 - (m-1)2.$$

Jetzt liefert die Gleichung (17) das Resultat:

$$\begin{cases} \omega_1 = c_{r-2,1,2}\, c_{2r1}, \\ \omega_2 = c_{r-2,2,3}\, c_{3r2} - c_{r21}\, c_{1,r-2,2}, \\ \omega_3 = c_{r-2,3,4}\, c_{4r3} - c_{r32}\, c_{2,r-2,3}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_m = - c_{r\,m\,m-1}\, c_{m-1,r-2,m}, \end{cases} \tag{17a}$$

woraus sich durch Addition ergiebt:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_m = 0,$$

so dass $\omega_1 = m - 1$ ist. Ist hier $m$ eine ungerade Zahl, so muss die mittlere Wurzel gleich Null sein. Wenn aber $m$ eine gerade Zahl ist, so sind die beiden mittleren Wurzeln gleich $\pm 1$. Unsere Voraussetzung, dass alle Wurzeln ungleich sein sollen, verlangt also, dass $m = r - 3$ und dass dies eine gerade Zahl ist. Zugleich ergiebt sich:

$$\omega_1 = r - 4,\ \omega_2 = r - 6,\ \omega_3 = r - 8 \cdots \omega_{r-3} = -r + 4.$$

Aus (17) schliesst man sofort, dass $(X_\nu X_{r-2-\nu}) = 0$ ist für $\nu = 1 \cdots r - 3$, und dann folgt leicht, dass $(X_\alpha X_\beta) = 0$ ist, wenn $\alpha$ und $\beta$ irgend zwei der Zahlen $1 \ldots r - 3$ sind. Die weiteren Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ lassen sich dadurch vereinfachen, dass man die $X_1 f \ldots X_{r-3} f$ mit passenden Constanten multiplicirt. Dadurch findet man aus (17a):

$$(X_r X_\alpha) = (r - \alpha - 3) X_{\alpha+1} f \quad \text{für} \quad \alpha = 1 \ldots r - 4,$$
$$(X_r X_{r-3}) = 0,\ (x_{r-2} X_\alpha) - (\alpha - 1) X_{\alpha-1} f.$$

Dadurch sind wir zu dem Resultate gelangt, dass die gemachten Voraussetzungen die Zusammensetzung der Gruppe vollständig bestimmen, sobald noch $r$ gegeben ist, und dass dies eine ungerade Zahl sein muss. Um dies Resultat recht bequem aussprechen zu können, berücksichtigen wir, dass gleiche Wurzeln der Gleichung (7) entweder nur zu einer einzigen zweigliedrigen Untergruppe oder zu einer Schaar von solchen führen. Somit sprechen wir das Ergebniss jetzt in folgender Weise aus:

*In einer r-gliedrigen Gruppe, welche ihre eigne Hauptuntergruppe ist, soll eine gegebene eingliedrige Untergruppe gerade $r - 1$ zweigliedrigen Untergruppen angehören und unter diesen soll keine mit vertauschbaren Transformationen vorkommen. Dann muss r eine ungerade Zahl sein. Die Gruppe enthält eine (und zwar eine einzige) invariante Untergruppe, welche aus $r - 3$ Gliedern gebildet ist; alle Transformationen, welche dieser Untergruppe angehören, sind vertauschbar. Die Zusammensetzung der Gruppe ist durch die gemachten Voraussetzungen vollständig bestimmt; bezeichnet man die gegebene eingliedrige Untergruppe mit $X_{r-1} f$, so kann man die übrigen $X_1, X_2 \ldots X_{r-2}, X_r$ so wählen, dass ist:*

$$(X_{r-2} X_r) = X_{r-1} f,\ (X_{r-1} X_r) = 2 X_r f,\ (X_{r-1} X_{r-2}) = -2 X_{r-2} f,$$
$$(X_{r-1} X_\alpha) = (r - 2(\alpha + 1)) X_\alpha f,$$
$$(X_r X_\alpha) = (r - \alpha - 3) X_{\alpha+1} f,\ (X_{r-2} X_\alpha) = -(\alpha - 1) X_{\alpha-1} f,$$
$$(X_\alpha X_\beta) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha, \beta = 1 \ldots r - 3.$$

*Bilden wir nach derselben Vorschrift eine Gruppe für ein gerades r, so bestimmen $X_{r-1} f$ und $X_{\frac{r-2}{2}} f$ eine zweigliedrige Gruppe mit vertauschbaren Transformationen. Aber jedesmal ist $l = 1$ und alle Func-*

*tionen $\psi, \eta$) verschwinden für ein ungerades $\nu$ und bilden für ein gerades $\nu$ bis auf einen constanten Factor die Potenz von $\eta_{r-1}^2 - \eta_r \eta_{r-2}$.*

Eine in dieser Weise gebildete Gruppe existirt bei beliebigem $r$ für zwei Variabele. Dieselbe ist von Herrn Lie in seiner Aufzählung*) unter B) an der vorletzten Stelle aufgeführt und hat bei seiner Bezeichnung die Form:

$$q,\ xq \ldots x^{r-4}q,\ p,\ 2xp + (r-4)yq,\ x^2p + (r-4)xyq.$$

## § 8.

## Die charakteristische Gleichung hat gleiche nicht verschwindende Wurzeln.

Die im vorigen Paragraphen gegebene Bestimmung von Gruppen gründete sich wesentlich auf den Umstand, dass alle Wurzeln der Gleichung (7) als ungleich vorausgesetzt wurden. Wir wollen jetzt untersuchen, ob die Einfachheit des Ergebnisses nicht auch bei mehrfachen Wurzeln bestehen bleibt.

Wir bezeichnen mit $Xf$ (ohne Marke) eine beliebige Transformation. Für diese stellen wir die Gleichung (7) auf und bestimmen die Wurzeln derselben. Hat diese Gleichung gleiche Wurzeln und ist $\omega_\alpha$ eine solche, so soll $\omega_\alpha$ dann, und nur dann als eine $(\lambda+1)$-fache Wurzel gerechnet werden, wenn sich $\lambda + 1$ von einander und von $Xf$ unabhängige infinitesimale Transformationen $X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_\lambda}$ bestimmen lassen, für welche die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
&(X X_{\alpha_0}) = \omega_\alpha X_{\alpha_0},\\
&(X X_{\alpha_1}) = \omega_\alpha X_{\alpha_1} + e_{\alpha_1\alpha_0} X_{\alpha_0},\\
&(X X_{\alpha_2}) = \omega_\alpha X_{\alpha_2} + e_{\alpha_2\alpha_1} X_{\alpha_1} + e_{\alpha_2\alpha_0} X_{\alpha_0},\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(X X_{\alpha_\lambda}) = \omega_\alpha X_{\alpha_\lambda} + e_{\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} X_{\alpha_{\lambda-1}} + \cdots + e_{\alpha_\lambda\alpha_1} X_{\alpha_1} + e_{\alpha_\lambda\alpha_0} X_{\alpha_0},
\end{aligned} \tag{18}$$

und wenn sich dieses System nicht in mehrere Systeme von einer kleineren Zahl $\lambda$ und von gleicher Zusammensetzung zerlegen lässt. Die Willkür, welche bei der Wahl $X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_\varkappa}$ hier besteht, kann benutzt werden, um alle Coefficienten $e_{\alpha_\varkappa\alpha_\iota}$ für $\varkappa > \iota + 1$ zum Verschwinden zu bringen. Man kann demnach folgende Form zu Grunde legen:

$$\begin{aligned}
&(X X_{\alpha_0}) = \omega_\alpha X_{\alpha_0},\\
&(X X_{\alpha_1}) = \omega_\alpha X_{\alpha_1} + e_{\alpha_1\alpha_0} X_{\alpha_0},\\
&(X X_{\alpha_2}) = \omega_\alpha X_{\alpha_2} + e_{\alpha_2\alpha_1} X_{\alpha_1},\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(X X_{\alpha_\lambda}) = \omega_\alpha X_{\alpha_\lambda} + e_{\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} X_{\alpha_{\lambda-1}},
\end{aligned} \tag{18a}$$

*) Math. Annalen XVI, S. 524.

wo keiner der Coefficienten verschwinden darf. Indem wir die infinitesimale Transformation $Xf$ zu Grunde legen, wollen wir von den infinitesimalen Transformationen $X_{\alpha_0} \ldots X_{\alpha_\lambda}$ sagen, sie *gehörten* zur Wurzel $\omega_\alpha$.

Nun seien $\omega_\alpha$, $\omega_\beta$, $\omega_\gamma$ ... die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, und jede Wurzel führe zu einer Reihe von Transformationen $X_\varkappa$ (resp. zu einer einzigen solchen Transformation). Hiermit wird also keineswegs vorausgesetzt, dass $\omega_\alpha$ und $\omega_\beta$ ungleich sind.

Wir bilden jetzt die Jacobi'sche Relation für $X$, $X_{\alpha_0}$, $X_{\beta_0}$, so folgt:

$$\sum_\varrho c_{\alpha_0\beta_0\varrho}\,[(\omega_\alpha+\omega_\beta)X_\varrho f-(XX_\varrho)]=0.$$

Wir entwickeln diese Gleichung vollständig nach denjenigen $X_\varrho$, welche zu einer beliebigen Wurzel $\omega_\gamma$ gehören. Dann erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}(19)\qquad &(\omega_\alpha+\omega_\beta)(c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}X_{\gamma_0}+c_{\alpha_0\beta_0\gamma_1}X_{\gamma_1}+\cdots+c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu}X_{\gamma_\nu})\\ &=c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}\omega_\gamma X_{\gamma_0}+c_{\alpha_0\beta_0\gamma_1}(\omega_\gamma X_{\gamma_1}+c_{\gamma_1\gamma_0}X_{\gamma_0})\\ &+\cdots+c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu}(\omega_\gamma X_{\gamma_\nu}+c_{\gamma_\nu\gamma_{\nu-1}}X_{\gamma_{\nu-1}}).\end{aligned}$$

Wenn hier nicht $\omega_\alpha+\omega_\beta=\omega_\gamma$ ist, so muss, damit $X_{\gamma_\nu}f$ beiderseits denselben Coefficienten hat, $c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu}=0$ sein; jetzt muss, damit $X_{\gamma_{\nu-1}}f$ beiderseits denselben Coefficienten hat, $c_{\alpha_0\beta_0\gamma_{\nu-1}}=0$ sein. In gleicher Weise erkennt man, dass alle Coefficienten $c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu}\ldots c_{\alpha_0\beta_0\gamma_1}$, $c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}$ gleich Null sind, wenn nicht $\omega_\alpha+\omega_\beta=\omega_\gamma$ ist. Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so vergleiche man beiderseits die Coefficienten von $X_{\gamma_{\nu-1}}\ldots X_{\gamma_1}X_{\gamma_0}$ und erhält:

$$c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu}c_{\gamma_\nu\gamma_{\nu-1}}=0,\quad c_{\alpha_0\beta_0\gamma_{\nu-1}}c_{\gamma_{\nu-1}\gamma_{\nu-2}}=0\cdots c_{\alpha_0\beta_0\gamma_1}c_{\gamma_1\gamma_0}=0,$$

woraus folgt:

$$c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu}=c_{\alpha_0\beta_0\gamma_{\nu-1}}=\cdots=c_{\alpha_0\beta_0\gamma_1}=0$$

oder

$$(20)\qquad (X_{\alpha_0}X_{\beta_0})=\sum c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}X_{\gamma_0}f,$$

$$(\omega_\alpha+\omega_\beta=\omega_\gamma)$$

wo die Summation sich auf die erste Transformation $X_{\gamma_0}$ bezieht, welche zu einer Wurzel $\omega_\gamma=\omega_\alpha+\omega_\beta$ gehört.

Die Jacobi'sche Relation für $X$, $X_{\alpha_0}$, $X_{\beta_1}$ führt zu einer Gleichung, welche sich von der Gleichung (19) nur dadurch unterscheidet, dass auf der rechten Seite noch hinzukommt:

$$c_{\beta_1\beta_0}c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}X_{\gamma_0}.$$

Daraus folgt, wie vorher, dass nur solche Coefficienten

$$c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0} \cdots c_{\alpha_0\beta_1\gamma_\nu}$$

von Null verschieden sein können, für welche $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\gamma$ ist und dass unter dieser Bedingung ist:

$$(20a) \qquad (X_{\alpha_0} X_{\beta_1}) = \sum (c_{\alpha_0\beta_1\gamma_1} X_{\gamma_1} + c_{\alpha_0\beta_1\gamma_0} X_{\gamma_0}),$$
$$(\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\gamma).$$

In derselben Weise kann man fortfahren. Unter der Bedingung $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\gamma$ lässt sich $(X_{\alpha_0} X_{\beta_\iota})$ durch $X_{\gamma_0}, X_{\gamma_1} \ldots X_{\gamma_\iota}$ und entsprechend $(X_{\alpha_\iota} X_{\beta_\varkappa})$ nur durch solche $X_{\gamma_\varrho}$ ausdrücken, wo $\varrho$ höchstens bis $\iota + \varkappa$ ansteigt.

Ganz entsprechend leitet man die Gleichungen her:

$$(X_{\alpha_0} X_{\alpha_1}) = \sum c_{\alpha_0\alpha_1\gamma_0} X_{\gamma_0} f, \; (X_{\alpha_0} X_{\alpha_2}) = \sum (c_{\alpha_0\alpha_2\gamma_0} X_{\gamma_0} + c_{\alpha_0\alpha_2\gamma_1} X_{\gamma_1}) f \ldots$$
$$(2\omega_\alpha = \omega_\gamma).$$

Diese Sätze reichen hin, um alle Gruppen zu finden, welche den beiden Bedingungen genügen:

a) es soll $p = r$ sein,

b) nicht jede Transformationen der Gruppe soll mit einer andern vertauschbar sein.

Indem wir von der Transformation $X_{r-1} f$ ausgehen, soll die Gleichung (7) nur eine einfache verschwindende Wurzel haben. Wir setzen:

$$(X_{r-1} X_{r-2}) = -2 X_{r-2} f, \; (X_{r-1} X_r) = 2 X_r f, \; (X_{r-2} X_r) = X_{r-1} f,$$

und haben dadurch vorausgesetzt, dass $X_{r-1} f$ im Ausdruck für ein $(X_\iota X_\varkappa)$ vorkommt, in welchem $X_\iota f$ und $X_\varkappa f$ gerade je als *erste* Transformationen zu den Wurzeln $\pm 2$ gehören. Die Berechtigung dieser Annahme werden wir am Schluss beweisen. Es ist vorläufig nicht ausgeschlossen, dass zu den Wurzeln $+2$ und $-2$ noch weitere Transformationen gehören; ebensowenig ist vorausgesetzt, dass $X_{r-1} f$ nicht noch in andern Ausdrücken $(X_\iota X_\varkappa)$ vorkommt. Die $X_\lambda f$ für $\lambda = 1 \ldots r-3$ gruppiren wir nach den zugehörigen Wurzeln $\omega_\alpha, \omega_\beta \ldots$.

Die Relation $(r, r-2, \alpha_0)$ liefert:

$$(21) \qquad \omega_\alpha X_{\alpha_0} f = \sum_\varrho [c_{r-2,\alpha_0,\varrho} (X_\varrho X_r) - c_{r\alpha_0\varrho} (X_\varrho X_{r-2})].$$

Soll $c_{r-2,\alpha_0\varrho}$ nicht verschwinden, so muss $\varrho = \beta_0$ und $\omega_\beta = \omega_\alpha - 2$ sein, und ebenso kann $c_{r\alpha_0\varrho}$ nur von Null verschieden sein, wenn

$\varrho = \gamma_0$ und $\omega_\gamma = \omega_\alpha + 2$ ist. Wenn also $\omega_\alpha$ irgend eine Wurzel ist, so muss auch mindestens eine der beiden Grössen $\omega_\alpha + 2$ oder $\omega_\alpha - 2$ eine Wurzel sein. Man kann also, wie im vorigen Paragraphen, die Wurzeln bestimmen, indem man die vorstehende Gleichung für alle $X_{\alpha_0}$ bildet, die als *erste* Transformationen zu denjenigen Wurzeln gehören, welche aus einer unter ihnen durch mehrmalige Addition und Subtraction von 2 erhalten werden. Da zudem die Wurzel Null ausgeschlossen ist, so sind nur verschiedene Gruppen

$$-2m-1, -2m+1, \cdots -1, +1, \cdots 2m-1, 2m+1$$

möglich.

Hieraus folgt, dass zu den Wurzeln $\pm 2$ keine weiteren Transformationen gehören, was auch auf mancherlei andere Weise erkannt werden kann.

Nun bilde man die Jacobi'sche Relation für $r, r-2, \alpha_\lambda$, wo $X_{\alpha_\lambda} f$ die *letzte* Transformation ist, welche zu der Wurzel $\omega_\alpha$ gehört. Dann erhält man:

$$\omega_\alpha = \sum_\varrho (c_{r-2,\,\alpha_\lambda\,\varrho}\, c_{\varrho r \alpha_\lambda} - c_{r\alpha_\lambda\,\varrho}\, c_{\varrho,\,r-2,\,\alpha_\lambda}).$$

Hier beachte man, dass $X_{\alpha_\lambda}$ nur im Ausdruck von $(X_{r-2}\, X_{\beta_\lambda})$ für $\omega_\beta - 2 = \omega_\alpha$ und im Ausdruck von $(X_r\, X_{\gamma_\lambda})$ für $\omega_\gamma + 2 = \omega_\alpha$ vorkommen kann. Also kann $\varrho$ in der vorstehenden Gleichung gleich einem $\beta_\lambda$ oder einem $\gamma_\lambda$ sein. Daraus ergiebt sich, dass zu allen derselben Reihe angehörigen Wurzeln $\omega_\varkappa$ dieselbe Zahl von Transformationen $X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_\lambda}$ gehört.

Daraus ergiebt sich der Satz:

*Um alle Wurzeln, welche bei den die beiden aufgestellten Forderungen befriedigenden Transformationsgruppen neben den Wurzeln $+2$ und $-2$ auftreten können, zu erhalten, wähle man zwei Zahlen $\lambda$ und $m$ so, dass $2(m+1)(\lambda+1) \leqq r-3$ ist, bilde die Wurzeln $\pm 1, \pm 3 \pm \cdots \pm (2m+1)$ und lasse jede dieser $2m+2$ Zahlen eine $\lambda+1$-fache Wurzel sein. Dann wähle man zwei neue Zahlen $\lambda'$ und $m'$, so dass $2(m'+1)(\lambda'+1) \leqq r-3-2(m+1)(\lambda+1)$ ist und lasse jede der Zahlen $\pm 1, \pm 3 \pm \cdots \pm (2m'+1)$ eine $\lambda'+1$-fache Wurzel sein. So fahre man fort, bis alle $r-3$ Nummern erschöpft sind.*

Beiläufig ergiebt sich hieraus der Satz:

*Wenn $r$ eine Paarzahl ist, so muss in jeder $r$-gliedrigen Gruppe, welche ihre eigne Hauptuntergruppe ist, jede Transformation einer zweigliedrigen Gruppe mit vertauschbaren Transformationen angehören;*

oder:

*Für ein gerades $r > 2$ hat eine $r$-gliedrige Gruppe, in welcher nicht jede Transformation mit einer andern vertauschbar ist, nothwendig eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe.*

Wie im vorigen Paragraphen, sieht man auch hier leicht, dass für $\iota, \varkappa = 1, 2 \cdots r-3$ nothwendig $(X_\iota X_\varkappa) = 0$ ist. Ebenso ist es unmittelbar klar, dass $(X_{r-2} X_\iota)$ und $(X_r X_\iota)$ sich für $\iota = 1 \cdots r-3$ durch die $r-3$ ersten Transformationen $X_1 \cdots X_{r-3}$ darstellen lassen. Es wird nicht nöthig sein, die Coefficienten selbst hinzuschreiben. Ich mache nur darauf aufmerksam, dass alle Functionen $\psi_r(\eta)$ sich rational durch $\eta_{r-1}^2 - \eta_r \eta_{r-2}$ ausdrücken lassen, und dass für

$$\eta_r \eta_{r-2} = \eta_{r-1}^2$$

alle Unterdeterminanten $r-1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ verschwinden. Somit folgt der Satz:

*Wenn eine $r$-gliedrige Gruppe den beiden Bedingungen genügt, dass $p = r$ ist und dass nicht durch jeden Punkt des Bildraumes eine Gerade geht, welche vertauschbare Transformationen darstellt, so muss $r$ eine ungerade Zahl sein. Die Gruppe hat eine $(r-3)$-gliedrige invariante Untergruppe und die Transformationen dieser Untergruppe sind sämmtlich mit einander vertauschbar. Genügen die Coefficienten einer Transformation $\sum \eta_\iota X_\iota f$ der Bedingung $\eta_r \eta_{r-2} = \eta_{r-1}^2$, so ist dieselbe mit anderen Transformationen vertauschbar.*

Dass die invariante Untergruppe hier in mehrere Gruppen zerfallen kann, von denen jede eine invariante Untergruppe ist, wird durch die Fassung des Satzes nicht ausgeschlossen.

Den Satz, dass jede Gruppe, deren Ordnungszahl grösser als drei ist, vertauschbare Transformationen enthält, hatte ich schon früher (Programm 1884) aufgestellt, ohne den Beweis mitzutheilen. Herr Engel hat dann (Leipziger Berichte 1886, S. 91) einen Beweis hierfür geliefert und dabei $r-3$ als Zahl der Dimensionen desjenigen Gebildes bestimmt, dessen Punkte einer zweigliedrigen Untergruppe vertauschbarer Transformationen angehören; wir erkennen hier, dass für $p = r$ diese Zahl $= r-2$ ist und dass nur die in diesem und dem vorangehenden Paragraphen angegegebenen Gruppen dieser Bedingung genügen. Uebrigens erkennt man mit Leichtigkeit, dass für $p < r$ entweder durch jeden Punkt des $(r-2)$-dimensionalen Bildraumes oder doch durch jeden Punkt einer $(r-1)$-dimensionalen Ebene eine gerade Linie vertauschbarer Transformationen hindurchgeht. Soll nämlich nicht durch jeden Punkt eine solche Gerade hindurchgehen, so muss $l = 1$ sein; also müssen sich alle $\psi_r(\eta)$ durch eine Function $P(\eta)$ ausdrücken lassen, und da die Gruppe eine invariante Untergruppe besitzt, so muss $P(\eta) = 0$ dieselbe darstellen, also linear sein; für die Untergruppe ist aber $l = 0$. Somit folgt:

*Ist die Ordnung $r$ einer Gruppe grösser als drei, so geht entweder durch jeden Punkt des $(r-1)$-dimensionalen Bildraumes oder durch*

*jeden Punkt eines $(r-2)$-dimensionalen Kegels zweiter Ordnung oder durch jeden Punkt einer $(r-2)$-dimensionalen Ebene eine gerade Linie, welche mit einander vertauschbare Transformationen abbildet.*

Es giebt überhaupt, wie ich früher schon bemerkt habe, nur drei Gruppen, in denen keine vertauschbare Transformationen vorkommen, eine ein-, eine zwei- und eine dreigliedrige. Die letzte, für welche sich alle zweigliedrigen Untergruppen als Tangenten an einen Kegelschnitt abbilden, wird von den Herren Lie und Engel als Kegelschnittsgruppe bezeichnet.

Im Vorstehenden ist eine Voraussetzung gemacht, deren Berechtigung noch bewiesen werden muss. Wir haben nämlich angenommen, dass diejenigen beiden Transformationen $X_\lambda$ und $X_\mu$ für welche im Ausdrucke $(X_\lambda X_\mu)$ die Transformation $X_{r-1}$ vorkommt, beidemale die ersten Transformationen sind, welche zu den betreffenden Wurzeln gehören. Da die Gleichung (7) nur eine verschwindende Wurzel hat, müssen alle $(X_{\alpha_\iota} X_{\beta_\varkappa})$ für $\omega_\alpha + \omega_\beta = 0$, wofern sie nicht verschwinden, durch $X_{r-1} f$ ausgedrückt werden. Unsere bisherige Annahme war: $(X_{\alpha_0} X_{\beta_0}) = c \cdot X_{r-1}$; wir nehmen jetzt an: $(X_{\alpha_0} X_{\beta_0}) = 0$.

Dann folgt aus der Jacobi'schen Relation $(\alpha_0 \beta_0 \alpha_1)$:

$$c_{\beta_0 \alpha_1, r-1}\, \omega_\alpha X_{r-1} + c_{\alpha_0 \alpha_1 \gamma_0} (X_{\gamma_0} X_{\beta_0}) = 0,$$

wegen $\omega_\alpha + \omega_\beta = 0$, wo $\omega_\gamma = 2\omega_\alpha$ ist, dass $(X_{\gamma_0} X_{\beta_0})$ die $X_{r-1} f$ nicht enthält, dass also auch $(X_{\alpha_0} X_{\beta_1}) = 0$ ist; dasselbe gilt für $(X_{\alpha_1} X_{\beta_0})$ u. s. w. Es kann also, wenn $(X_{\alpha_0} X_{\beta_0}) = 0$ vorausgesetzt wird, kein $(X_{\alpha_\iota} X_{\beta_\varkappa}) = X_{r-1} f$ sein.

Hiermit sind die aufgestellten Sätze nach allen Seiten bewiesen.

Nachtrag. Die Forderung, dass nicht jede beliebige Transformation mit einer andern vertauschbar sein soll, hat die zwei Bedingungen nach sich gezogen, dass erstens die Zahl $r$ der Glieder eine *ungerade* sein muss und dass zweitens jedem $\lambda + 1$ eine *gerade* Zahl $2m + 2$ von $\lambda + 1$-fachen Wurzeln zugeordnet werden muss. Beide Bedingungen sind aber, wenn man von jener Forderung absieht, durchaus nicht nothwendig. Wir bilden also jetzt Gruppen nach folgender Vorschrift:

*Für ein beliebiges $r$ nehme man zunächst die Transformationen $X_r$, $X_{r-1}$, $X_{r-2}$ so an, dass ist:*

$$(X_{r-1} X_r) = 2 X_r f,\ (X_{r-1} X_{r-2}) = -2 X_{r-2} f,\ (X_{r-2} X_r) = X_{r-1} f.$$

*Dann wähle man zwei Zahlen $\sigma$ und $s$ so, dass $\sigma s \leq r - 3$ und bilde die Wurzeln*

$$\pm(s-1),\ \pm(s-3),\ \pm(s-5) \ldots$$

*und lasse jede dieser $s$ Zahlen eine $\sigma$-fache Wurzel der charakteristischen*

*Gleichung für $X_{r-1}f$ sein. Dann wählt man zwei neue Zahlen $\sigma'$ und $s'$ so, dass $\sigma' s' \leqq r-3-s\sigma$ ist, und lasse jede der $s'$ Zahlen $\pm(s'-1)$, $\pm(s'-3)\ldots$ eine $\sigma'$-fache Wurzel sein. So fahre man fort, bis alle $r-3$ Nummern erschöpft sind. Jeder dieser $\sigma$-fachen Wurzeln ordne man $\sigma$ Transformationen nach den Gleichungen* (18) *zu, dann jeder $\sigma'$-fachen Wurzel $\sigma'$ Transformationen u. s. w.*

Wie bei den vorhin betrachteten Gruppen sieht man auch hier unmittelbar, dass für $\iota, \varkappa = 1, 2 \ldots r-3$ nothwendig $(X_\iota X_\varkappa) = 0$ und dass sich $(X_{r-2} X_\iota)$ und $(X_r X_\iota)$ durch die $r-3$ ersten Transformationen darstellen lassen. Der ganze Charakter der Gruppen bleibt daher im wesentlichen ungeändert; nur wird, wenn $r$ gerade oder eine der Zahlen $s, s' \ldots$ ungerade ist, jede beliebige Transformation mit einer andern vertauschbar sein. Im übrigen gelten aber alle im letzten Paragraphen hergeleiteten Sätze auch für die nach der verallgemeinerten Vorschrift gebildeten Gruppen. Namentlich ist für die in dieser Weise gebildeten Gruppen $l = 1$ und $p = r$. Die Frage, ob dies die einzigen Gruppen seien, für welche $l = 1$ und $p = r$ ist, wird sich erst in einem späteren Theile unserer Arbeit beantworten lassen.

## § 9.

## Einige Eigenschaften der Gruppen vom Range Null.

Die Resultate der beiden vorangehenden Paragraphen gestatten uns, sämmtliche Gruppen, welche den dort angegebenen Bedingungen genügen, sobald die Gliederzahl gewählt ist, in expliciter Form hinzuschreiben. Die dort angewandte Methode, welche sich auch für andere Voraussetzungen als wichtig erweisen wird, ist für die Gruppen vom Range Null nicht brauchbar. Es ist mir aber nicht möglich, Sätze anzugeben, welche die explicite Darstellung solcher Gruppen gestatten; da ich aber im folgenden einen Satz aus der Theorie dieser Gruppen bedarf, so möge es mir gestattet sein, die wichtigsten Sätze, welche für $l = 0$ gelten, hier mit ihren Beweisen zusammenzustellen.

Aus der Schlussbemerkung in § 3 folgt unmittelbar, dass, wenn $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ identisch verschwinden, jede beliebige Transformation der Gruppe mindestens mit einer zweiten Transformation derselben vertauschbar ist. Durch jeden Punkt des Bildraumes geht also mindestens eine gerade Linie, welche solche Transformationen abbildet, die mit einander vertauschbar sind. Es verschwinden also auch alle Unterdeterminanten $r-1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ identisch. Für manche dieser Gruppen verschwinden auch sämmtliche Unterdeterminanten von einem niedrigeren Grade identisch und dann ist jede Transformation mit einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von Transformationen vertauschbar. Dasselbe erkennt man ohne Rücksicht auf frühere Sätze,

wenn man eine gewisse Form für die Gruppen zu Grunde legt und berücksichtigt, dass jede der Gruppe angehörige zweigliedrige Untergruppe nur vertauschbare Elemente enthält.

Zu dieser Form gelangt man auf folgendem Wege. Man wähle zwei ganz allgemeine (infinitesimale) Transformationen als $X_0 f$ und $X_1 f$. Dann wird $(X_0 X_1)$ eine Transformation liefern, welche von beiden unabhängig ist und mit $X_2 f$ bezeichnet werden soll. Ebenso möge $(X_0 X_2)$ nicht durch $X_0$, $X_1 X_2$ dargestellt werden können und mit $X_3 f$ bezeichnet werden. In derselben Weise fährt man fort, so dass man hat:

$$(X_0 X_1) = X_2 f,\ (X_0 X_2) = X_3 f,\ (X_0 X_3) = X_4 f \ldots (X_0 X_{m-1}) = X_m f;$$

aber die Transformation $X_m f$ sei die erste, zu der man auf diesem Wege gelangt, für welche $(X_0 X_m)$ durch $X_0 X_1 \ldots X_m$ dargestellt werden kann. Es sei also:

$$(X_0 X_m) = \sum_0^m e_\nu X_\nu f.$$

Wenn aber hier die $e_0, e_1 \ldots e_m$ nicht sämmtlich verschwinden, und man für $\omega$ eine nicht verschwindende Wurzel der Gleichung:

$$\omega^m = e_1 + e_2 \omega + e_3 \omega^2 + \cdots + e_m \omega^{m-1}$$

nimmt, so kann man Coefficienten $p_0, p_1 \ldots p_m$ so bestimmen, dass

$$\left(X_0, \sum p_i X_i\right) = \omega \sum p_i X_i$$

ist, also die Gruppe eine zweigliedrige Untergruppe ohne vertauschbare Elemente enthält. Daher müssen $e_0, e_1 \ldots e_m$ sämmtlich verschwinden und da spätestens für $m = r - 1$ sich $(X_0 X_m)$ durch $X_0, X_1 \ldots X_m$ muss ausdrücken lassen, so sieht man, dass jede Transformation mit einer andern vertauschbar ist.

Wenn man aber für $m < r - 1$ auf dem angegebenen Wege zu der Gleichung $(X_0 X_m) = 0$ gelangt, so dürfen wir annehmen, $m$ sei die grösste Zahl, welche in dieser Hinsicht möglich ist. Alsdann wähle man wieder eine Transformation $X_{m+1} f$ ganz willkürlich, nur unabhängig von $X_0, X_1 \ldots X_m$, bilde $(X_0 X_{m+1})$ und wenn der Ausdruck hierfür von $X_0 X_1 \ldots X_m X_{m+1}$ unabhängig ist, setze man

$$(X_0 X_{m+1}) = X_{m+2};$$

man bilde

$$(X_0 X_{m+2}) = X_{m+3} f \ldots (X_0 X_{m+m'-1}) = X_{m+m'} f, (X_0 X_{m+m'}) = \sum_0^{m+m'} e_\nu X_\nu f,$$

wo der Fall $m' = 1$ eingeschlossen ist. Wir suchen zunächst aus

$X_0, X_1 \ldots X_{m+m'}$ eine zweigliedrige Untergruppe zu finden. Diese hat wegen der Gleichung:

$$\omega^{m'} = e_{m+1} + \omega e_{m+2} + \cdots + \omega^{m'-1} e_{m+m'}$$

stets ein Hauptelement, wenn nicht die Coefficienten $e_{m+1}, e_{m+2} \ldots e_{m+m}$ verschwinden. Wenn dann aber die Coefficienten $e_0, e_1 \ldots e_m$ alle oder zum Theil von Null verschieden sind, so beachte man, dass nach unserer Voraussetzung die $m$-fache Wiederholung der Operation $(X_0 Y_1) = Y_2 \ldots$ auf $(X_0 Y_m) = 0$ führen muss. Wenden wir dies auf $X_{m+1}$ an, so erkennen wir, dass $m'$ höchstens gleich $m$ sein kann und dass für $m' = m$ nothwendig $(X_0 X_{2m}) = 0$ sein muss. Andererseits zeigt aber die Fortsetzung dieser Operation für $m' < m$ unmittelbar, dass man $X_{m+1}$ nur durch eine lineare Function von $X_{m+1}, X_1 \ldots X_{m-1}$ zu ersetzen braucht, damit auch die Coefficienten $e_1 \ldots e_m$ und hiermit auch $e_0$ verschwinden.

In gleicher Weise kann man fortfahren. Bildet man wieder

$$(X_0 X_{m+m'+1}) = X_{m+m'+2} \cdots (X_0 X_{m+m'+m''}) = \sum_0^{m+m'+m''} e_\nu X_\nu f,$$

so muss $m'' \leqq m'$ sein und da spätestens eine $m'$-fache Wiederholung der angegebenen Operation, auf $X_{m+m'+1}$ angewandt, zu $(X_0 X_\varrho) = 0$ führt, so wird man wieder $(X_0 X_{m+m'+m''}) = 0$ annehmen können.

Daraus ergiebt sich der Lehrsatz:

*In jeder Gruppe vom Range Null lassen sich $r$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_0, X_1 \ldots X_{r-1}$ so wählen, dass die Gleichungen bestehen:*

$$\text{(A)}\quad (X_0 X_1) = a_1 X_2 f, (X_0 X_2) = a_2 X_3 f \ldots (X_0 X_\nu) = a_\nu X_{\nu+1} f \ldots (X_0 X_{r-1}) = 0$$

*wo alle Coefficienten $a_1 \ldots a_{r-2}$ gleich 1 oder 0 sind. Ist bei allgemeiner Wahl von $X_0 f$ und $X_1 f$ für $m < r-1$ bereits $a_m = 0$, so muss auch unter den $a_{m+1} \ldots a_{2m}$ mindestens ein verschwindender Coefficient vorkommen; ist $a_{m+m'}$ der erste, so verschwindet auch mindestens einer der Coefficienten $a_{m+m'+1} \ldots a_{m+2m'}$ u. s. w.*

Die Jacobi'sche Relation für $(0, m, m+m')$, $(0, m, m+m'+m'')\ldots$ sowie für $(0, \alpha, m)$, $(0, \alpha, m+m') \ldots$, wo $\alpha$ eine von $m, m+m' \ldots$ verschiedene Marke bedeutet, liefert:

(a) $(X_0 (X_m X_{m+m'})) = 0, \ldots$

(b) $(X_0 (X_\alpha X_m)) = (X_{\alpha+1} X_m), (X_0 (X_\alpha X_{m+m'})) = (X_{\alpha+1} X_{m+m'}) \ldots$

Aus (a) in Verbindung mit (b) für $\alpha = m-1, m+m'-1 \ldots$ folgt unmittelbar, dass $(X_m X_{m+m'})$ und die entsprechenden Ausdrücke sich durch $X_m, X_{m+m'}, X_{m+m'+m''} \ldots$ darstellen lassen. Berücksichtigt man aber, dass sich $X_{m+1}, X_{m+m'+1} \ldots$, wenn auch die Gleichun-

(A) bestehen sollen, noch immer so wählen lassen, dass zu $X_{m+m}$ noch $X_m$ mit beliebigem Factor hinzukommt, und dass man zu $X_{m+m'+m''}$ noch eine beliebige lineare Function von $X_m$ und $X_{m+m'}$ hinzufügen kann, und berücksichtigt man ferner den Charakter der überhaupt möglichen zweigliedrigen Untergruppen, so folgt

$$(X_m X_{m+m'}) = 0, \quad (X_m X_{m+m'+m''}) = 0 \ldots$$

Dieselbe Betrachtung zeigt jetzt, dass auch

$$(X_{m-1} X_m) = (X_{m-1} X_{m+m'}) = \cdots = 0$$

ist. Angenommen, man habe auf diese Weise gefunden, dass

$$(X_{\alpha+1} X_m) = (X_{\alpha+1} X_{m+m'}) = \cdots = 0$$

ist; dann folgt aus den Gleichungen (b) unmittelbar, dass $(X_\alpha X_m)$, $(X_\alpha X_{m+m'})$ höchstens $X_m$, $X_{m+m'} \ldots$ enthalten können, und dann lehrt die soeben skizzirte Betrachtung, dass auch $(X_\alpha X_m)$, $(X_\alpha X_{m+m'}) \ldots$ verschwinden. Somit sind alle diejenigen Transformationen, welche sich auf dem angegebenen Wege mit $X_0$ als vertauschbar herausstellen, mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar. Wir sehen also:

*Jede Gruppe vom Range Null hat eine Untergruppe, deren Transformationen mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar sind. Verschwinden in der Determinante $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ alle Unterdeterminanten vom Grade $r - k$, so enthält jede Mannigfaltigkeit von Transformationen, welche mit einer beliebig gewählten vertauschbar sind, eine $(k-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit von solchen, welche mit allen vertauschbar sind.*

Eine Untergruppe der angegebenen Art nennt Herr Lie (Ann. Bd. 25, S. 77, Note) eine ausgezeichnete Untergruppe. Wir finden also in den hier betrachteten Gruppen stets ausgezeichnete Untergruppen.

Ebenso hat sich eine einfache Methode ergeben, um diese Untergruppe zu finden.

Wenn $\alpha$ und $\beta$ von $m$, $m + m' \ldots$ verschieden sind, so liefert die Jacobi'sche Relation für $(0, \alpha, \beta)$ die Gleichung:

$$(c) \qquad (X_0(X_\alpha X_\beta)) = (X_{\alpha+1} X_\beta) + (X_\alpha X_{\beta+1}).$$

Indem wir diese Gleichung benutzen, beschränken wir uns der Bequemlichkeit wegen im Ausdruck auf solche Gruppen, für welche nur die sämmtlichen Unterdeterminanten $r-1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ verschwinden, für welche also in (A) $a_1 = a_2 = \cdots = a_{r-2} = 1$ zu setzen ist. Indem man der Reihe nach $\beta = \alpha + 1$, $\beta = \alpha + 3 \ldots$ setzt und ferner die Gleichung $(X_{r-2} X_{r-1}) = 0$ berücksichtigt, ersieht man unmittelbar, dass im Ausdruck von $(X_\alpha X_\beta)$ die $X_0 f$ und $X_1 f$ nicht vorkommen.

*Wenn für $l = 0$ nicht alle Unterdeterminanten $r - 2^{\text{ten}}$ Grades der charakteristischen Determinante identisch verschwinden, so bilden*

*die nach der obigen Vorschrift bestimmten Transformationen* $X_2 f \dots X_{r-1} f$ *die Hauptuntergruppe.*

Ebenso ergiebt sich aus (c) unmittelbar, dass $(X_{r-3} X_{r-2})$, überhaupt $(X_\alpha X_{r-2})$ nur durch $X_{r-1} f$ ausgedrückt wird. Hätten wir überhaupt bewiesen, dass für $\alpha < \beta$ die $(X_{\alpha+1} X_\beta)$ und $(X_\alpha X_{\beta+1})$ nur durch $X_{\beta+1}, X_{\beta+2} \dots X_r$ ausgedrückt werden, so zeigt die Gleichung (c), dass in $(X_\alpha X_\beta)$ nur $X_\beta, X_{\beta+1} \dots X_r$ vorkommen können, wo aber der Coefficient von $X_\beta$ wieder verschwinden muss, damit in der Gruppe nur zweigliedrige Untergruppen mit vertauschbaren Elementen vorkommen können. Die Aenderungen, welche hier nothwendig werden, wenn die Form (A) in voller Allgemeinheit vorausgesetzt wird, brauchen wohl nicht angegeben zu werden. Wir gelangen somit zu folgendem Satze, den Herr Engel zuerst unter einer etwas allgemeineren Voraussetzung aufgestellt und bewiesen hat:

*Jede r-gliedrige Gruppe* $G_r$, *für welche* $l = 0$ *ist, hat eine* $(r-1)$*-gliedrige invariante Untergruppe* $G_{r-1}$, *diese wieder eine* $(r-2)$*-gliedrige Untergruppe* $G_{r-2}$, *welche sowohl in Bezug auf* $G_r$ *wie auf* $G_{r-1}$ *invariant ist; diese eine* $(r-3)$*-gliedrige, welche für* $G_{r-2}$, $G_{r-1}$ *und* $G_r$ *invariant ist u. s. w.*

Da jede invariante $(r-1)$-gliedrige Untergruppe die Hauptuntergruppe in sich schliesst, so folgt:

*Ist* $l = 0$ *und verschwinden nur die Unterdeterminanten* $r-1^{\text{ten}}$ *Grades von* $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ *identisch, so hat die Gruppe eine einfach unendliche Schaar von* $(r-1)$*-gliedrigen invarianten Untergruppen; jede Transformation, welche der Hauptuntergruppe nicht angehört, gehört einer* $(r-1)$*-gliedrigen invarianten Untergruppe an.*

Aus den Gleichungen (c) ziehen wir jetzt weitere Folgerungen, indem wir $\alpha$, $\beta$ die kleinsten Werthepaare der Reihe nach annehmen lassen. Dann ist für $\alpha = 1$ bereits bewiesen, dass jedes $(X_\alpha X_\beta)$ durch diejenigen $X_\iota f$ dargestellt wird, deren Marke $\iota \geqq \alpha + \beta - 1$ ist. Angenommen, dies sei für $\alpha$, $\beta$ und $\alpha, \beta + 1$ bewiesen; dann ergiebt sich dieselbe Eigenschaft aus (c) auch für $(X_{\alpha+1} X_\beta)$. Somit gilt die Eigenschaft ganz allgemein (natürlich nur für $a_1 = \dots a_{r-2} = 1$ in (A)). Demnach liegt in dem $(r-1)$-dimensionalen Bildraume, welcher die gegebene Gruppe abbildet, eine bestimmte $(r-3)$-dimensionale Ebene $E_{r-3}$, durch welche die Hauptuntergruppe abgebildet wird; in dieser liegt wieder eine bestimmte $(r-4)$-dimensionale Ebene $E_{r-4}$ u. s. w. Das Product eines beliebigen Punktes des Bildraumes mit einem Punkte der $E_{r-\varkappa}$ führt auf einen Punkt der $E_{r-\varkappa-1}$, und das Product eines Punktes der $E_{r-\varkappa}$ mit einem Punkte der $E_{r-\lambda}$ führt auf einen Punkt der $E_{r-\varkappa-\lambda}$ und verschwindet, wenn diese Marke negativ ist. Speciell ergiebt sich:

*Bildet man aus den* $\varkappa$ *Transformationen* $X_{r-\varkappa}$, $X_{r-\varkappa+1} \dots X_{r-1}$

*und einer ganz allgemeinen Transformation eine $k+1$-gliedrige Gruppe, so ist dieselbe eine invariante Untergruppe und hat die aus den Transformationen $X_{r-x+1} \cdots X_{r-1}$ gebildete Gruppe zur Hauptuntergruppe.*

Man könnte nun ausser den Gleichungen (A) noch folgende Gleichungen voraussetzen:

$$(X_1 X_2) = \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_{r-1} X_{r-1},$$
$$(X_2 X_3) = \beta_4 X_4 + \cdots + \beta_{r-1} X_{r-1},$$
$$(X_3 X_4) = \gamma_6 X_6 + \cdots + \gamma_{r-1} X_{r-1} \ldots$$

und daraus mit Hülfe von (c) alle $(X_\alpha X_\beta)$ herleiten. Aber für $r > 6$ müssen hier weitere Bedingungen hinzugenommen werden, und so ist mir die explicite Darstellung dieser Gruppen bis jetzt nicht möglich.

Braunsberg, Anfang November 1887.

# Ueber die auf einer Curve $m^{ter}$ Ordnung $C_p^m$ vom Geschlecht $p$ von den $\infty^2$ Geraden $G$ der Ebene ausgeschnittene lineare Schaar $g_m^{(2)}$.

Von

C. Küpper in Prag.

Wir gebrauchen die von Herrn M. Nöther eingeführten und allgemein adoptirten Benennungen (Math. Annalen Bd. 6, 7).

Lässt sich durch eine Gruppe $Q'$ — von $Q$ Punkten einer linearen Schaar $G_Q$ eine adjungirte $C^{m-3}$ legen, welche die Grundcurve $C_p^m (p > 1)$ noch in einem Reste $R'$ von $R = 2p - 2 - Q$ Punkten schneidet, so kann die ganze Schaar $G_Q$ durch adjungirte $C^{m-3}$ ausgeschnitten werden, welche die Gruppe $R'$ enthalten. *Sämmtliche* durch $R'$ mögliche adj. $C^{m-3}$ liefern daher eine lineare Schaar, — *Vollschaar*, — die entweder mit der vorgelegten $G_Q$ identisch ist, oder von welcher diese einen Theil bildet.

Kennt man die Mannigfaltigkeit $r$ der durch die Gruppe $Q'$ möglichen adj. $C^{m-3}$, so folgt aus dieser nach dem Riemann-Roch'schen Satze die Mannigfaltigkeit $q$ der Vollschaar, zu welcher die Gruppe $Q'$ gehört.

I. $$2(q - r) = Q - R.$$

*Eine durch adjungirte $C^{m-3}$ ausschneidbare Schaar heisst Specialschaar.*

Bei unserer Betrachtung sind als $Q'$ die $m$ Schnittpunkte von $C_p^m$ mit irgend einer Geraden $G$ zu denken, und wir nehmen an, dass $Q'$ einer *Specialschaar* angehört. Die hiezu nothwendige und hinreichende Bedingung ist offenbar die, dass eine adjungirte $C^{m-4}$ existirt, weil eine durch $Q'$ mögliche $C^{m-3}$ die Gerade $G$ zum Bestandtheil haben muss.

*Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $p > m - 2$:* Denn von einer adj. $C^{m-3}$ sind $p - 1$ Punkte willkürlich, und hier ist $p - 1$ wenigstens $= m - 2$. Nimmt man daher zur Bestimmung der $C^{m-3}$

$m-2$ Punkte in der Gruppe $Q'$ an, so muss $C^{m-3}$ zerfallen in $G$ und eine $C^{m-4}$.

*Ist also $p > m-2$, so bilden die Schnittpunkte der $C_p^m$ mit den Geraden eine Specialschaar $g_m^{(2)}$.* Die Mannigfaltigkeit der Schaar ist 2, weil es in der Ebene $\infty^2$ Gerade giebt. *Von besonderer Wichtigkeit ist es aber zu entscheiden, ob $g_m^{(2)}$ Vollschaar ist oder nicht?*

Der eben geführte Nachweis der Existenz einer adj. $C^{m-4}$ zeigt zugleich, dass es wenigstens $\infty^{p-1-(m-3)} = \infty^{p-m+1}$ solcher Curven giebt. *Wenn nun die Zahl $p-m+1$ genau die Mannigfaltigkeit $r$ der möglichen $C^{m-4}$ ausdrückt*, $q$ die der Vollschaar bezeichnet, welche $g_m^{(2)}$ enthält, so muss nach I:

$$2.(q-p+m-1) = m-(2p-2-m);$$

*mithin* $q = 2$ sein.

*Wäre aber etwa $r = p-m+2$, so ergäbe sich $q = 3$, und die $g_m^{(2)}$ wäre alsdann Theil einer Vollschaar $g_m^{(3)}$ von der Mannigfaltigkeit* 3.

Damit unsere Betrachtung unmittelbare Anwendung auf die Raumcurven gestatte, beschränken wir uns durch die Annahme, dass $C_p^m$ *$h$ Doppelpunkte $D$* und keine weiteren Singularitäten besitzt.

Es ist sonach:

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - h.$$

2. Durch die $h$ Punkte $D$ gehen $\infty^{p-1}$ Curven $C^{m-3}$. Wenn nun eine $C^{m-4}$ dadurch, dass sie die $D$ enthält, genau $h$ Bedingungen unterworfen ist, so beträgt die Mannigfaltigkeit dieser $C^{m-4}$ offenbar: $r = p-1-(m-2) = p-m+1$.

*In diesem Falle ist, wie aus* 1. *erhellt, $g_m^{(2)}$ Vollschaar.*

*Wenn hingegen die Forderung, durch die $h$ Punkte $D$ zu gehen einer $C^{m-4}$ genau $h-1$ Bedingungen auferlegt, so dass $\infty^{p-m+2}$ $C^{m-4}$ durch die $D$ sich legen lassen, dann und nur dann ist $g_m^{(2)}$ in einer Vollschaar $g_m^{(3)}$ enthalten* (*Nöther*). *Setzen wir dies in der Folge voraus, mit anderen Worten setzen wir fest**), *dass eine durch $h-1$ der $D$ gehende $C^{m-4}$ den fehlenden $h^{ten}$ Punkt stets enthält, so geht auch noch in dem Falle $p = m-2$ eine einzige $C^{m-4}$ durch alle $D$, und es gilt für $p \geq m-2$, dass $g_m^{(2)}$ in eine Vollschaar $g_m^{(3)}$ gehört.*

---

*) Anm. Ist die Mannigfaltigkeit der durch $h_1$ Punkte $D$ gehenden $C^n$

$$> \frac{n(n+3)}{a} - h_1,$$

so brauchen nicht alle durch je $h_1 - 1$ dieser $D$ gehenden $C^n$ auch den letzten zu enthalten; aber wie leicht zu sehen, muss sich stets eine Gruppe von $h \leqq h_1$ der $D$ angeben lassen, für welche diese Eigenschaft besteht. —

Weil ersichtlich diese Voraussetzung für $h = 0$, $h = 1$ nicht zutreffen kann, so folgt, dass auf einer Curve $C_p^m$ ($p \geqq m - 2$), die nicht mehr als einen Doppelpunkt hat, *die* $g_m^{(2)}$ *Vollschaar ist.* Damit aber hier $p \geqq m - 2$ sei, braucht nur $m \geqq 4$ zu sein. Diesem kann man zufügen: *Ist speciell* $h = 0$, *so giebt es auf* $C_p^m$ *ausser* $g_m^{(2)}$ *überhaupt keine Specialschaar mit der Gruppenzahl* $m$*:* Denn $Q'$ sei eine Gruppe von $m$ Punkten einer Schaar $g_m^{(q)}$, $C^x$ die Curve niedrigster Ordnung, welche durch $Q'$ möglich ist. Soll $q > 0$ sein, so müssen durch den Restschnitt $R'$ von $C^x$, $C_p^m$, welcher aus $m(x-1)$ Punkten besteht, wenigstens $\infty^1$ Curven $C^x$ gehen, und demzufolge darf $x^2$ nicht kleiner als $m(x-1)$ sein. Wenn aber $m > x + 2$ wäre, so würde $m(x-1) > x^2 + x + 2$ folgen; also $m(x-1) > x^2$, sobald $x > 1$. Daher kann $m$ nicht grösser als $x + 2$, oder $x$ nicht kleiner als $m - 2$ sein, wofern nicht $x = 1$.

Das Vorhandensein einer adjungirten $C^{m-4}$, welches wir zu Grunde legen, bedingt $m > 4$; indess ist der Fall $m = 4$, $p = 3$ durch das oben Vorgebrachte erledigt. Was $C_2^4$ angeht, so existiren auf ihr nur $\infty^1$ Specialgruppen und $g_m^{(2)}$ ist nicht mehr Specialschaar.

Wenn nun zunächst $m = 5$ betrachtet wird, so ist für $p \geqq 3$ entsprechend $h \leqq 3$. Wäre $h = 3$, so kann $g_5^{(2)}$ nicht Specialschaar sein, da die drei $D$ nicht in gerader Linie liegen können. Wäre $h = 2$, so gehen doch nicht alle durch einen $D$ gezogenen Geraden auch durch den zweiten $D$; folglich ist dann $g_5^{(2)}$ Vollschaar, ebenso wie bei $h = 1$, $h = 0$.

Schon hieraus ersieht man, dass die Erfüllung der über die $C^{m-4}$ nöthigen Voraussetzung an das Vorhandensein einer gewissen Minimalzahl von Punkten $D$ geknüpft ist, und unsere nächste Aufgabe soll darin bestehen: *„den kleinsten Werth von* $h$ *zu ermitteln, bei welchem es überhaupt möglich ist, dass alle* $C^{m-4}$*, die von diesen* $h$ *Punkten* $h - 1$ *aufnehmen, auch den letzten enthalten.“*

3. *Das Minimum von* $h$ *— bezw. Maximum von* $p$*.*

*a) Bestimmung einer unteren Grenze für die Ordnung* $\nu$ *einer* $C^\nu$*, welche sämmtliche* $D$ *enthalten kann.*

Wenn $p = m - 2$, also *nur eine* $C^{m-4}$ durch die $D$ existirt, so können diese $D$ offenbar auf keiner $C^\nu$ liegen, wobei $\nu < m - 4$. Wenn $p = m - 1$, so dass die $D$ zu den Grundpunkten eines bestimmten Büschels ($C^{m-4}$) gehören, so könnten die $D$ selbst die $(m-4)^2$ Grundpunkte sein. Da aber von diesen einer, und nicht mehr als einer durch die übrigen bestimmt sein muss, so bedingt dies: $m - 4 = 3$, $m = 7$. Wird umgekehrt $m = 7$ angenommen, bei welcher Annahme durch die $D$ eine $C^{7-4} = C^3$ gehen muss, so können

auch auf dieser $C^3$ weniger als 9 Punkte $D$ in solcher Lage nicht existiren, dass alle durch acht $D$ gehenden $C^3$ den neunten $D$ enthalten:

*Für Curven 7ter Ordnung ist somit* 9 *das Minimum von* $h$, $15 - 9 = 6$ *das Maximum des Geschlechts. Auch leuchtet ein, dass man von* $C_6^7$ 9 *Doppelpunkte beliebig wählen darf.*

Ist $m > 7$, während $p = m - 1$ festgehalten wird, also $h = \frac{(m-1)(m-4)}{2}$, so wird $h < (m-4)^2$. Soll hier $\nu < m - 4$ sein, so kann $C^\nu$ dann nicht mehr alle $(m-4)^2$ Grundpunkte des Büschels $(C^{m-4})$ enthalten. Jetzt betrachte man die lineare Schaar von je $\nu(m-4) - h = Q$ Punkten, welche die $\infty^1 C^{m-4}$ aus $C^\nu$ schneiden; $q$ sei ihre Mannigfaltigkeit, $\pi$ das Geschlecht von $C^\nu$. Weil vom Gesammtschnitte der $C^{m-4}$, $C^\nu$ höchstens $\pi$ Punkte durch die übrigen bestimmt sind, *einer* der $h$ aber schon durch die anderen $h - 1$ mitbestimmt ist, so muss $Q - q < p$; folglich durch irgend eine Gruppe dieser Schaar eine $C^{\nu-3}$ möglich sein; d. h.:

$$\nu(m-4) - h \leq \nu(\nu-3),$$

oder

I. $$h \geq \nu(m-1-\nu).$$

Weil ferner $C^\nu$ alle $h$ Doppelpunkte von $C^m$ enthält, muss:

II. $$h \leq \frac{\nu \cdot m}{2}.$$

Daher folgt:

$$\frac{\nu \cdot \mu}{2} - \nu(m-1-\nu) \geq 0, \quad \text{oder} \quad \nu \geq \frac{m-2}{2}.$$

Bei ungeradem $m$ ist demnach $\frac{m-1}{2}$, bei geradem $m$ ist $\frac{m-2}{2}$ die gesuchte untere Grenze.

Es ist klar, dass ganz dasselbe Raisonnement gültig bleibt, wenn $p > m - 1$, d. h. wenn wenigstens $\infty^2 C^{m-4}$ durch die $D$ existiren.

Man findet als untere Grenze von $\nu$ $m - 4$ selbst, wenn entweder $m = 7$, $m = 6$. Wie oben gezeigt ist für $m = 7$ das Maximalgeschlecht $= 6$. Für $m = 6$ wird $m - 4 = 2$: Sollen auf einem Kegelschnitte $C^2$ $h$ Punkte eine solche Lage haben, dass alle durch $h - 1$ derselben mögliche $C^2$ den letzten Punkt aufnehmen, so darf man offenbar $h$ nicht kleiner als 6 nehmen; selbst dann nicht, wenn die $C^2$ zerfällt, wobei wegen $m = 6$ höchstens 3 der angenommenen Punkte auf einer Geraden liegen könnten. Auch besteht immer eine $C_4^6$, die zu Doppelpunkten 6 beliebige Punkte einer $C^2$ hat. Folglich ist bei $C^6$ das Minimum von $h$ : 6, das Maximalgeschlecht 4.

*b) Lehrsatz.*

*Kann man durch* $h - \frac{1}{2} i(i+1)$ *der* $h$ *Doppelpunkte* $D$ *von* $C_p^m$ *eine Curve* $C^{m-i-3}$ *legen, wobei* $i < \frac{m-2}{2}$, *so geht dieselbe durch die übrigen* $\frac{1}{2} i(i+1)$ $D$. (v. Nöther's Preisschrift über alg. Raumcurven).

*Beweis.* Es ist festzuhalten, dass für jede $C^{m-4}$ die Forderung durch die $D$ zu gehen genau $h-1$ Bedingungen repräsentirt. Sofern $i < \frac{m-2}{2}$, kann eine $C^{i-1}$ *nicht* durch alle $D$ gehen. Nimmt man nun für eine $C^{i-1}$ $\frac{1}{2} i(i+1) - 1$ Punkte $D_1$ unter den $D$ an, so muss diese Curve *auch bestimmt* sein, wenn durch die $h - \frac{1}{2} i(i+1) + 1$ übrigbleibenden $D_2$ eine $C^{m-i-3}$ möglich ist. Denn diese $C^{m-i-3}$ braucht nur durch $h - \frac{1}{2} i(i+1)$ Punkte $D_2$ zu gehen, um auch den fehlenden Punkt aufzunehmen. Wäre daher $C^{i-1}$ durch die $D_1$ noch nicht bestimmt, so hätte man in $C^{i-1} + C^{m-i-3}$ eine $C^{m-4}$, welche dadurch, dass sie die $h$ enthält, weniger als $h-1$ Bedingungen unterworfen ist.

Nun sei $P$ irgend einer der Punkte $D_2$, der aber nicht auf $C^{i-1}$ liegt, und $G$ die Gruppe bestehend aus $P$ und den $D_1$. Die vorausgesetzte $C^{m-i-3}$ muss $P$ enthalten. Aber man kann offenbar jedem in $G$ vorkommenden Punkte $P_1$ die Rolle von $P$ zuweisen, während der zuerst gewählte $P$ mit den übrigen der Gruppe $G$ zur Bestimmung einer $C_1^{i-1}$ dient, welche *nicht* durch $P_1$ gehen wird, weil sie sonst mit $C^{i-1}$ identisch wäre, was unmöglich ist, da diese $P$ nicht enthält. Es folgt demnach, dass die $C^{m-i-3}$ jeden Punkt von $G$ enthalten muss:

*c) Minimalwerth von h.*

Bedeutet $\nu \leqq m-4$ die Ordnung irgend einer durch die $D$ gehenden Curve, so ist nach 3:

I. $$h \geqq \nu(m-1-\nu).$$

*Erstens m ist eine gerade Zahl.*

Der Ausdruck rechts hat den grössten Werth, wenn $\nu = \frac{m-2}{2}$, nämlich

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{m-2}{2}.$$

*Wenn nun h nicht grösser als* $\frac{m(m-2)}{4}$ *ist, geht durch die D eine* $C^{\frac{m-2}{2}}$:

Man setze $i = \frac{m-4}{2}$, was zulässig ist ($b$), so wird: $m - i - 3 = \frac{m-2}{2}$; ferner: $h - \frac{1}{2} i(i+1) \gtreqless \frac{m^2+2m-8}{8}$.

Von einer $C^{\frac{m-2}{2}}$ sind auch willkürlich:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m-2}{2}\left(\frac{m-2}{2} + 3\right) = \frac{m^2+2m-8}{8} \text{ Punkte.}$$

Nach obigem Lehrsatze fallen die $D$ sämmtlich auf diese $C^{\frac{m-1}{2}}$. Demzufolge ist endlich $h \geqq \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m}{2}$; — gemäss I; d. h. *$h$ kann nie kleiner werden, als* $\frac{m(m-2)}{4}$. Das Maximum von $p$ ist hier $\frac{(m-2)^2}{4}$, *sonach* $p \geq m-2$, wofern $m \geqq 6$.

Damit aber die Folgerung über die auf $C^{\frac{m-2}{2}}$ von den $C^{m-4}$ ausgeschnittene Schaar zulässig sei, wird erfordert, dass das Geschlecht dieser Curve:

$$\pi > 1;$$

mit andern Worten:

$$\frac{m-2}{2} > 3, \quad m > 8.$$

Der Fall $m = 8$ verlangt eine specielle Behandlung.

*Zweitens $m$ ist ungerade.*

Der grösste Werth von $\nu(m-1-\nu)$ ist:

$$\frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-1}{2} \left(\text{für } \nu = \frac{m-1}{2}\right).$$

*Wenn $h$ nicht grösser als* $\frac{(m-1)^2}{4}$ *ist, so existirt die* $C^{\frac{m-1}{2}}$ *durch alle $D$:*

Man nehme $i = \frac{m-5}{2}$, was zulässig ist ($b$). Es wird

$$m - i - 3 = \frac{m-1}{2},$$

$$h - \frac{1}{2} i(i+1) \gtreqless \frac{(m-1)^2}{2} - \frac{(m-5)(m-3)}{8} = \frac{m^2+4m-13}{8}.$$

Von einer $C^{\frac{m-1}{2}}$ sind aber willkürlich:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \left(\frac{m-1}{2} + 3\right) = \frac{m^2+4m-5}{8},$$

also gewiss $h - \frac{1}{2} i(i+1)$ Punkte.

Diese $C^{\frac{m-1}{2}}$ ist auch die Curve niedrigster Ordnung, welche durch die $D$ möglich ist.

Endlich folgt jetzt aus I:

$$h \geqq \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-1}{2}, \text{ d. h.}$$

*h kann nicht kleiner als* $\frac{(m-1)^2}{4}$ *werden.* Hier ist das Maximum von $p : \frac{(m-1)(m-3)}{4}$; *somit*

$$p \geqq m-1, \quad \text{wofern} \quad m \geqq 7,$$

oder

$$p > m-2, \quad \text{wenn} \quad m > 5.$$

*Drittens.* $m = 8$.

Es seien 13 Punkte $D$ in solcher Lage, dass sie einen Büschel $(C^4)$ *bestimmen.* Eine $C_1^4$ dieses Büschels wird von den andern $(C^4)$ in 3 *festen* Punkten geschnitten; nimmt man von diesen noch einen als $14^{\text{ten}}$ zu den $D$, so giebt es, wie man sofort erkennt, eine $C_7^8$, welche die 14 $D$ zu Doppelpunkten hat; kurz $h$ kann $= 14$, $-p = 7$ — sein.

Soll aber $h < 14$ sein können, folglich auch durch $h-1$ dieser Punkte wenigstens $\infty^2 C^4$ möglich sein, die alsdann auch den $h^{\text{ten}}$ Punkt enthalten müssen; so wird jetzt eine $C_1^4$ dieser Curven von den andern nothwendig in einer *beweglichen* Schaar von Punktgruppen geschnitten. Besteht eine solche Gruppe aus $Q$ Punkten, und ist $q$ die Mannigfaltigkeit der Schaar, so ist $Q - q < 3$. (3 ist das Geschlecht von $C_1^4$; daher sind von den Schnittpunkten mit einer $C^4$ höchstens 3 durch die übrigen bestimmt, wobei jener $h^{\text{te}}$ Punkt mitgerechnet ist.) Weil hiernach jede Gruppe auf einer Curve $C^{4-3}$, d. i. einer Geraden liegen muss, so hat man

$$Q \leq 4;$$

somit

$$h \geq 12.$$

Wird nun angenommen, dass $h$ seinen Minimalwerth 12 erreicht, wobei dann $Q = 4$ ist, so ergiebt sich weiter, dass, da von den 16 Schnittpunkten der $C_1^4$, $C^4$ vier auf eine Gerade fallen, die 12 $D$ einer $C^3$ angehören müssen.

Umgekehrt kann man die 12 Schnittpunkte einer $C^4$ mit einer $C^3$ als Punkte $D$ wählen: Denn stets existirt $C^8$ mit diesen Doppelpunkten, und jede durch 11 derselben gehende $C^4$ enthält den $12^{\text{ten}}$.

4. *Construction der* $C_p^m$ *vom Maximalgeschlecht.*

*Erstens.* $m$ *ist gerade Zahl* $= 2n$. $h = n(n-1)$, und durch die $h$ Punkte $D$ geht $C^{n-1}$, $p = (n-1)^2$. Hier ist die Forderung $p > m-2$ erfüllt, sofern $m \geq 6$. $C^{n-1}$ wird von einer durch die $D$ gelegten $C^{2n-4}$ noch in

$$(2n-4)(n-1)-n(n-1)=(n-1)(n-4)$$

Punkten geschnitten, und diese müssen auch auf einer Curve von der Ordnung $n-1-3=n-4$ liegen. Demnach folgt, dass durch die $D$ eine Curve von der Ordnung $2n-4-(n-4)=n$ geht $C^n$.

*Jetzt lässt sich projectivisch eine $C^{2n}$ erzeugen, welche die $D$ zu Doppelpunkten hat:* Nämlich eine Gerade $G_1$ bildet mit $C^{n-1}$ eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Schnittpunkte der eben nachgewiesenen $C^n$ mit $G_1$ und die $D$ sind somit die Grundpunkte eines Büschels $(C^n)_1$. Eine andere Gerade $G_2$ liefert ebenso einen zweiten Büschel $(C^n)_2$.

Diese Büschel sind nur projectivisch auf einander zu beziehen, um die verlangte $C^{2n}$ zu erhalten. Auch wird nach dem bekannten Schnittpunktsatze von Cayley, der hier Anwendung findet, jede Curve von der Ordnung: $n+n-1-3=m-4$, welche $h-1$ der $D$ enthält, den letzten enthalten müssen.

(v. Nöther, Acta mathem. 8 : 2.)

*Zweitens. $m$ ist ungerade $=2n+1$.*

$h=n^2$, und durch die $h$ Punkte $D$ geht $C^n$. Diese wird von einer durch die $D$ gelegten $C^{2n-3}$ noch in $n(2n-3)-n^2=n(n-3)$ Punkten geschnitten, welche auf einer Curve von der Ordnung $n-3$ liegen müssen. Demnach folgt, dass durch die $D$ *noch* eine Curve von der Ordnung $2n-3-(n-3)=n$ gehen muss.

Hier sind also die $D$ die $n^2$ Grundpunkte eines Büschels $(C^n)$. Diesem entnehme man $C_1^n$ und $C_2^n$ und bilde aus $C_1^n$ und einer Geraden $G_1$ eine $C_1^{n+1}$, aus $C_2^n$ und einer Geraden $G_2$ eine $C_2^{n+1}$: Durch $C_2^{n+1}$, $C_2^{n+1}$ ist sodann ein Büschel $(C^{n+1})$ gegeben, dessen Grundpunkte vorliegen: in den $D$, in den Schnittpunkten von $G_1$ und $C_2^n$, von $G_2$ und $C_1^n$, endlich in $G_1G_2$. Man beziehe diesen Büschel projectivisch auf $(C^n)$, so erzeugt man die verlangte $C^{2n+1}$. Und damit $C^{2n-3}=C^{m-4}$ durch alle $D$ gehe, genügt es nach dem angezogenen Satze, dass $C^{m-4}$ durch einen weniger gelegt wird.

5. Versteht man unter $p_1$ die Zahl $\frac{(m-2)^2}{4}$, oder $\frac{(m-1)(m-3)}{4}$, je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist, so wurde im Vorangehenden die Begründung des Ausspruchs geliefert: Hat $C_p^m$ ein Geschlecht $p>p_1$, und *blos* Doppelpunkte, so kann die Schaar $g_m^{(2)}$ auf ihr *nicht* in einer $g_m^{(3)}$ enthalten sein. Umfassender ist der Satz: *Ist das Geschlecht $p$ einer Curve $\mathfrak{C}_p^m$ grösser als $p_1$, so kann auf ihr keine Schaar $\mathfrak{g}_m^{(3)}$ vorkommen.*

*Beweis.* Existirt auf $\mathfrak{C}_p^m$ eine $\mathfrak{g}_m^{(3)}$, welche durch $\infty^3$ adjungirte $\mathfrak{C}^{m-3}$ ausschneidbar sein wird, so benutze man ein Netz dieser $\mathfrak{C}^{m-3}$

zur Transformation von $\mathfrak{C}_p^m$ in $C_p^m$, welche nur Doppelpunkte hat. Hierbei wird die Schaar $g_m^{(3)}$ in eine $\mathfrak{g}_m^{(3)}$ auf $C_p^m$ transformirt, in welcher die von den Geraden auf $C_p^m$ bestimmte $\mathfrak{g}_m^{(2)}$ enthalten ist, folglich muss: $p \leqq p_1$.

*Demnach ist auf* $C_p^m$, wenn $p > p_1$ stets *eine etwa vorhandene* $g_m^{(2)}$ *Vollschaar*, und es ist $p - m + 1$ *genau* die Mannigfaltigkeit adjungirter $C^{m-4}$.

Von der eben hervorgehobenen Eigenschaft einer Curve, deren $p > p_1$, lässt sich, wie Herr Bobek bemerkt hat, eine ebenso einfache als nützliche Anwendung auf Regelflächen machen:

*Eine Regelfläche* $m^{ter}$ *Ordnung* $F_p^m$, *deren Geschlecht* $p$ *die Zahl* $p_1$ *überschreitet, muss ein Kegel sein* $(m > 2)$. Denn die Ebenen $E, \mathfrak{E}$ mögen $F_p^m$ in $C_p^m$, $\mathfrak{C}_p^m$ schneiden, und es sei $p > p_1$, $m > 2$. Die Schnittcurven haben auf $E\mathfrak{E}$ mehr als 2 Punkte gemein. Die Erzeugenden von $F_p^m$, welche $C_p^m$ in $m$ Punkten einer Geraden treffen, müssen auch auf $\mathfrak{C}_p^m$ $m$ Punkte einer Geraden bestimmen, weil bei der eindeutigen Transformation von $C_p^m$ in $\mathfrak{C}_p^m$ durch die Erzeugenden der Fläche die auf der Geraden $E\mathfrak{E}$ befindliche Gruppe der beiden auf $C_p^m$, $\mathfrak{C}_p^m$ befindlichen *Vollschaaren* $g_m^{(2)}$, $\mathfrak{g}_m^{(2)}$ in sich transformirt wird, die Schaaren also in einander übergeführt werden. Mithin ist die Transformation selbst *Collineation* der Ebenen $E$, $\mathfrak{E}$, bei welcher mehr als zwei sich selbst entsprechende Punkte — auf $E\mathfrak{E}$ — sind, d. i. eine *centrische* Collineation, w. z. b. w.

6. *Construction der windschiefen Flächen* $F_{p_1}^m$ *mit dem Maximalgeschlechte* $p_1$.

*Soll eine windschiefe Fläche* $F^m$ *das Geschlecht* $p_1$ *erreichen, das sie nie überschreiten kann, so muss sie in einer linearen Congruenz enthalten sein, deren Directricen die ganze Doppelcurve der* $F^m$ *ausmachen. Auch ist diese Bedingung erfüllbar und hinreichend.*

*Beweis.* Durch irgend eine Erzeugende $\xi$ der $F^m$ lege man zwei Ebenen $E$, $\mathfrak{E}$, die in $C_p^{m-1}$, $\mathfrak{C}_p^{m-1}$ die Fläche schneiden. Die von den Geraden ihrer Ebenen auf diesen Curven bestimmten Schaaren $g_{m-1}^{(2)}$, $\mathfrak{g}_{m-1}^{(2)}$ sind nothwendig *Vollschaaren*, und somit sind die Ebenen $E$, $\mathfrak{E}$ durch die Erzeugenden von $F^m$ collinear auf einander bezogen, wobei die *centrische* Collineation ausgeschlossen ist, da sonst $F^m$ ein Kegel wäre. Nun wird $\xi$ von $m - 2$ anderen Erzeugenden getroffen, also wenigstens von zweien, da wir $m > 3$ voraussetzen dürfen, indem die Flächen $2^{ten}$, $3^{ten}$ Grades rational sind. Würden sämmtliche $m - 2$ Erzeugende

durch denselben Punkt von $\zeta$ gehen, so wäre wieder $F^m$ rational, was ausgeschlossen ist, da nur für $m < 4$ sich $p = 0$ ergiebt; träfen aber dieselben $\zeta$ in mehr als 2 verschiedenen Punkten, so läge eine centrische Collineation vor.

Daher treten auf $\zeta$ zwei Punkte $a$, $b$ auf, in denen jene $m-2$ Erzeugende aufstehen. In der Collineation sind $a, b$ die Doppelpunkte der auf $\zeta$ liegenden collinearen Gebilde. Mithin lässt sich die Collineation folgendermassen herstellen: $c$, $\mathfrak{c}$; $d$, $\mathfrak{d}$ seien 2 Paar homologer Punkte von $E$, $\mathfrak{E}$, oder $c\mathfrak{c}$, $d\mathfrak{d}$ zwei windschiefe Erzeugende von $F^m$. Aus $a, b$ ziehe man über sie die Transversalen $A, B$; dann werden die Geraden, welche $A$ und $B$ schneiden auf $E$, $\mathfrak{E}$ die fragliche Collineation bestimmen, und es sind $A, B$ die Directricen einer Congruenz, zu deren Geraden die Erzeugenden der $F^m$ gehören. Die Schnittpunkte $a$, $b$ von $\zeta$ mit den $m-2$ anderen Erzeugenden werden nun vielfache Punkte der $F^m$ sein, $a$ etwa $\varrho$-fach, $b$ $\sigma$-fach, so dass

$$\varrho - 1 + \sigma - 1 = m - 2.$$

Legt man zur Construction der Fläche die Leitlinien $A, B, C^{m-1}$ zu Grunde, so erkennt man sofort, dass durch *jeden* Punkt von $A$ $\varrho$, durch jeden von $B$ $\sigma$ Erzeugende gehen. Ein ebener Schnitt $C^m$ besitzt demnach einen $\varrho$-fachen Punkt auf $A$, einen $\sigma$-fachen auf $B$.

Wenn man berücksichtigt, dass für $\varrho + \sigma = m$;

$$\frac{\varrho(\varrho+1)}{2} + \frac{\sigma(\sigma+1)}{2} < \frac{m^2+3m}{2},$$

so darf $C^m$ mit einem $\varrho$-fachen Punkte $a$ und einem $\sigma$-fachen Punkte $b$ vorausgesetzt werden, und mittels zweier windschiefen Leitgeraden $A, B$ lässt sich eine $F^m$ erzeugen. Damit hierbei ihr Geschlecht ein möglichst grosses werde, darf offenbar $C^m$ weiter keinen vielfachen Punkt haben, d. h. $C^m$ hat im Ganzen

$$\frac{\varrho(\varrho-1)}{2} + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} \text{ Doppelpunkte.}$$

Sei jetzt erstens $m$ eine gerade Zahl. Soll $p_1$ das Geschlecht von $C^m$ sein, so muss $\frac{m(m-2)}{4}$ die Anzahl der Doppelpunkte sein und zur Bestimmung von $\varrho$, $\sigma$ hat man:

$$\frac{\varrho(\varrho-1)}{2} + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} = \frac{m(m-2)}{4},$$

und

$$\varrho + \sigma = m;$$

w oraus

$$\varrho = \sigma = \frac{m}{2}$$

folgt.

Wenn zweitens $m$ ungerade ist, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\varrho(\varrho-1)}{2} + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} = \frac{(m-1)^2}{4},$$

$$\varrho + \sigma = m;$$

also

$$\varrho - \sigma = \pm 1,$$

d. h. die eine Leitgerade ist $\frac{m-1}{2}$-fach, die andere $\frac{m+1}{2}$-fach auf $F^m$.

Prag, October 1887.

# Ueber die Erniedrigung der Ordnung algebraischer Differentialgleichungen mit Hülfe bekannter Integrale.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

Der Gauss'sche Fundamentalsatz für algebraische Gleichungen hat bekanntlich in der Theorie der algebraischen Differentialgleichungen sein Analogon in dem Existenzbeweise der Integrale; auf Grund des Gauss'schen Satzes ergiebt sich weiter, dass man stets mit Hülfe oder Adjungirung *einer* Lösung einer algebraischen Gleichung den Grad der Gleichung um eine Einheit erniedrigen kann, und auch für lineare Differentialgleichungen gelingt es bekanntlich durch die Lagrange'sche Substitution, mit Hülfe eines particulären Integrales die Ordnung der Differentialgleichung zu erniedrigen. Ich habe mir die Frage vorgelegt, für welche Classen algebraischer Differentialgleichungen $m^{\text{ter}}$ Ordnung man mit Hülfe der Kenntniss eines particulären Integrales die Integration der gegebenen Differentialgleichung auf die einer mit Adjungirung jenes Integrales gleichartigen algebraischen Differentialgleichung $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen kann oder, anders ausgesprochen, wenn man beachtet, dass die Substitutionsgleichung eine Differentialgleichung erster Ordnung sein muss*), da die $m - 1$ Constanten der reducirten Differentialgleichung durch eine hinzukommende Constante der Substitutionsgleichung ergänzt werden müssen, für welche algebraischen Differentialgleichungen**)

$$y^{(m)} = F(x, y, y', y'' \ldots . y^{(m-1)}) \tag{1}$$

wird die Substitutionsgleichung

$$f(x, y, y', y_1, y_1', \ldots y_1^{(m-1)}, z) = 0, \tag{2}$$

*) Für lineare Differentialgleichungen

$$y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \cdots + p_m y + p_{m+1}$$

führt bekanntlich die Substitution

$$y' = y_1 z + y \frac{y_1'}{y_1}$$

auf eine mit Adjungirung von $y_1$ und dessen Ableitungen lineare Differentialgleichung $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung in $z$.

**) Dass allgemein für algebraische Differentialgleichungen die Kenntniss eines particulären Integrales nicht immer eine Reduction der Ordnung ermöglicht, ist bereits im 26ten Bande der mathematischen Annalen von mir hervorgehoben worden.

in welcher $y_1$ ein particuläres Integral von (1) bedeutet, die mit Adjungirung von $y_1$ und dessen Ableitungen algebraische Differentialgleichung ergeben

$$F_1(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(m-1)}, z, z', z'', \ldots z^{(m-1)}) = 0, \tag{3}$$

wobei zu bemerken, dass, wie leicht aus dem Folgenden zu ersehen sein wird, in die Gleichung (2) die Ableitungen von $z$ nicht eintreten dürfen, und ich will die Erörterung dieser Frage an dieser Stelle für die allgemeinen algebraischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchführen.

Sei also

$$y'' = F(x, y, y') \tag{4}$$

gegeben, und für ein particuläres Integral $y_1$ derselben die Substitution angewandt

$$y' = f(x, y, y_1, y_1', z), \tag{5}$$

so folgt aus (4)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f}{\partial y_1'} F(x, y_1, y_1') + \frac{\partial f}{\partial z} z' = F(x, y, f), \tag{6}$$

und diese reducirte Differentialgleichung in $z$ müsste, wenn die geforderte Reduction möglich sein soll, von $y$ frei sein, oder es müsste der nach $y$ genommene Differentialquotient der Gleichung (6) für willkürliche Werthe aller sonst darin enthaltenen Grössen verschwinden; wenn aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y} y_1' + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1' \partial y} F(x, y_1, y_1') + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} z' = \frac{\partial F(x, y, f)}{\partial y} + \frac{\partial F(x, y, f)}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial y} \tag{7}$$

eine identische Gleichung sein soll, so muss, weil $z'$ nur auf der linken Seite der Gleichung und zwar in einem Posten vorkommt,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

sein, und somit die Substitutionsgleichung (5) die Form annehmen

$$y' = f_1(x, y_1, y_1', z) + f_2(x, y_1, y_1', y). \tag{8}$$

Setzt man nun $f_1(x, y_1, y_1', z) = Z$, so wird die daraus resultirende neue Differentialgleichung wiederum von der ersten Ordnung, und die oben gestellte Frage somit darauf zurückgeführt sein, diejenigen algebraischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y'' = F(x, y, y') \tag{9}$$

anzugeben, welche durch die Substitution

$$y' = z + f(x, y_1, y_1', y) \tag{10}$$

in eine mit Adjungirung von $y_1$ und dessen Ableitungen algebraische Differentialgleichung erster Ordnung übergehen, indem alle durch algebraische Substitutionen aus einer solchen Differentialgleichung erhaltenen offenbar dieselbe Eigenschaft besitzen. Die durch Substitution von (10) in (9) erhaltene, der Gleichung (6) analoge Gleichung

$$(11)\quad z' + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f}{\partial y_1'} F(x, y_1, y_1') + \frac{\partial f}{\partial y}(z+f) = F(x, y, z+f)$$

liefert wiederum durch Differentiation nach $y$ die in allen Grössen identische Beziehung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y} y_1' + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1' \partial y} F(x, y_1, y_1') + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z+f) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial F(x, y, z+f)}{\partial y} + \frac{\partial F(x, y, z+f)}{\partial (z+f)} \frac{\partial f}{\partial y},$$

aus welcher durch Differentiation nach $z$

$$(12)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F(x, y, z+f)}{\partial y \partial (z+f)} + \frac{\partial^2 F(x, y, z+f)}{\partial (z+f)^2} \frac{\partial f}{\partial y}$$

folgt. Differentiirt man diese Gleichung nun nach $y_1$ und $y_1'$, was wegen der Identität erlaubt ist, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial y_1} = \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial (z+f)^2} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial^3 F}{\partial (z+f)^3} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial (z+f)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y_1},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial y_1'} = \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial (z+f)^2} \frac{\partial f}{\partial y_1'} + \frac{\partial^3 F}{\partial (z+f)^3} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y_1'} + \frac{\partial^2 F}{\partial (z+f)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y_1'},$$

und durch Multiplication der ersten Gleichung mit $\frac{\partial f}{\partial y_1'}$, der zweiten mit $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ und Subtraction, wie leicht zu sehen,

$$(13)\quad \frac{\partial^2 F(x, y, z+f)}{\partial (z+f)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \log \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y_1'}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial y_1'}} \right] \right\}.$$

Diese Beziehung zeigt aber, dass die rechte also auch die linke Seite von $z$ unabhängig ist, und dass somit wegen der Willkürlichkeit von $z$

$$(14)\quad F(x, y, t) = P_0(x, y)t^2 + P_1(x, y)t + P_2(x, y)$$

folgt, worin $P_0$, $P_1$, $P_2$ algebraische Functionen bedeuten; da nun nach (12)

$$(15)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial P_0(x, y)}{\partial y}(z+f) + \frac{\partial P_1(x, y)}{\partial y} + 2 P_0(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}$$

identisch zu erfüllen ist, so folgt $\frac{\partial P_0(x, y)}{\partial y} = 0$, also

$$(16)\quad F(x, y, t) = P_0(x)t^2 + P_1(x, y)t + P_2(x, y).$$

Beachtet man nun, dass nach (13)

$$2P_0(x) = \frac{\partial}{\partial y}\log\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y_1'}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial y_1'}}\right]\right\}$$

oder

$$2P_0(x)y + Q(x, y_1, y_1') = \log\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y_1'}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial y_1'}}\right]\right\}$$

ist, so folgt, da der Logarithmus einer algebraischen Function von $y$ nicht der linken Seite der Gleichung identisch gleich sein kann, dass $P_0(x) = 0$ oder dass

$$F(x, y, t) = P_1(x, y)t + P_2(x, y) \tag{17}$$

ist, und zu gleicher Zeit aus (15)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial P_1(x, y)}{\partial y} \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial y} = P_1(x, y) + \varphi(x, y_1, y_1'), \tag{18}$$

so dass die Gleichung (11) in

$$z' + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1}y_1' + \frac{\partial f}{\partial y_1'}[P_1(x, y_1)y_1' + P_2(x, y_1)] = \varphi(x, y_1, y_1')(z+f) + P_2(x, y) \tag{19}$$

übergeht, und somit jedenfalls, da $y$ herausfallen soll, die Gestalt annimmt

$$z' + \omega_1(x, y_1, y_1')z + \omega_2(x, y_1, y_1') = 0; \tag{20}$$

*die reducirte Differentialgleichung muss also jedenfalls eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung sein.*

Gehen wir nun von der reducirten Differentialgleichung aus und fragen umgekehrt, welcher Natur algebraische Differentialgleichungen zweiter Ordnung in $y$ sind, die durch eine Substitution der Form

$$z = y' - f(x, y_1, y_1', y) \tag{21}$$

aus (20) hervorgehen, wenn $y_1$ zugleich ein Integral der resultirenden Differentialgleichung zweiter Ordnung sein soll, und die letztere $y_1$ und $y_1'$ nicht mehr enthält, wenn $y_1''$, so wie die Differentialgleichung es vorschreibt, durch $x, y_1, y_1'$ ausgedrückt wird. Da sich nun aus (21)

$$z' = y'' - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y_1}y_1' - \frac{\partial f}{\partial y_1'}y_1'' - \frac{\partial f}{\partial y}y' \tag{22}$$

also vermöge (21) und (22) aus (20)

$$y'' - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y_1}y_1' - \frac{\partial f}{\partial y_1'}y_1'' - \frac{\partial f}{\partial y}y' + (y'-f)\omega_1 + \omega_2 = 0 \tag{23}$$

ergiebt, so wird, wenn die gesuchte Differentialgleichung zweiter Ordnung durch

(24) $$y'' = F(x, y, y')$$

dargestellt wird, die Gleichung

(25) $$y'' - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1' - \frac{\partial f}{\partial y_1'} F(x, y_1, y_1') - \frac{\partial f}{\partial y} y' + (y' - f)\omega_1 + \omega_2 = 0$$

eine in $y_1$ und $y_1'$ identische sein müssen, und ferner auch

(26) $$F(x, y, y') - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1' - \frac{\partial f}{\partial y_1'} F(x, y_1, y_1') - \frac{\partial f}{\partial y} y' + (y' - f)\omega_1 + \omega_2 = 0$$

eine in $x, y, y', y_1, y_1'$ identische Gleichung. Differentiirt man die Gleichung (26) nach $y'$, so folgt

(27) $$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} - \omega_1,$$

und da die linke Seite dieser Gleichung, also auch die rechte, von $y_1$ und $y_1'$ unabhängig sein muss,

(28) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y_1} = \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y_1'} = \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1'},$$

während nach (27)

(29) $$F(x, y, y') = y' \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \omega_1\right) + \Omega(x, y, y_1, y_1'),$$

und somit nach (24) die Differentialgleichung zweiter Ordnung die Gestalt annimmt

(30) $$y'' = y' \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \omega_1\right) + \Omega.$$

Da nun aber $\omega_1$ von $y$ unabhängig ist, so liefert die Integration der Gleichungen (28) nach $y$ die Beziehungen

(31) $$\frac{\partial f}{\partial y_1} = y \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} + \Omega_1(x, y_1, y_1'), \quad \frac{\partial f}{\partial y_1'} = y \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1'} + \Omega_2(x, y_1, y_1');$$

ferner muss, weil in der Differentialgleichung (30) $y_1$ und $y_1'$ nicht vorkommen dürfen,

$$\Omega = \Pi(x, y)$$

sein, so dass (30) in

(32) $$y'' = y' \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \omega_1\right) + \Pi(x, y)$$

übergeht; bemerkt man endlich, dass aus den beiden Gleichungen (31) unmittelbar

$$f = y\omega_1 + M(x, y) + N(x, y_1, y_1')$$

folgt, wenn $M$ und $N$ wieder algebraische Functionen bedeuten, und dass sich hieraus in (32)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \omega_1 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

ergiebt, so können wir die Frage nunmehr so stellen: welche algebraischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$y'' = y' \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} + \Pi(x, y) \tag{33}$$

lassen sich mit Hülfe eines Integrales $y_1$ durch die Substitution

$$y' = z + \omega_1(x, y_1, y_1')y + M(x, y) + N(x, y_1, y_1') \tag{34}$$

in die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$z' + \omega_1(x, y_1, y_1')z + \omega_2(x, y_1, y_1') = 0 \tag{35}$$

überführen? Da aber der Werth (34) in (33) eingesetzt, die Gleichung

$$z' + y\frac{d\omega_1}{dx} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} + \omega_1(z + \omega_1 y + M + N) = \Pi \tag{36}$$

liefert, so wird wiederum der nach $y$ genommene Differentialquotient dieser Gleichung

$$\frac{d\omega_1}{dx} + \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} + \omega_1\left(\omega_1 + \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{\partial \Pi}{\partial y} \tag{37}$$

identisch befriedigt sein müssen, und somit durch nochmalige Differentiation nach $y$

$$\frac{\partial^3 M}{\partial x \partial y^2} + \omega_1 \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \tag{38}$$

sein müssen; da aber in $M$ und $N$ $y_1$ und $y_1'$ nicht enthalten sind, so wird auch, wenn nicht $\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = 0$ ist, $\omega_1$ davon unabhängig sein, und es bleiben somit nur die beiden Fälle zu betrachten übrig, in denen entweder $M(x, y) = K(x)y + K_1(x)$ oder $\omega_1(x) = \psi(x)$ ist. Findet die erstere Annahme statt, so folgt aus (38) zugleich $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 0$ oder $\Pi = \varphi(x)y + \varphi_1(x)$, und es geht die Differentialgleichung (33) in

$$y'' = K(x)y' + \varphi(x)y + \varphi_1(x)$$

also in eine lineare über. Ist andererseits $\omega_1 = \psi(x)$, so folgt aus (37)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} + \psi(x)\frac{\partial M}{\partial y} + \psi(x)^2 + \psi'(x)$$

und durch Integration nach $y$

$$\Pi = \frac{\partial M}{\partial x} + \psi(x)M + [\psi(x)^2 + \psi'(x)]y + \psi_1(x), \tag{39}$$

so dass die Differentialgleichung (33) in

$$y'' = y'\frac{\partial M}{\partial y} + [\psi(x)^2 + \psi'(x)]y + \frac{\partial M}{\partial x} + \psi(x)M + \psi_1(x) \tag{40}$$

und die Substitutionsgleichung in

$$y' = z + \psi(x)y + M + N \tag{41}$$

übergeht; da aber aus (41)

$$(42) \quad y'' = z' + \psi(x)(z + \psi(x)y + M + N) + \psi'(x)y + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} y' + \frac{dN}{dx}$$

folgt, so führt die Substitution von (42) die Differentialgleichung (40) in

$$(43) \quad z' + \psi(x)\, z = \psi_1(x) - \psi(x) N(x, y_1, y_1') + \frac{dN(x, y_1, y_1')}{dx}$$

über, also in der That in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Da jedoch die Transformation möglich war, ohne dass man den Charakter von $y_1$ als Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung benutzte, so kann man unmittelbar auf eine identische Transformation schliessen; in der That kann man die Differentialgleichung (40) in die Form setzen

$$\frac{d}{dx}[y' - \psi(x)y - M(x,y)] + \psi(x)[y' - \psi(x)y - M(x,y)] = \psi_1(x),$$

und diese geht ohne Benutzung eines Integrales durch die Substitution

$$z = y' - \psi(x)y - M(x, y)$$

in die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$z' + \psi(x) z = \psi_1(x)$$

über.

Wir finden somit den auf algebraische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung übertragbaren Satz:

*Unter allen algebraischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die nicht unmittelbare algebraische Zusammensetzungen von Differentialausdrücken erster Ordnung und deren Differentialquotienten sind, haben nur die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Eigenschaft, dass sie mit Hülfe eines Integrales auf algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung reducirt werden können.*

Heidelberg, im December 1887.

# Ueber die Anwendung iterirter Functionen zur Darstellung der Wurzeln algebraischer und transcendenter Gleichungen.

Von

C. Isenkrahe in Bonn.

---

Im ersten Hefte des XXIX. Bandes dieser Zeitschrift hat Herr Prof. Netto „über einen Algorithmus zur Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen" eine Abhandlung veröffentlicht, deren interessanter Inhalt mir zu den folgenden Bemerkungen Anlass bietet.

Ausgehend von der trinomischen Gleichung $x^n - x - a = 0$ bemerkt Herr Netto, dass zu deren Lösung der Algorithmus:

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{x_k + a}$$

mehrfach benutzt worden sei, und fährt fort: „Man begnügte sich dabei mit der Behauptung, dass sich $x_k$ mit wachsendem $k$ einer der reellen Wurzeln der Gleichung nähere ohne dass doch meines Wissens über die *Convergenz* des angegebenen Verfahrens irgend welche Untersuchungen angestellt wären."

Diese Lücke nun wird im weiteren Verlauf der Abhandlung ausgefüllt durch den Nachweis, dass wenn $\xi_\alpha$ eine reelle Wurzel der Gleichung:

$$x = \sqrt[n]{\varphi(x)}, \tag{1}$$

wobei

$$\varphi(x) = ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + c,$$

und wenn

$$q(\xi_\alpha) = \frac{\varphi'(\xi_\alpha)}{n \cdot \xi_\alpha^{n-1}} \tag{2}$$

ist, der Algorithmus convergirt bez. divergirt, falls der absolute Betrag von $q(\xi_\alpha)$ kleiner bez. grösser als die Einheit ist. —

Im „*Archiv für Mathematik*" 1881, S. 33 findet sich eine Abhandlung von K. E. Hoffmann „Ueber die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruchähnliche Algorithmen", welche an eine von Prof. S. Günther auf der 34. Versammlung deutscher Philologen

in Trier gehaltenen Vortrag über denselben Gegenstand anknüpft. Jene „kettenbruchartigen Algorithmen" sind aber nichts anderes, als „iterirte Functionen", bei welchen der Anfangswerth $x_0$ entweder $= 0$ oder $= \infty$ gesetzt ist.

Herr Hoffmann behandelt die allgemeine trinomische Gleichung:

$$x^m - p x^n + q = 0, \tag{3}$$

bildet daraus die Algorithmen

$$(A) \qquad x = \sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}}, \tag{4}$$

$$(B) \qquad x = \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{x^m}} \tag{5}$$

und kommt zu dem Resultat, dass alle reellen Wurzeln der trinomischen Gleichungen sich durch Iteration dieser beiden Algorithmen convergent darstellen lassen, und zwar entweder durch den ersteren oder den letzteren, je nachdem der absolute Werth der betreffenden Wurzel kleiner oder grösser ist als:

$$\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}.$$

Ich selbst habe in einer Abhandlung „über die Inversion der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für ihre reellen Moduln"*) bei Gelegenheit eines Specialfalles aus der trinomischen Gleichung $q^n + q = u$ den einfachen Algorithmus:

$$q = u - \Big(u - (u - (u - \cdots)^n)^n\Big)^n$$

gebildet, welcher ebenfalls nichts anderes ist, als die Iteration der Function:

$$q = u - q^n$$

mit dem Anfangswerthe $q_0 = 0$.

Im weiteren Verlaufe genannter Abhandlung aber habe ich den Nachweis geführt, dass man mit Hülfe iterirter Functionen im Stande ist, jedes beliebige elliptische Integral erster und zweiter Gattung, und zwar unter den letzteren sowohl die von Legendre als die von Weierstrass definirten, für seinen reellen Modulus zu invertiren. Die bei diesem Inversionsproblem erprobte bequeme und umfassende Anwendbarkeit der iterirten Functionen veranlasste mich zu weiteren Untersuchungen über die Theorie der letzteren, und es gelang mir, zu gewissen allgemeinen Sätzen zu kommen, unter welche die vorhin angegebenen Resultate von Netto und Hoffman sich als Specialfälle subsumiren lassen. — Indem ich mir eine ausführliche und systematische Deduction dieser Ergebnisse für später vorbehalte, möchte ich hier

*) Zeitschr. für Math. und Phys. 1886, p. 34, 178, 241.

in aller Kürze nur einige derselben darlegen, welche theils zu den vorhin genannten Abhandlungen in naher Beziehung stehen, theils aus anderen Gründen mir von grösserem Interesse zu sein scheinen.

Es ist leicht zu erkennen, dass man aus der von Herrn Netto zu Grunde gelegten Gleichung:

$$x^n - ax^{n-1} - bx^{n-2} - \cdots - c = 0$$

die Grösse $x$ nicht blos in der eingangs citirten Form (1):

$$x = \sqrt[n]{ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + c}$$

sondern auch noch auf mannigfache andere Weise isoliren kann. Gesetzt nun, man sei auf irgend eine dieser Arten zu der Gleichung:

$$x = f(x) \tag{6}$$

gekommen, wobei $f(x)$ eine ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, algebraische oder transcendente Function bedeuten möge. *Wenn* man dann die Function $f(x)$ iteriren, d. h. von irgend einer reellen oder complexen Grösse $x_0$ ausgehend, der Reihe nach die Functionen $f(x_0)$, $f(f(x_0))$, $f\big(f(f(x_0))\big)$ etc. bilden, oder was dasselbe besagt, die Werthe $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. bestimmen kann, und wenn die Reihenfolge dieser Werthe gegen irgend eine reelle oder complexe Grösse $\xi_\alpha$ convergirt, dann befriedigt letztere offenbar die Relation:

$$\xi_\alpha = f(\xi_\alpha),$$

muss sich also unter den Wurzeln der Gleichung (6) vorfinden.

Die Hauptfrage ist nun die: *wann* denn die Iteration von $f(x)$ gegen eine dieser Wurzeln convergirt, und hierauf giebt eine allgemeine Antwort der Satz:

I) *Die Iteration von $f(x)$ kann nur dann gegen einen festen Werth $\xi_\alpha$ convergiren, wenn der analytische Modulus von $f'(\xi_\alpha)$ kleiner als die Einheit ist.*

Der Beweis dieses Satzes findet sich leicht, wenn man die Bedingung dafür aufsucht, dass bei einem in der Nachbarschaft der Wurzel $\xi_\alpha$ liegenden Werthe $\xi_\alpha + \delta$ die Function $f(\xi_\alpha + \delta)$ noch näher bei $\xi_\alpha$ liegen soll, als $\xi_\alpha + \delta$ selbst.

Auf das Netto'sche Paradigma (1) angewandt ergiebt der vorstehende Satz nunmehr sofort:

$$f(x) = \sqrt[n]{\varphi(x)};\ f'(x) = \frac{\varphi'(x)}{n\left(\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)^{n-1}},$$

und sodann, da $\sqrt[n]{\varphi(\xi_\alpha)} = \xi_\alpha$ ist,

$$f'(\xi_\alpha) = \frac{\varphi'(\xi_\alpha)}{n\xi_\alpha^{n-1}} = q(\xi_\alpha) \text{ nach (2)}.$$

Die Convergenzbedingung für die Iteration von $\sqrt[n]{\varphi(x)}$ lautet demnach einfach dahin, dass der analytische Modul der von Herrn Netto eingeführten Function $q(\xi_\alpha)$, welche mit $f'(\xi_\alpha)$ identisch ist, kleiner als die Einheit sein muss. Dies gilt von *allen* Wurzeln der Gleichung $x = f(x)$. Wenn man aber, wie es in der erwähnten Abhandlung geschehen ist, nur die *reellen* Wurzeln in Betracht zieht, so genügt es zu schreiben:*)

$$|q(\xi_\alpha)| < 1.$$

Wenden wir denselben Satz I) auf das Hoffmann'sche Paradigma trinomischer Gleichungen:

$$x^m - px^n + q = 0$$

an und behandeln zunächst seinen Algorithmus (A):

$$x = \sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}},$$

so ergiebt sich:

$$f(x) = \sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}};$$

$$f'(x) = \frac{m-n}{nq}\left(\sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}}\right)^{n+1} \cdot x^{m-n-1},$$

und hieraus, da

$$\sqrt[n]{\frac{q}{p - \xi_\alpha^{m-n}}} = \xi_\alpha,$$

$$f'(\xi_\alpha) = \frac{m-n}{nq} \cdot \xi_\alpha^m.$$

Es lassen sich also mit Hülfe des Algorithmus (A) nur diejenigen Wurzeln ermitteln, bei denen die Bedingung:

$$\text{mod.}\left(\frac{m-n}{nq} \cdot \xi_\alpha^m\right) < 1$$

zutrifft, oder was dasselbe besagt, nur diejenigen Wurzeln, deren Modul *kleiner* als der Modul von $\sqrt[m]{\frac{nq}{m-n}}$ ist. Betrachtet man mit Hoffmann nur reelle Wurzeln und eliminirt $q$ mit Hülfe der Relation:

$$\xi_\alpha^m - p\xi_\alpha^n + q = 0,$$

so wird man auf die Hoffmann'schen Grenzwerthe

$$\pm \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

geführt. — Bei dem Algorithmus (B), welcher lautet:

$$x = \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{x^n}},$$

*) l. c. p. 142.

ergiebt die Anwendung unseres Satzes, dass nur solche Wurzeln dargestellt werden können, deren Modulus *grösser* als der Modulus von $\sqrt[m]{\frac{nq}{m-n}}$ ist. Bezüglich des *Grenz*falles ist zu bemerken, dass die Relation:

$$\sqrt[m]{\frac{nq}{m-n}} = \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}} = \xi_\alpha$$

die Bedingung ausspricht, unter welcher die Gleichung (3) mehrere *gleiche* Wurzeln $\xi_\alpha$ hat. Zur Darstellung der mehrfachen Wurzeln einer Gleichung sind aber die iterirten Functionen überhaupt nicht besonders geeignet. Denn selbst in den Fällen, wo die Iteration in der Nachbarschaft einer mehrfachen Wurzel convergent ist, nimmt ihre Convergenz doch immer mehr ab, je mehr die Näherungswerthe an dieselbe heranrücken. Dies ist eine einfache Consequenz des Satzes:

II) *Wenn die Iteration der Function* $f(x)$ *nach einem Werthe* $\xi_\alpha$ *convergirt, so ist diese Convergenz stets um so rascher, je kleiner der Modulus von* $f'(x_\alpha)$ *ist, und um so langsamer, je näher dieser Modulus an die Einheit heranrückt.*

III) Im Besondern ist für das Gebiet der reellen Grössen noch der Satz bemerkenswerth, dass *die Iteration sich der Grenze* $\xi_\alpha$ *immer nur von einer Seite nähert, wenn* $f'(\xi_\alpha)$ *positiv ist, hingegen um den Werth* $\xi_\alpha$ *herumpendelt, wenn* $f'(\xi_\alpha)$ *negativ ist.*

Der Umstand, dass die Hoffmann'schen Algorithmen (A) und (B) sich gegenseitig vollständig ergänzen, d. h. dass genau an der Stelle, wo der Convergenzbereich des einen aufhört, der des andern anfängt, ist auch wieder nur die Folge eines ganz allgemeinen Satzes. In gleicher Weise haben der von Netto angeführte Algorithmus $x = \sqrt[n]{x+a}$ und der von mir in einem Specialfalle benutzte, welcher auf die Gleichung $x^n - x - a = 0$ angewandt, heissen würde $x = -a + x^n$ ebenfalls die Eigenschaft, sich gegenseitig zu ergänzen, und zwar auf Grund desselben Satzes, welcher folgendermassen ausgesprochen werden kann:

IV) *Wenn man in einer Gleichung* $F(x) = 0$ *die Grösse* $x$ *an beliebig vielen Stellen, wo sie vorkommt, mit* $y$ *vertauschen und so eine zweite Gleichung* $F(x, y) = 0$ *bilden kann, aus welcher sich sowohl* $x$ *als* $y$ *isoliren lässt, etwa in der Form* $x = g(y)$, $y = h(x)$, *dann können die Wurzeln der Gleichung* $F(x) = 0$ *sämmtlich durch convergente Iteration, und zwar theils der Function* $g(y)$, *theils der Function* $h(x)$ *dargestellt werden.* —

So kann nämlich aus $x^n - x - a = 0$ durch die angegebene Vertauschung gebildet werden $y^n - x - a = 0$, also $y = \sqrt[n]{x+a}$ und $x = y^n - a$, mithin ergänzen sich diese Algorithmen.

Aus $x^m - px^n + q = 0$ kann gebildet werden zunächst

$$x^{m-n} \cdot x^n - px^n + q = 0;$$

sodann

$$x^{m-n} \cdot y^n - py^n + q = 0,$$

und hieraus sowohl der Algorithmus (A)

$$y = \sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}},$$

als auch der Algorithmus (B):

$$x = \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{y^n}},$$

also ergänzen sich auch diese Algorithmen.

Uebrigens kann man, wie leicht zu zeigen, dieselben Wurzeln, welche durch Iteration des Hoffmann'schen Algorithmus (A) erreichbar sind, auch erreichen durch den Algorithmus

$$x = \sqrt[n]{\frac{q + x^m}{p}},$$

andererseits sind die durch (B) darstellbaren auch darstellbar durch:

$$x = \sqrt[m]{px^n - q}.$$

Ein ferneres besonders interessantes Beispiel für die vielseitige Anwendbarkeit des Satzes (IV) ist das *Kepler'sche Problem*.

In der Gauss'schen Bezeichnungsweise heisst dasselbe

$$E = M + e \sin E,$$

wobei $M$ und $e$ gegeben, $E$ gesucht ist. Hier kann man auf Grund von (IV) sofort schliessen, dass entweder

$$E = \text{lim. it. } (M + e \sin E)$$

oder

$$E = \text{lim. it. } \left(\text{arc sin } \frac{E - M}{e}\right)$$

eine Lösung des Problems darstellen muss, je nachdem die erste oder die zweite Iteration convergirt. Aus der Betrachtung des Differentialquotienten

$$\frac{d}{dE}(M + e \sin E) = e \cos E$$

ergiebt sich aber sofort, dass die erstere Iteration die convergente ist. Da sich überdies nachweisen lässt, dass dieselbe bei jedem beliebigen Werthe von $E$, also auch bei $E = 0$ beginnen kann, so ergiebt sich als *einfache Lösung des Kepler'schen Problems* der Algorithmus:

$$E = M + e \sin (M + e \sin (M + \cdots + e \sin M)).$$

Rascher als dieser convergirt der folgende:

$$E = \text{lim. it.} \frac{M + e(\sin E - E\cos E)}{1 - e\cos E},$$

welcher mit der von Gauss angegebenen Lösung*)

$$E = M + e\sin E + \frac{\pm\lambda}{\mu \pm \lambda}(M + e\sin E - E)$$

im Wesentlichen übereinstimmt und auch mit der bekannten Newton-schen Näherungsmethode sehr nahe zusammenhängt. Wegen rascher Convergenz, Einfachheit der Rechnungen und zudem, weil je zwei aufeinanderfolgende Näherungen den gesuchten Grenzwerth stets zwischen sich einschliessen, ist auch die folgende Lösung**) bemerkenswerth:

$$E = \text{lim. it.}\left(\frac{M}{\cos^2\vartheta}\right),$$

wobei $\vartheta$ definirt ist durch die Relation:

$$\sin^2\vartheta = \frac{e}{E}\sin E.$$

Bezüglich der Convergenz iterirter Functionen scheinen mir noch einige weitere Bemerkungen von wesentlichem Interesse zu sein. Es giebt nämlich Mittel, einerseits die nicht convergenten Iterationen auf einfache Weise in convergente umzubilden, andererseits die Convergenz der convergenten zu beschleunigen.

Ist z. B. die Iteration irgend einer Function $f(x)$ gar nicht oder nur wenig convergent, so kann man eine Function $A \cdot x + B \cdot f(x)$ bilden, deren Iteration besser convergirt und die gesuchten Wurzeln der Gleichung $x = f(x)$ liefert. Für die dazu erforderliche Bestimmung der Constanten $A$ und $B$ lassen sich einfache Regeln angeben.

Von noch grösserer Wichtigkeit ist aber ein anderer Algorithmus. Wenn nämlich $x = f(x)$ eine von allen mehrfachen Wurzeln befreite Gleichung ist, dann sind, wie leicht nachzuweisen, ihre Wurzeln, identisch mit den Wurzeln der Gleichung:

$$x = \frac{f(x) - x f'(x)}{1 - f'(x)}. \tag{7}$$

V) Ausserdem aber gilt der Satz, dass *die Iteration der Function* $\frac{f(x) - x \cdot f'(x)}{1 - f'(x)}$, *je nachdem man von verschiedenen Anfangswerthen aus-*

*) Theoria motus etc. pag. 11.

**) Von Herrn Dr. Deichmüller, Observator der hiesigen Sternwarte, wurde mir die practische Brauchbarkeit dieses Algorithmus, dessen Ableitung ich ihm schon vor Jahren (Mai 1883) zuschickte, bestätigt. Uebrigens habe ich bei Anwendung desselben auf das in der Theoria motus pag. 12 gewählte Beispiel gefunden, dass Gauss irrt, wenn er behauptet, sein Schlusswerth 324° 16′ 29″ 50 sei „intra 0″01 exactus“. Derselbe ist vielmehr um 0″03 zu gross.

*geht, sämmtliche reellen und complexen Wurzeln der Gleichung $x = f(x)$ liefert.*

Dieser Satz beruht auf dem früheren Satze (I) und auf dem Umstande, dass

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x) - x\,f'(x)}{1 - f'(x)}\right)$$

für jede Wurzel der Gleichung $x = f(x)$ verschwindet.

Eine unmittelbare Consequenz des Satzes V) ist auch die bekannte Thatsache, dass man mit Hülfe der *Newton'schen Näherungsmethode*, welche ihrem Wesen nach nichts anderes als ein Specialfall der in V) enthaltenen Iteration ist, alle reellen und complexen Wurzeln einer gegebenen Gleichung ermitteln kann.

Die complexen Wurzeln können übrigens auch ermittelt werden, ohne dass man bei der Iteration das Gebiet der reellen Grössen zu verlassen braucht. Bringt man nämlich die Gleichung $x = f(x)$ in die Form:

$$p + qi = f(p + qi) = t(p, q) + u(p, q) \cdot i, \tag{8}$$

so ist zu setzen $p = t(p, q)$ und $q = u(p, q)$. Ausgehend von einem passenden Anfangswerthe $p_0 + q_0 i$, kann man nun abwechselnd beide Functionen iteriren und erhält:

$$\begin{aligned} p_1 &= \text{lim. it. } t(p_0, q_0), \\ q_1 &= \text{lim. it. } u(p_1, q_0), \\ p_2 &= \text{lim. it. } t(p_1, q_1), \\ q_2 &= \text{lim. it. } u(p_2, q_1) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Bei diesem Verfahren sind die Convergenzbedingungen folgende: Ist $p_\alpha + q_\alpha i$ die durch Iteration zu bestimmende Wurzel, so muss sein:

$$\left|\frac{\partial t(p_\alpha, q_\alpha)}{\partial p_\alpha}\right| < 1 \tag{9}$$

und

$$\left|\frac{\partial u(p_\alpha, q_\alpha)}{\partial p_\alpha}\right| < 1 - \frac{\partial t(p_\alpha, q_\alpha)}{\partial p_\alpha}. \tag{10}$$

Ist nun $\frac{\partial t(p_\alpha, q_\alpha)}{\partial p_\alpha}$ positiv, so besagt die Relation (10), dass auch $\left|\frac{\partial u(p_\alpha, q_\alpha)}{\partial p_\alpha}\right| < 1$ sein muss, und beide Relationen zusammen stimmen dann mit der in Satz I) enthaltenen Forderung überein.

Ist aber $\frac{\partial t(p_\alpha, q_\alpha)}{\partial p_\alpha}$ negativ, so gewährt die Relation (10) der Grösse $\left|\frac{\partial u(p_\alpha, q_\alpha)}{\partial p_\alpha}\right|$ einen weiteren Spielraum; dieselbe kann dann

unter Umständen bis an die Zahl 2 heranrücken, ohne dass die Iteration aufhört convergent zu sein. —

Bezüglich der Gleichungen (8) ist es von Interesse einen geometrischen Satz anzumerken.

VI) *Wenn* $p_\alpha + q_\alpha i$ *irgend eine von den Wurzeln der Gleichung* $x = f(x)$ *bedeutet, und wenn die Gleichungen* (8) *als Curvengleichungen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen werden, dann schneiden sich diese beiden Curven in dem Punkte, dessen Coordinaten* $p_\alpha$ *und* $q_\alpha$ *sind, und zwar schneiden sie sich daselbst rechtwinkelig.*

Zerlegt man in derselben Weise die rechte Seite der Gleichung (7) in ihren reellen und imaginären Theil, indem man bildet:

$$p + qi = \frac{f(p+qi) - (p+qi)f'(p+qi)}{1 - f'(p+qi)} = T(p, q) + U(p, q) \cdot i,$$

so gilt der Satz:

VII) *Die Curven* $p = T(p, q)$ *und* $q = U(p, q)$ *schneiden sich ebenfalls rechtwinklig in allen Wurzelpunkten der Gleichung* $x = f(x)$, *und zwar ist daselbst immer die erstere der q Achse, die letztere der p Achse parallel.*

Auf Grund von (VI) und (VII) kann man den Beweis für die ev. Convergenz der iterirten Functionen leicht in eine geometrisch anschauliche Form bringen. — Die Darlegung einiger weiteren Beziehungen der Wurzeln eben genannter Gleichung und ihrer Derivirten zu zwei und drei dimensionalen Raumgebilden würde hier zu weit führen und muss einer späteren besonderen Arbeit vorbehalten bleiben.

Bonn, im September 1887.

# Das vollständige Formensystem der binären Form 7ter Ordnung.

Von

Frhr. v. Gall in Oppenheim.

Nach Herrn Prof. Gordan's Untersuchungen*) erhält man das volle System der binären Form $a_x^7$ aus folgenden 29 nach dem Grad in den Coefficienten geordneten Formen $A_i$

1) $a_x^7 = f$;
2) $H_x^{10} = (ff)^2$; $\varkappa_x^6 = (ff)^4$;
3) $\gamma_x^{11} = (f\varkappa)^1$; $\varepsilon_x^9 = (f\varkappa)^2$; $r_x^3 = (f\varkappa)^5$; $T_x^{15} = (fH)^1$;
4) $\Delta_x^8 = (\varkappa\varkappa)^2$; $p_x^4 = (\varkappa\varkappa)^4$; $\xi_x^{14} = (H\varkappa)^1$;
5) $\eta_x^7 = (r\varkappa)^1$; $g_x^5 = (r\varkappa)^2$;
6) $\tau_x^2 = (rr)^2$; $\beta_x^8 = (\varkappa p)^1$;
7) $\vartheta_x^5 = (pr)^1$; $\alpha_x = (pr)^3$;
8) $\lambda_x^6 = (\tau\varkappa)^1$; $\mu_x^4 = (\tau\varkappa)^2$;
9) $Q_x^3 = (r\tau)$; 10) $\nu_x^2 = (r\alpha)$; 11) $\varphi_x^3 = (p\alpha)$;
12) $R = (\tau\tau)^2$; 13) $\varrho_x = (\tau\alpha)$; 14) $\psi_x^4 = (\vartheta\alpha)$;
16) $\sigma_x^2 = (Q\alpha)$; 17) $\omega_x = (\nu\alpha) = (r\alpha^2)^2$;
20) $A = (\varrho\alpha) = (\tau\alpha^2)^2$;
23) $h_x = (\sigma\alpha) = (Q\alpha^2)^2$;
30) $B = (h\alpha) = (\sigma\alpha^2)^2 = (Q\alpha^3)^3$,

indem man mit ihnen noch die Covariante $l_x^2 = (ff)^6$ und deren Invariante $C = (ll)^2$ verbindet; und zwar sind von den vielen möglichen Ueberschiebungen von $l^\varrho$ über Producte $A_iA_k\ldots$ beizubehalten:

*) Gordan. Ueber das Formensystem binärer Formen. Leipzig. Teubner 1875.

1) Die Ueberschiebungen $(A_i l^\varrho)^{2\varrho}$;

2) Von den Ueberschiebungen $(A_i l^\varrho)^{2\varrho-1}$ diejenigen, bei denen
   a) $A_i$ keine Functionaldeterminante nicht linearer Formen ist,
   b) $A_i$ eine Functionaldeterminante von der Ordnung $2\varrho$ ist,
   c) oder eine Functionaldeterminante von der Ordnung $2\varrho$ zweier Formen ungerader Ordnung,

3) unter den Ueberschiebungen $(A_i A_x, f^\varrho)^{2\varrho}$ diejenigen, bei denen die Ordnungen von $A_i$ und $A_x$ ungerade Zahlen sind, die zusammen $2\varrho$ betragen und bei denen $A_i$ und $A_x$ nicht gleichzeitig Functionaldeterminanten sind. (Vergleiche hierüber das erwähnte Werk von Gordan). Die letzte Kategorie von Ueberschiebungen liefert nur Invarianten. Es ist wesentlich der Zweck der nachfolgenden Untersuchung zu zeigen, dass die meisten derselben reducibel sind. Dagegen sind nur wenige der erhaltenen Covarianten auf andere zurückzuführen. Ich werde nachstehend die auf oben definirte Weise erlangten Bildungen, nach dem Grade in den Coefficienten der ursprünglichen Form $a_x^7$ geordnet, aufzählen und bei jedem Grade die möglichen Reductionen angeben. Ich verstehe dabei unter $(i, \varkappa)$ eine Form $i^{\text{ten}}$ Grades in den Coefficienten und $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung in den $x$.

**Formen 1. Grades.**

$$f = a_x^7 = (1, 7).$$

**Formen 2. Grades.**

| (2, 2) | (2, 6) | (2, 10) |
|---|---|---|
| $l_x^2$ | $\varkappa_x^6$ | $\mathsf{H}_x^{10}$. |

**Formen 3. Grades.**

| (3, 3) | (3, 5) | (3, 7) | (3, 9) | (3, 11) | (3, 15) |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_x^3$ | $(fl)^2$ | $(fl)^1$ | $\varepsilon$ | $\gamma$ | $T$. |

**Formen 4. Grades.**

| (4, 0) | (4, 4) | (4, 6) | (4, 8) | (4, 10) | (4, 14) |
|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | 1) $p$ | $(\varkappa l)^1$ | 1) $\Delta$ | $(Hl)^1$ | $\zeta$. |
| | 2) $(\varkappa l)^2$ | | 2) $(Hl)^2$ | | |

**Formen 5. Grades.**

| (5, 1) | (5, 3) | (5, 5) | (5, 7) | (5, 9) | (5, 13) |
|---|---|---|---|---|---|
| $(rl)^2$ | 1) $(rl)^1$ | 1) $g$ | 1) $\eta$ | 1) $(\gamma l)^2$ | $(Tl)^2$ |
| | 2) $(fl^2)^4$ | 2) $(fl^2)^3$ | 2) $(\varepsilon l)^2$ | 2) $(\varepsilon l)^1$. | |

### Formen 6. Grades.

Nach Formel 1) Seite 40 des angeführten Werkes von Herrn Gordan ist: $\Delta = \frac{2}{3}(fr) + L$, wenn ich unter $L$ eine Bildung verstehe, die das Symbol $l$ enthält. Es ist mithin $(\Delta l)^1$, $(\Delta l^2)^3$ und $(\Delta l^3)^5$ auszulassen, $(\Delta l^4)^7$ dagegen nicht, weil $(fr)^1$ Functionaldeterminante zweier Formen ungerader Ordnung und von der Ordnung 8 ist. Es bleiben daher die Bildungen:

| (6, 2) | (6, 4) | (6, 6) | (6, 8) | (6, 12) |
|---|---|---|---|---|
| 1) $\tau$ | 1) $(\varkappa l^2)^3$ | 1) $(Hl^2)^4$ | 1) $\beta$ | $(\xi l)^2$ |
| 2) $(\varkappa l^2)^4$ | 2) $(pl)^1$ | 2) $(\Delta l)^2$ | 2) $(Hl^2)^3$ | |
| 3) $(pl)^2$ | | | | |

### Formen 7. Grades.

| (7, 1) | (7, 3) | (7, 5) | (7, 7) | (7, 11) |
|---|---|---|---|---|
| 1) $\alpha$ | 1) $(fl^3)^6$ | 1) $\vartheta$ | 1) $(\gamma l^2)^4$ | $(Tl^2)^4$ |
| 2) $(fl^3)^6$ | 2) $(gl)^2$ | 2) $(\varepsilon l^2)^4$ | 2) $(\varepsilon l^2)^3$ | |
| 3) $(rl^2)^3$ | | 3) $(\eta l)^2$ | | |
| | | 4) $(gl)_1$ | | |

### Formen 8. Grades.

| (8, 0) | (8, 2) | (8, 4) | (8, 6) | (8, 10) |
|---|---|---|---|---|
| 1) $(\varkappa l^3)^6$ | 1) $(\varkappa l^3)^5$ | 1) $\mu$ | 1) $\lambda$ | $(\xi l^2)^4$ |
| 2) $(pl^2)^4$ | 2) $(pl^2)^3$ | 2) $(Hl^3)^6$ | 2) $(Hl^3)^5$ | |
| 3) $(\tau l)^2$ | 3) $(\tau l)_1$ | 3) $(\Delta l^2)^4$ | 3) $(\beta l)^2$ | |

### Formen 9. Grades.

| (9, 1) | (9, 3) | (9, 5) | (9, 9) |
|---|---|---|---|
| 1) $(fl^4)^7$ | 1) $Q$ | 1) $(\gamma l^3)^6$ | $(Tl^3)^6$ |
| 2) $(gl^2)^4$ | 2) $(\varepsilon l^3)^6$ | 2) $(\varepsilon l^3)^5$ | |
| 3) $(\alpha l)^1$ | 3) $(\eta l^2)^4$ | | |
| | 4) $(gl^2)^3$ | | |
| | 5) $(\vartheta l)^2$ | | |

### Formen 10. Grades.

| (10, 2) | (10, 4) | (10, 8) |
|---|---|---|
| 1) $\nu$ | 1) $(Hl^4)^7$ | $(\xi l^3)^6$ |
| 2) $(Hl^4)^8$ | 2) $(\beta l^2)^4$ | |
| 3) $(\Delta l^3)^6$ | 3) $(\lambda l)^2$ | |
| 4) $(\mu l)^2$ | 4) $(\mu l)^1$ | |

### Formen 11. Grades.

| (11, 1) | (11, 3) | (11, 7) |
|---|---|---|
| 1) $(\varepsilon l^4)^5$ | 1) $(\gamma l^4)^8$ | $(Tl^4)^8$ |
| 2) $(\eta l^3)^6$ | 2) $(\varepsilon l^4)^7$ | |
| 3) $(gl^3)^5$ | 3) $\varphi$ | |
| 4) $(\vartheta l^2)^4$ | | |
| 5) $(Ql)^2$ | | |

### Formen 12. Grades.

| (12, 0) | | (12, 2) | | (12, 6) |
|---|---|---|---|---|
| 1) $R$ | 4) $(r^2 l^3)^6$ | 1) $(Hl^5)^9$ | 4) $(\lambda l^2)^4$ | $(\zeta l^4)^8$ |
| 2) $(Hl^5)^{10}$ | 5) $(\mu l^2)^4$ | 2) $(\Delta l^4)^7$ | 5) $(\mu l^2)^3$ | |
| 3) $(\Delta l^4)^8$ | 6) $(\nu l)^2$ | 3) $(\beta l^3)^6$ | 6) $(\nu l)^1$ | |

### Formen 13. Grades.

| (13, 1) | | (13, 3) | (13, 5) |
|---|---|---|---|
| 1) $\varrho$ | 5) $(\vartheta l^3)^5$ | $(\varphi l)_1$ | $(Tl^5)^{10}$ |
| 2) $(\gamma l^5)^{10}$ | 6) $(Ql^2)^3$ | | |
| 3) $(\varepsilon l^5)^9$ | 7) $(\varphi l)^2$ | | |
| 4) $(\eta l^4)^7$ | | | |

### Formen 14. Grades.

| (14, 0) | (14, 4) |
|---|---|
| 1) $(fr, l^5)^{10}$ | 1) $\psi$ |
| 2) $(\beta l^4)^8$ | 2) $(\zeta l^5)^{10}$ |
| 3) $(\lambda l^3)^6$ | |
| 4) $(r \cdot \alpha, l^4)^4$ | |

### Formen 15. Grades.

| (15, 1) | (15, 3) |
|---|---|
| 1) $(\gamma l^6)^{11}$ | $(Tl^6)^{12}$ |
| 2) $(\varphi l^2)^3$ | |
| 3) $(\varrho l)^1$ | |

### Formen 16. Grades.

Bei den Bildungen dieses Grades treten zuerst zerfallende Invarianten auf. Denke ich mir nun alle Formen $L$ geordnet:

1) nach dem Gesammtgrad $\alpha$,
2) nach dem Grade $\beta$ in den Coefficienten der 29 Formen $A_i$,
3) nach der Höhe $\gamma$ der Ueberschiebung mit einer Potenz von $l$,

so werde ich zunächst jede Form $L$ auslassen können, die auf höhere Formen $L$ zurückführbar ist, weil sie dadurch niedere Dimension in den Coefficienten $A_i$ annimmt, und ferner jede Form $L$, die auf niedere Ueberschiebungen mit $l^\varrho$ zurückzubringen ist. Lässt sich daher ein Product $A_i A_\varkappa$ mit Hilfe einer Syzygante identisch reduciren auf ein Aggregat von Producten $Z_i$ von mehr als 2 Formen, oder von Producten $G_i$ zweier Formen gerader Ordnung oder auf Producte $J_i$, die eine Invariante zum Factor besitzen, so lässt sich die Ueberschiebung $(A_i A_\varkappa, l^\varrho)^{2\varrho}$, wie sie die oben genannte Categorie 3) der Ueberschiebungen von Formen $A_i$ mit Potenzen von $l$ fordert, im ersten und zweiten Fall darstellen als ein Product von Formen niederen Gesammtgrades $\alpha$ und einer Summe von niederen Ueberschiebungen mit $l^\varrho$. Im dritten Falle führt die Ueberschiebung sofort auf eine Summe von Producten von Formen niederen Gesammtgrades $\alpha$. Die Ueberschiebung $(A_i A_\varkappa, l^\varrho)^{2\varrho}$ ist daher auszulassen. In den meisten Fällen lassen sich diese Syzyganten sofort hinschreiben. Nur einige Male wie bei den 2 Invarianten (16, 0) bedarf es hierzu breiterer Rechnung. Hier sind es die Invarianten $(r \cdot g, l^4)^8$ und $(f \cdot \alpha, l^4)^8$ die besonderer Betrachtung bedürfen. Dabei leistet die Gordan'sche Identität III, pag. 11 des genannten Werkes das Nöthige. Für $\begin{pmatrix} \varkappa & p & \varkappa \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ giebt diese die Relation:

$$L + \tfrac{3}{25}\,\tau\varkappa = \tfrac{3}{2}\,(\Delta p)^2 + \tfrac{5}{28}\,p^2,$$

mit Hilfe der Formeln pag. 40 gleichen Ortes. Berücksichtigen wir die dort gegebene Identität:

$$\Delta = \tfrac{2}{3}\,(fr)^1 + L$$

und entwickeln $\begin{pmatrix} f & r & p \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} r & \varkappa & r \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, so ergiebt sich

$$((fr)^1 p)^2 + L + \tfrac{5}{42}\,p^2 = -\tfrac{4}{5}\,(\eta r)^1 - \tfrac{6}{35}\,gr$$

und

$$(\eta r)^1 + \tfrac{5}{7}\,gr = \tfrac{1}{2}\,\tau\varkappa.$$

Mit Benutzung dieser Werthe findet man dann die Syzygante:

$$L + \tfrac{13}{25}\,\tau\varkappa - \tfrac{2}{5}\,gr - \tfrac{5}{84}\,p^2 = 0.$$

Es ist mithin

$$g \cdot r = \sum (G + L)$$

und daher $(g \cdot r, l^4)^8$ auszulassen.

Mit steter Berücksichtigung der Gordan'schen Formeln pag. 40 erhält man aus: $\begin{pmatrix} p & r & f \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \varkappa \cdot r & r \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$L + \tfrac{1}{3}\,\alpha \cdot f = -\tfrac{1}{5}\,(\varkappa r, r)^2 - \tfrac{16}{15}\,(\eta r)^1 + \tfrac{9}{28}\,gr,$$

$$(\varkappa r, r)^2 = \tfrac{25}{28}\,gr + \tfrac{2}{3}\,(\eta r)^1$$

und aus beiden

$$L + \tfrac{1}{3}\,\alpha f = \tfrac{1}{7}\,gr - \tfrac{6}{5}\,(\eta r)_1,$$

oder nach Einsetzung des oben gefundenen Ausdruckes für $(\eta r)_1$:

$$gr - \tfrac{3}{5}\,\tau\varkappa - \tfrac{1}{3}\,\alpha f + L = 0,$$

d. h. auch

$$\alpha \,.\, \tilde{f} = \sum (G_i + L_i).$$

Es ist demnach auch $(f \cdot \alpha,\ l^4)^8$ reducibel.

Die Identität: $\begin{pmatrix} \varphi & \alpha & r \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\cdot(\varphi r)^1 = (\vartheta\alpha) + L$,

d. i.

$$\psi = (\varphi r)^1 + L,$$

zeigt, dass $\psi$ Functionaldeterminante nicht linearer Covarianten ist, und dass demnach $(\psi l)^1 = (16, 4)$ auszulassen ist. Es bleiben daher von Formen $(16, i)$

| (16, 0) | (16, 2) |
|---|---|
| 1) $(f^2, l^7)^{14}$ | 1) $\sigma$ |
| 2) $(\alpha^2, l)^2$ | 2) $(\xi l^6)^{12}$ |
| | 3) $(\psi l)^2$ |

## Formen 17. Grades.

| (17, 1) |
|---|
| 1) $\omega$ |
| 2) $(Tl^7)^{14}$ |

## Formen 18. Grades.

Aus $\begin{pmatrix} r & \alpha & \tau \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ folgt $(Q\alpha)^1 = \sigma = (\nu\tau)^1$; also ist $\sigma$ ebenfalls Functionaldeterminante nicht linearer Formen und demnach auch $(18, 2) = (\sigma l)^1$ auszulassen. Dagegen ist $(\psi l^2)^3$ als Ueberschiebung der Categorie 2b beizubehalten. Es bleiben daher:

| (18, 0) | | | (18, 2) |
|---|---|---|---|
| 1) $(\xi l^7)^{14}$ | 4) $(r\eta, l^5)^{10}$ | 7) $(g\alpha, l^3)^6$ | $(\psi l^2)^3$ |
| 2) $(fg, l^6)^{12}$ | 5) $(r\vartheta, l^4)^8$ | 8) $(\psi l^2)^4$ | |
| 3) $(\varepsilon \cdot r, l^6)^{12}$ | 6) $(r \cdot Q, l^3)^6$ | 9) $(\sigma l)^2$ | |

## Formen 19. Grades.

$$\frac{(19,1)}{1)\ (Tl^8)^{15}}$$
$$2)\ (\omega l)^1$$

## Formen 20. Grades.

Hier erhält man 13 Invarianten, die aber bis auf 2 reducibel sind. Ausser der Invariante $A$ liefert das Gordan'sche Verfahren nämlich:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $(f\varepsilon, l^8)^{16}$ | 4) $(f\vartheta, l^6)^{12}$ | 7) $(g^2, l^5)^{10}$ | 10) $(\vartheta\alpha, l^3)^6$ |
| 2) $(f\eta, l^7)^{14}$ | 5) $(fQ, l^5)^{10}$ | 8) $(\eta\alpha, l^4)^8$ | 11) $(r\varrho, l^2)^4$ |
| 3) $(\gamma\cdot r, l^7)^{14}$ | 6) $(\varepsilon\alpha, l^5)^{10}$ | 9) $(r\varphi, l^3)^6$ | 12) $(Q\alpha, l^2)^4$ |

13) $A$.

Aus der Identität $(ax)r + (xr)a + (ra)x = 0$, d. i.

$$\gamma\cdot r - f\cdot\eta - x\left(\tfrac{3}{2}\Delta + L\right) = 0$$

erhält man eine Relation zwischen den Producten $\gamma\cdot r$ und $f\eta$.

$\begin{pmatrix} f & f & p \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x & r & f \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ geben

$$\tfrac{1}{2}Hp = \tfrac{1}{5}(xr, f)_1 - \tfrac{4}{15}f\cdot\eta + L,$$
$$(xr, f)_1 = \tfrac{1}{3}f\eta - \gamma r$$

und eine 2. Syzygante:

$$\gamma r + f\eta + \tfrac{5}{2}Hp + L = 0.$$

Durch Combination beider finden wir:

$$\begin{cases} 2\gamma r + \tfrac{5}{2}Hp - \tfrac{3}{2}x\Delta + L' = 0, \\ 2f\eta + \tfrac{5}{2}Hp + \tfrac{3}{2}x\Delta + L'' = 0, \end{cases}$$

oder

$$\gamma r = \sum(G + L); \quad f\eta = \sum(G' + L').$$

Es sind daher $(f\eta, l^7)^{14}$ und $(\gamma\cdot r, l^7)^{14}$ reducibel.

Ein Gleiches findet man für die 4. Invariante. Man hat

$$(pr)a + (ra)p + (ap)r = 0,$$

d. i.

$$f\cdot\vartheta - p\left(\tfrac{3}{2}\Delta + L\right) - r\left(-\tfrac{xr}{5} + L\right) = 0,$$

d. h.

$$f\vartheta = \sum(G + Z + L) \quad \text{und} \quad (f\vartheta, l^6)^{12}$$

ist daher auszulassen.

Ebenso sind die Invarianten 5, 6, 7 reducibel. Die Identitäten $\begin{pmatrix} r & \varkappa & g \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} g & r & \varkappa \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ geben:

$$g^2 - r \cdot (g\varkappa)^2 = 2[(rg)^1\varkappa]^1 + \tfrac{1}{3}\,\varkappa \cdot (rg)^2.$$

Nun findet man aus $\begin{pmatrix} r & \varkappa & r \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(gr)_1 = \lambda + L \quad \text{und} \quad ((gr)^1\varkappa)_1 = (\lambda\varkappa)_1 + L.$$

$\lambda$ ist aber auch Functionaldeterminante und man hat daher nach einem bekannten Satz (Clebsch: Bin. Formen, Seite 117):

$$(\lambda\varkappa)_1 = \tfrac{1}{6}\,\varkappa\mu - \tfrac{1}{2}\,\tau\Delta$$

und endlich

$$g^2 - r(g\varkappa)^2 = -\tfrac{1}{3}\,\varkappa\mu + \tau\Delta + \tfrac{1}{3}\,\varkappa(rg)^2.$$

Man hat nun nicht nöthig die restirenden Covarianten $(g\varkappa)^2$ und $(rg)^2$ besonders zu untersuchen. Eine Abzählung unter den 29 Formen $A_i$ ergiebt

$$\begin{cases} (g\varkappa)^2 = (7, 7) = c \cdot pr + L, \\ (gr)^2 = (8, 4) = d \cdot \mu + L. \end{cases}$$

Dieses Verfahren wird von nun an bei den meisten Fällen sicher und schnell zur Aufstellung der gewünschten Syzyganten führen. Es ist daher schliesslich:

$$g^2 = \sum (G + Z + L)$$

und demnach $(g^2, l^5)^{10}$ reducibel.

Ferner geben $\begin{pmatrix} f & \varkappa & \alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \varkappa \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ zusammen die auch anderweit zu erhaltende Relation

$$\varepsilon \cdot \alpha = ((\varkappa\alpha)\,f)_1 + ((f\alpha)\,\varkappa)_1.$$

Seite 41 finden wir nun bei Gordan:

$$\begin{cases} (f\alpha) = +\tfrac{6}{5}\,(\eta r)^2 - \tfrac{9}{7}\,(gr)_1 + L, \\ (\varkappa\alpha) = -\tfrac{3}{5}\,r\tau + L. \end{cases}$$

Benutzen wir die oben gefundene Gleichung $(gr)^1 = \lambda + L$, so giebt:

$$\begin{pmatrix} r & \varkappa & r \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} : (\eta r)^2 = -\tfrac{3}{7}\,\lambda + L,$$

und es wird

$$(f\alpha)_1 = -\tfrac{9}{5} + L$$

und

$$\varepsilon \cdot \alpha = -\tfrac{3}{5}\,(r\tau, f)_1 - \tfrac{9}{5}\,(\lambda\varkappa)_1 + L.$$

Die von Gordan pag. 40 gegebene Formel $(r\tau, \varphi)^{\varrho}$ liefert

$$(r\tau, f)_1 = \tfrac{3}{5}\,\tau \cdot (rf)_1 + \tfrac{2}{5}\,r(\tau f)_1,$$

in welcher

$$(fr) = \tfrac{3}{2}\,\Delta + L \quad \text{und} \quad (f\tau)^1 = (7, 7) = c \cdot pr + L$$

zu setzen ist. Es ist also endlich, wenn wir noch den oben gefundenen Werth für $(\lambda\varkappa)_1$ benützen.

$$\varepsilon \cdot \alpha = \sum (G + Z + L)$$

und daher auch:

$$(\varepsilon \cdot \alpha,\ l^5)^{10}$$

auszulassen.

Aus

$$(r\tau)\,f + (\tau f)\,r + (fr)\,\tau = 0$$

folgt sofort:

$$Q \cdot f = \sum (G + Z + L)$$

und die Reducibilität von

$$(fQ,\ l^5)^{10}.$$

Analog giebt: $(r\varkappa)\,\alpha + (\varkappa\alpha)\,r + (\alpha r)\,\varkappa = 0$

$$\eta \cdot \alpha + r\left(-\tfrac{3}{5}\,r\tau + L\right) - \varkappa \cdot \nu = 0,$$

und

$$\eta \cdot \alpha = \sum (G + Z + L).$$

Es ist also auch $(\eta\,.\,\alpha,\ l^4)^8$ auszulassen. Ferner lassen sich zwei, die Producte $r \cdot \varphi$ und $\vartheta \cdot \alpha$ enthaltende Syzyganten entwickeln. Die erste liefert die Identität:

$$(p\alpha)\,r + (\alpha r)\,p + (rp)\,\alpha = 0$$

in der Form:

$$\varphi \cdot r - \nu p - \vartheta\alpha = 0.$$

Die zweite beansprucht noch einmal grössere Rechnung.

Aus $\begin{pmatrix} p & r & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ findet man:

$$\vartheta \cdot \alpha = (p\alpha,\ r)^1 + \tfrac{1}{5}\,\varphi \cdot r,$$

oder da

$$p \cdot \alpha = \tfrac{36}{25}\,(Q\varkappa)^2 + L$$

ist (vergl. Formel 19, pag. 41 von Gordan), so ist

$$\vartheta \cdot \alpha = \tfrac{36}{25}\,((Q\varkappa)^2 r)^1 + \tfrac{1}{5}\,\varphi \cdot r + L.$$

Mit weiterer Benützung der Gordan'schen Formel Seite 41, für $(Q\varkappa)^3$

und der aus der Theorie der cubischen Formen bekannten Gleichungen für $(Qr)^i$ erhält man aus $\begin{pmatrix} Q & \varkappa & r \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$((Q\varkappa)^2 r)^1 + \tfrac{20}{9}\varphi \cdot r = \tfrac{1}{2}(\tau^2\varkappa)^2 - \tfrac{1}{3} R \cdot \varkappa.$$

Da aber $\begin{pmatrix} \tau & \tau & \varkappa \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ giebt:

$$(\tau^2\varkappa)^2 = \mu\tau - \tfrac{1}{8} R\varkappa,$$

so hat man endlich:

$$((Q\varkappa)^2 r))_1 = \tfrac{1}{2}\mu\tau - \tfrac{1}{2} R\varkappa - \tfrac{20}{9}\varphi \cdot r$$

und

$$\vartheta \cdot \alpha = \tfrac{18}{25}\mu\tau - \tfrac{18}{25} R \cdot \varkappa - 3\varphi \cdot r + L.$$

Verbinden wir diese beiden eben erhaltenen Syzyganten, so sieht man dass $\vartheta \cdot \alpha$ und $\varphi \cdot r$ Ausdrücke von der Form sind

$$\sum (G + J + L)$$

und dass mithin $(\vartheta \cdot \alpha, l^3)^6$ und $(\varphi \cdot r, l^3)^6$ auszulassen sind.

Leicht ergeben sich die Ausdrücke für die Producte $r \cdot \varrho$ und $Q \cdot \alpha$. Aus

$$(\tau\alpha)\, r + (\alpha r)\, \tau + (r\tau)\, \alpha = 0$$

hat man sofort:

$$\varrho \cdot r - \nu\tau + Q\alpha = 0.$$

Aus $\begin{pmatrix} r & Q & p \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat man:

$$-\tfrac{1}{2}(\tau^2 p)^2 + \tfrac{1}{3} R \cdot p = L + \tfrac{2}{3}\alpha \cdot Q.$$

Berücksichtigt man den von Gordan Seite 41 gegebenen Ausdruck für $(p\tau)^2$, so giebt $\begin{pmatrix} \tau & \tau & p \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$(\tau^2 p)^2 = -\tfrac{2}{5}\nu\tau - \tfrac{1}{3} Rp + L.$$

Es ist daher $Q\alpha$ und damit auch $\varrho r$ von der Form:

$$\sum (G + J + L)$$

und demnach

$$(Q\alpha, l^2)^4 \quad \text{und} \quad (r \cdot \varrho, l^2)^4$$

auszulassen.

Es bleiben daher nur von Formen $(20, i)$:

$$\frac{(20, 0)}{1)\ (f\varepsilon, l^8)^{16}}$$
$$2)\ A$$

## Formen 22. Grades.

Hier liefert das Gordan'sche Verfahren die 10 Invarianten

1) $(f\gamma,\ l^9)^{15}$ 4) $(\eta\cdot g,\ l^6)^{12}$ 7) $(f\varrho,\ l^4)^5$ 10) $(\alpha\cdot\varrho,\ l)^2$
2) $(\varepsilon\cdot g,\ l^7)^{14}$ 5) $(f\varphi,\ l^5)^{10}$ 8) $(gQ,\ l^4)^5$
3) $(\gamma\cdot\alpha,\ l^6)^{12}$ 6) $(g\vartheta,\ l^5)^{10}$ 9) $(\alpha\varphi,\ l^2)^4$

Von diesen sind aber nur die 1., 9. und 10. irreducibel. Aus

$$(f\varkappa)\,\alpha+(\varkappa\alpha)\,f+(\alpha f)\,\varkappa=0$$

folgt sofort:

$$\gamma\cdot\alpha=\sum(G+Z+L)$$

und die Ueberflüssigkeit der dritten. Aus

$$(r\varkappa)\,g+(\varkappa g)\,r+(gr)\,\varkappa=0$$

ergiebt eine Abzählung leicht das Gleiche für die vierte. Denn es ist

$$(\varkappa g)=(7,9)=c\cdot f\tau+L$$

und

$$(gr)=(8,6)=L+d\cdot\lambda.$$

Aus den Identitäten

$$(p\alpha)\,f+(\alpha f)\,p+(fp)\,\alpha=0$$

und

$$(pr)\,g+(rg)\,p+(gp)\,r=0$$

folgt sofort die Ueberflüssigkeit von $(f\cdot\varphi,\ l^5)^{10}$ und wegen

$$(rg)=d\lambda+L\quad\text{und}\quad(gp)=(9,7)=L$$

auch diejenige der 6. Invariante. Das Ausscheiden der 7. und 8. ergiebt sich aus den Identitäten:

$$(\tau\alpha)\,f+(\alpha f)\,\tau+(f\tau)\,\alpha=0;\qquad(r\tau)\,g+(\tau g)\,r+(gr)\,\tau=0,$$

weil

$$(f\tau)=(7,7)=c\cdot pr+L;\qquad(f\alpha)=d\lambda+L;$$
$$(\tau g)=(11,5)=e\cdot p\alpha+L$$

ist. Eine kleine Rechnung verlangt nur das Reduciren der 2. Invariante. Da $(fg)^1$ Functionaldeterminante ist, so ist nach einem bekannten Satze:

$$((fg)^1\,\varkappa)_1=\tfrac{1}{10}\,(fg)^2\cdot\varkappa+\tfrac{1}{2}\,g\cdot\varepsilon-\tfrac{1}{2}\,f\cdot(g\varkappa)_2.$$

Bezeichnen wir nun mit $\Pi$ nachfolgend immer eine Bildung, die sich durch ein Aggregat von zerfallenden Gliedern und Gliedern $L$ ersetzen lässt, so ist $(fg)^1$ als Form

$(6,10)=d\cdot p\varkappa+L$, $(g\varkappa)_2=(7,7)=\Pi$, $(fg)_2=(6,8)=c\cdot\beta+\Pi$,

wie man durch Abzählung aus den 29 Gordan'schen Formen erhält. Daher ist:

$$g\cdot\varepsilon=\sum(Z+G+L)+2d\cdot(p\varkappa,\ \varkappa)_1.$$

$\begin{pmatrix} p & \varkappa & \varkappa \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ zeigt aber, dass

$$(p\varkappa,\ \varkappa)_1 = -\frac{2}{5}\beta\varkappa$$

ist, daher ist

$$g \cdot \varepsilon = \sum (Z + G + L)$$

und auch die 2. Invariante reducibel. Es bleiben daher die 3 Invarianten:

$$\frac{(22, 0)}{\begin{array}{l} 1)\ (f \cdot \gamma,\ l^9)^{18} \\ 2)\ (\alpha \cdot \varphi,\ l^2)^4 \\ 3)\ (\alpha\varrho \cdot l)^2. \end{array}}$$

## Formen 23. Grades.

$$\frac{(23, 1)}{h}$$

## Formen 24. Grades.

Wir erhalten die 9 Invarianten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $(\varepsilon^2,\ l^9)^{18}$; | 3) $(\gamma \cdot g,\ l^8)^{16}$; | 5) $(\varepsilon\vartheta,\ l^7)^{14}$ | 6) $(\varepsilon Q,\ l^6)^{12}$ |
| 2) $(rT,\ l^9)^{18}$; | 4) $(\varepsilon\eta,\ l^8)^{16}$; | — | — |

7) $(g \cdot \varphi,\ l^4)^8$
8) $(g\varrho,\ l^3)^6$
9) $(r\omega,\ l^2)^4$.

Die Zerlegung der ersten derselben bedarf noch einiger Rechnung. Es ist:

$$((f\varepsilon)^1\ \varkappa)^1 = -\frac{1}{14}\varkappa(a\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon(a\varkappa)^2 - \frac{1}{2}a(\varepsilon\varkappa)^2.$$

Da aber wegen $\begin{pmatrix} a & \varkappa & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$(f\varepsilon)^1 = (\varkappa H)^1 + L$$

ist, so hat man auch

$$((f\varepsilon)^1\ \varkappa)^1 = -\frac{9}{14}\varkappa(H\varkappa)_2 + \frac{1}{2}H \cdot \Delta,$$

und durch Verbindung beider:

$$\varepsilon^2 = -\frac{9}{7}\varkappa(H\varkappa)^2 + H \cdot \Delta + \frac{1}{7}\varkappa(a\varepsilon)^2 + f \cdot (\varepsilon\varkappa)^2.$$

Es ist aber

$(H\varkappa)_2$ und $(a\varepsilon)^2 = (4, 12) = \Pi$ und $(\varepsilon\varkappa)^2 = (5, 11) = \Pi$

und daher

$$\varepsilon^2 = \sum (G + Z + L) \quad \text{und } (\varepsilon^2,\ l^9)^{15}$$

reducibel.

2) Wegen

$$(Hf)\, r + (fr)\, H + (rH)\, f = 0$$

und

$$(fr)_1 = \tfrac{3}{2}\,\Delta + L, \qquad (rH) = (5, 11) = \Pi,$$

ist

$$T \cdot r = \sum (G + Z + L).$$

3) Aus

$$(f\varkappa)\, g + (\varkappa g)\, f + (gf)\, \varkappa = 0$$

und

$$(\varkappa g) = (7, 9) = \Pi, \qquad (fg) = (6, 10) = \Pi$$

folgt dasselbe für $\gamma \cdot g$.

4) Durch

$$(r\varkappa)\, \varepsilon + (\varkappa\varepsilon)\, r + (\varepsilon r)\, \varkappa = 0$$

und

$$(\varkappa\varepsilon) = (5, 13) = \Pi; \qquad (\varepsilon r) = (6, 8) = c \cdot \beta + \Pi$$

wird $\eta \cdot \varepsilon$ reducirt.

5) Die Identität:

$$(pr)\, \varepsilon + (r\varepsilon)\, p + (\varepsilon p)\, r = 0$$

und die Relationen für $(\varepsilon r)$ und $(\varepsilon p) = (7, 11) = \Pi$ zeigen, dass $(\vartheta \cdot \varepsilon,\ l^7)^{14}$ auszulassen ist.

6) $$(r\tau)\, \varepsilon + (\tau\varepsilon)\, r + (\varepsilon r)\, \tau = 0$$

in Verbindung mit

$$(\tau\varepsilon) = (9, 9) = \Pi,$$

liefert die Relation

$$Q \cdot \varepsilon = \sum (G + Z + L).$$

Wir haben ferner:

7) $$(p\alpha)\, g + (\alpha g)\, p + (gp)\, \alpha = 0$$

oder

$$\varphi \cdot g + p \cdot (12, 4) + \alpha \cdot (9, 7) = 0,$$

worin $(12, 4)$ und $(9, 7)$ aber $\Pi$ sind.

8) $$(\tau\alpha)\, g + (\alpha g)\, \tau + (g\tau)\, \alpha = 0,$$

$$\varrho \cdot g + \tau \cdot (12, 4) + \alpha \cdot (11, 5) = 0,$$

wo $(11, 5)$ auch ein $\Pi$ ist.

9) $$(\nu\alpha)\, r + (\alpha r)\, \nu + (r\nu)\, \alpha = 0,$$

$$\omega \cdot r - \nu^2 + \alpha \cdot (13, 3) = 0, \qquad (13, 3) = \Pi.$$

Die letzten 3 Identitäten beweisen auch das Ausfallen der letzten 3 Invarianten. Es bleiben daher *keine Formen* 24. *Grades* übrig.

## Formen 25. Grades.

$$\frac{(25, 1)}{(hl)^1}$$

## Formen 26. Grades.

Nach Gordan erhält man die Invarianten

1) $(fT, l^{11})^{22}$; 2) $(\gamma \cdot \varepsilon, l^{10})^{20}$; 3) $(T\alpha, l^8)^{16}$; 4) $(\varepsilon \cdot \varphi, l^6)^{12}$

$$\begin{cases} 5)\ (\varepsilon \cdot \varrho, l^5)^{10} \\ 6)\ (\eta \cdot \varphi, l^5)^{10} \end{cases} \qquad \begin{cases} 7)\ (f\omega, l^4)^8 \\ 8)\ (\eta \cdot \varrho, l^4)^8 \\ 9)\ (\vartheta\varphi, l^4)^8 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 10)\ (\vartheta\varrho, l^3)^6 \\ 11)\ (Q\varphi, l^3)^6 \end{matrix}$$

$$12)\ (Q \cdot \varrho, l^2)^4 \qquad 13)\ (\alpha \cdot \omega, l)^2.$$

Man erhält zu diesen 13 Invarianten die entsprechenden Syzyganten:

2) $$(f\varkappa)\,\varepsilon + (\varkappa\varepsilon)\,f + (\varepsilon f)\,\varkappa = 0$$

oder

$$\gamma \cdot \varepsilon + f \cdot (5, 13) + \varkappa \cdot (4, 14) = 0,$$

wo (5, 13) und (4, 14) Formen $\Pi$ sind.

3) $$(Hf)\,\alpha + (f\alpha)\,H + (\alpha H)\,f = 0$$

oder

$$T \cdot \alpha + H \cdot (c \cdot \lambda + L) + (9, 9) \cdot f = 0; \qquad (9, 9) = \Pi.$$

4) $$(p\alpha)\,\varepsilon + (\alpha\varepsilon)\,p + (\varepsilon p)\,\alpha = 0;$$

d. i.

$$\varphi \cdot \varepsilon + p \cdot (10, 8) + \alpha \cdot (7, 11) = 0;$$

wo (10, 8) und (7, 11) $\Pi$ sind.

5) $$(\tau\alpha)\,\varepsilon + (\alpha\varepsilon)\,\tau + (\varepsilon\tau)\,\alpha = 0,$$

d. i.

$$\varrho \cdot \varepsilon + \tau \cdot (10, 8) + \alpha \cdot (9, 9) = 0;$$

6) $$(p\alpha)\,\eta + (\alpha\eta)\,p + (\eta p)\,\alpha = 0,$$

d. i.

$$\varphi \cdot \eta + p \cdot (12, 6) + \alpha \cdot (9, 9) = 0; \qquad (12, 6) = \Pi;$$

7) $$(\nu\alpha)\,f + (\alpha f)\,\nu + (f\nu)\,\alpha = 0,$$

d. i.

$$\omega \cdot f + \nu\,(c \cdot \lambda + L) + \alpha \cdot (11, 7) = 0; \qquad (11, 7) = \Pi;$$

8) $$(\tau\alpha)\,\eta + (\alpha\eta)\,\tau + (\eta\tau)\,\alpha = 0,$$

d. i.

$$\varrho \cdot \eta + \tau \cdot (12, 6) + \alpha \cdot (11, 7) = 0.$$

9) $$(p\alpha)\,\vartheta + (\alpha\vartheta)\,p + (\vartheta p)\,\alpha = 0,$$

d. i.

$$\varphi \cdot \vartheta + p(14, 4) + \alpha(11, 7) = 0; \qquad (14, 4) = c \cdot \psi + \Pi.$$

10) $$(\tau\alpha)\,\vartheta + (\alpha\vartheta)\,\tau + (\vartheta\tau)\,\alpha = 0,$$

d. i.

$$\varrho\cdot\vartheta + \tau\cdot(14,4) + \alpha(13,5) = 0; \qquad (13,5) = \Pi.$$

11) $$(r\tau)\,\varphi + (\tau\varphi)\,r + (\varphi r)\,\tau = 0;$$

d. i.

$$Q\cdot\varphi + r\cdot(17,3) + \tau\cdot(14,4) = 0; \qquad (17,3) = \Pi.$$

12) $$(r\tau)\,\varrho + (\tau\varrho)\,r + (\varrho r)\,\tau = 0,$$

d. i.

$$Q\cdot\varrho + r\cdot(19,1) + \tau\cdot(16,2) = 0,$$

wo $(19,1) = \Pi$ und $(16,2) = c\cdot\sigma + \Pi$ ist.

Es bleiben daher nur:

$$\frac{(26,0)}{\begin{array}{l}1)\ (fT, l^{11})^{22}\\ 2)\ (\alpha\cdot\omega, l)^2\end{array}}$$

## Formen 28. Grades.

Unser Verfahren liefert die Invarianten:

1) $(Tg, l^{10})^{20}$, 2) $(\gamma\cdot\varphi, l^7)^{14}$, 3) $(\gamma\cdot\varrho, l^6)^{12}$,

$\begin{cases}4)\ (g\omega, l^3)^6\\ 5)\ (\varphi^2, l^3)^6\end{cases}$ 6) $(\varphi\varrho, l^2)^4$, 7) $(\varrho^2 l)^2$.

Die Ueberflüssigkeit aller dieser Bildungen ergiebt sich sofort aus folgenden Syzyganten;

1) $$(Hf)\,g + (fg)\,H + (gH)\,f = 0,$$

oder

$T\cdot g + H\cdot(6,10) + f\cdot(7,13) = 0$; $(6,10)$ und $(7,13)$ sind $\Pi$.

2) $$(f\varkappa)\,\varphi + (\varkappa\varphi)\,f + (\varphi f)\,\varkappa = 0$$

oder

$\gamma\cdot\varphi + f\cdot(13,7) + \varkappa\cdot(12,8) = 0$; $(13,7)$ und $(12,8)$ sind $\Pi$.

3) $$(f\varkappa)\,\varrho + (\varkappa\varrho)\,f + (\varrho f)\,\varkappa = 0$$

oder

$\gamma\cdot\varrho + f\cdot(15,5) + \varkappa(14,6) = 0$; $(15,5)$ und $(14,6)$ sind $\Pi$.

4) $[(\nu\alpha)\,g] = 0$, wie wir von jetzt an die stets angewandte Identität $(\nu\alpha)\,g + (\alpha g)\,\nu + (g\nu)\,\alpha = 0$ der Kürze wegen immer bezeichnen wollen, oder

$$\omega\cdot g + (12,4)\,\nu + \alpha\cdot(15,5) = 0.$$

5) $[(p\alpha)\,\varphi] = 0$ oder: $\varphi^2 + p\cdot(18,2) + \alpha\cdot(15,5) = 0$.

6) $[(\tau\alpha)\,\varphi] = 0$ oder: $\varrho \cdot \varphi + \tau \cdot (18, 2) + \alpha \cdot (17, 3) = 0,$

7) $[(\tau\alpha)\,\varrho] = 0$ oder: $\varrho^2 + \tau \cdot (20, 0) + \alpha \cdot (19, 1) = 0.$

Es fallen daher alle Formen $(28, i)$ aus.

## Formen 30. Grades.

Man erhält die Invarianten:

1) $(\varepsilon T, l^{12})^{24}$; 2) $(\varepsilon\omega, l^{5})^{10}$; 3) $(\eta\omega, l^{4})^{8}$; 4) $(\vartheta\omega, l^{3})^{6}$;

$$\begin{cases} 5)\ (rh, l^2)^4 \\ 6)\ (Q\omega, l^2)^4 \end{cases} \quad 7)\ B.$$

Das Ausfallen der 6 ersten ergiebt sich aus nachfolgenden Identitäten:

1) $[(Hf)\,\varepsilon] = 0$ oder: $T\varepsilon + H \cdot (4, 14) + f \cdot (5, 17) = 0;$

$$(4, 14) = c \cdot \xi + \Pi.$$

2) $[(\nu\alpha)\,\varepsilon] = 0$ oder: $\omega \cdot \varepsilon + \nu \cdot (10, 8) + \alpha \cdot (13, 9) = 0,$

3) $[(r\varkappa)\,\omega] = 0$ oder: $\eta \cdot \omega + r \cdot (19, 5) + \varkappa \cdot (20.\,2) = 0,$

4) $[(pr)\,\omega] = 0$ oder: $\vartheta \cdot \omega + p \cdot (20, 2) + r \cdot (21, 3) = 0,$

5) $[(\sigma\alpha)\,r] = 0$ oder: $h \cdot r - \sigma \cdot \nu + \alpha \cdot (19, 3) = 0,$

6) $[(r\tau)\,\omega] = 0$ oder: $Q \cdot \omega + r \cdot (23, 1) + \tau \cdot (20, 2) = 0;$

$$(23, 1) = c \cdot h + \Pi,$$

ist also auf 5) zurückführbar. Es *bleibt daher* nur die *Invariante B.*

## Auszulassende Formen vom 32. bis 48. Grad.

Man erhält nach Gordan ausser diesen noch 20 Invarianten höherer Grade, deren Ueberflüssigkeit sich aus den beigefügten Syzyganten ergiebt.

I. $(32, 0)$.

1) $(T \cdot \varphi, l^9)^{18}$; $[(Hf)]\,\varphi = 0$

oder:

$$T \cdot \varphi + H \cdot (12, 8) + f \cdot (13, 11) = 0.$$

2) $(T \cdot \varrho, l^8)^{16}$; $[(Hf)\,\varrho] = 0$

oder:

$$T \cdot \varrho + H \cdot (14, 6) + f \cdot (15, 9) = 0.$$

3) $(\gamma \cdot \omega, l^6)^{12}$; $[(f\varkappa)\,\omega] = 0$

oder:

$$\gamma \cdot \omega + f \cdot (19, 5) + \varkappa \cdot (18, 6) = 0.$$

4) $(f \cdot h, l^4)^8$; $[(\sigma\alpha)\,f] = 0$

oder:

$$f \cdot h + \sigma(c \cdot \lambda + L) + \alpha \cdot (17, 7) = 0.$$

5) $(\varphi \cdot \omega,\ l^2)^4;\quad [(p\alpha)\,\omega] = 0$

oder:

$$\varphi \cdot \omega + p(24, 0) + \alpha(21, 3) = 0.$$

6) $(\alpha \cdot h,\ l)^2;\quad [(\nu\varrho)\,\alpha] = 0$ *)

oder:

$$h \cdot \alpha + A \cdot \nu - \omega\varrho = 0.$$

7) $(\varrho \cdot \omega,\ l)^2;\quad (\tau\alpha)\,\omega + (\alpha\omega)\,\tau + (\omega\tau)\,\alpha = 0$ **)

oder:

$$h \cdot \alpha + \omega\varrho + \tau \cdot (24, 0) = 0.$$

Die beiden letzten bestimmen $h \cdot \alpha$ und $\varrho\omega$ in der gewünschten Weise.

II. $(34, 0)$.

1) $(gh,\ l^3)^6;\quad [(\sigma\alpha)\,g] = 0$

oder:

$$h \cdot g + \sigma \cdot (12, 4) + \alpha \cdot (21, 5) = 0.$$

III. $(36, 0)$.

1) $(T\omega,\ l^8)^{16};\quad [(Hf)\,\omega] = 0$

oder:

$$T \cdot \omega + H \cdot (18, 6) + f \cdot (19, 9) = 0.$$

2) $(\varepsilon h,\ l^5)^{10};\quad [(\sigma\alpha)\,\varepsilon] = 0$

oder:

$$h \cdot \varepsilon + \sigma \cdot (10, 8) + \alpha \cdot (19, 9) = 0.$$

3) $(\eta h,\ l^4)^8;\quad [(r\varkappa)\,h] = 0$

oder:

$$\eta \cdot h + r \cdot (25, 5) + \varkappa \cdot (26, 2) = 0.$$

4) $(\vartheta h,\ l^3)^6;\quad [(pr)\,h] = 0$

oder:

$$\vartheta \cdot h + p \cdot (26, 2) + r \cdot (27, 3) = 0.$$

5) $(Qh,\ l^2)^4;\quad [(r\tau)\,h] = 0$

oder:

$$Q \cdot h + r \cdot (29, 1) + \tau \cdot (26, 2) = 0.$$

6) $(\omega^2,\ l)^2;\quad [(\nu\alpha)\,\omega] = 0$

oder:

$$\omega^2 + \nu \cdot (24, 0) + \alpha \cdot (27, 1) = 0.$$

---

*) Aus $\begin{pmatrix} \tau & \alpha & \nu \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} r & \alpha & \tau \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ folgt $h = (\nu\varrho)^1$.

**) Aus $\begin{pmatrix} r & \alpha^2 & \tau \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ erhält man $h = (\omega\tau)$.

IV. (38, 0).

1) $(\gamma \cdot h,\ l^6)^{12};\quad [(f\varkappa)\, h] = 0$

d. i.:

$$\gamma \cdot h + f \cdot (25, 5) + \varkappa \cdot (24, 6) = 0.$$

2) $(\varphi \cdot h,\ l^2)^4;\quad [(p\alpha)\, h] = 0$

d. i.:

$$\varphi \cdot h - p \cdot B + \alpha \cdot (27, 3) = 0.$$

3) $(\varrho \cdot h,\ l)^2;\quad [(\tau\alpha)\, h] = 0$

d. i.:

$$\varrho \cdot h - \tau \cdot B + \alpha \cdot (29, 1) = 0.$$

V. (42, 0).

1) $(T \cdot h,\ l^8)^{16};\quad [(Hf)\, h] = 0$

d. i.:

$$T \cdot h + H \cdot (24, 6) + f \cdot (25, 9) = 0.$$

2) $(\omega \cdot h,\ l)^2;\quad [(\sigma\alpha)\, \omega] = 0$

d. i.:

$$h \cdot \omega + \sigma \cdot (24, 0) + \alpha \cdot (33, 1) = 0.$$

VI. (48, 0).

1) $(h^2 l)^2;\quad [(\sigma\alpha)\, h] = 0$

d. i.:

$$h^2 - \sigma \cdot B + \alpha \cdot (39, 1) = 0.$$

Zum Schlusse geben wir noch eine Uebersicht über die erhaltenen Formen: Wir entnehmen derselben, dass die von Herrn Prof. Sylvester im American Journal II. Bd., pag. 230 veröffentlichte Tabelle meist nur in den höchsten Ordnungen jedes Grades von der unsrigen abweicht. Namentlich enthält die erstere keine der Formen der letzten schiefen Reihe von (5, 13) bis (16, 2). Aus mir gewordenen brieflichen Mittheilungen des Herrn Sylvester entnehme ich aber, dass es demselben später gelungen ist, die Existenz einer Form (5, 13) nachzuweisen, (vergl. hierüber besonders eine Note von Herrn Hammond in den Proceedings of the London Math. Soc. XIV, 85—88) und dass er es für wahrscheinlich hält, dass neben seinen Grundformen deshalb noch viele andere vorhanden sind. Weitere Unterschiede sind folgende: Sylvester hat $(10, 4)^3$, $(22, 0)^1$ und keine Formen (13, 3), (18, 2), (19, 1), (20, 0), (23, 1), (25, 1), (26, 0), (30, 0).

## Uebersicht über das volle System.

| Grad in den Coefficienten | Ordnung in den Variabeln | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | | |
| 3 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | | | 1 |
| 4 | 1 | | | | 2 | | 1 | | 2 | | 1 | | | | 1 | |
| 5 | | 1 | | 2 | | 2 | | 2 | | 2 | | | | 1 | | |
| 6 | | | 3 | | 2 | | 2 | | 2 | | | | 1 | | | |
| 7 | | 3 | | 2 | | 4 | | 2 | | | | 1 | | | | |
| 8 | 3 | | 3 | | 3 | | 3 | | | | 1 | | | | | |
| 9 | | 3 | | 5 | | 2 | | | | 1 | | | | | | |
| 10 | | | 4 | | 4 | | | | 1 | | | | | | | |
| 11 | | 5 | | 3 | | | | 1 | | | | | | | | |
| 12 | 6 | | 6 | | | | 1 | | | | | | | | | |
| 13 | | 7 | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | |
| 14 | 4 | | | | 2 | | | | | | | | | | | |
| 15 | | 3 | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 2 | | 3 | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | | 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | 9 | | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | | 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 22 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 26 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 30 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |

Oppenheim a./R., 28. October 1887.

# Der Modul des Maximum Maximorum einer Function $\psi(re^{\varphi i})$ in Bezug auf $\varphi$ und die Anwendung seiner Eigenschaften auf die Reihe von Lagrange.

Von

P. Nekrassoff in Moskau.

## § 1.

Der vorliegende Aufsatz enthält einige Resultate meiner in russischer Sprache abgedruckten Arbeit:*) „Die Reihe von Lagrange".

Setzen wir $z = re^{\varphi i}$. Wenn sich $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ ändert, so wird der *Modulus des Maximum Maximorum* der Function $\psi(z)$ eine Function von $r$ sein; nennen wir diese Function $M(r)$. Cauchy, Rouché und andere haben die Eigenschaften der Function $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange so wie auf andere Reihen angewandt.**) Jedoch ist Verschiedenes in der Anwendung der Eigenschaften von $M(r)$ auf diese Reihen nicht klar gelegt worden. So folgt, z. B. aus einigen Anmerkungen, welche Serret macht, indem er die Eigenschaften der Function $M(r)$ nach Cauchy und Rouché zusammenfasst, dass unter gewissen Bedingungen das Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ und der dazu gehörige Werth $\varrho$ der Variabeln $r$ sich folgendermassen ausdrücken lassen:

$$\mu = \text{mod. } \psi(\zeta), \qquad \varrho = \text{mod. } \zeta, \tag{1}$$

wo $\zeta$ eine Wurzel der Gleichung

$$\psi'(z) = 0 \tag{2}$$

ist.***)

*) Математическій Сборникъ, XII, Москва, 1885.

**) Cauchy: 1) Mémoire sur divers points d'analyse (Mémoires de l'Académie de France, t. VIII, 1829), 2) Résumé d'un mémoire sur la Mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites. (Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. II, 1841).

Eugène Rouché: Mémoire sur la série de Lagrange (Journal de l'Ecole polytechnique, cahier XXXIX, t. XXII, 1862).

***) Serret: Cours d'Algèbre supérieure, t. I, p. 477—480, 4e édition, 1877.

Es erweist sich, dass das im Allgemeinen nicht der Fall ist. Dieser Umstand wird für gewöhnlich ausser Acht gelassen, spielt aber in der Theorie der Lagrange'schen Reihe, wie sie so elegant in der Rouché-schen Abhandlung dargelegt ist, eine grosse Rolle.

Die nachfolgenden Untersuchungen der Function $M(r)$ und ihres Minimums $\mu$ dürften eine wesentliche Ergänzung zu den Cauchy'schen und Rouché'schen Arbeiten liefern.

## I. Die Eigenschaften des Modulus des Maximum Maximorum.

### § 2.

Es möge $\psi(z)$ für alle Werthe von $z$, welche der Ungleichung

$$k < r < k_1 \tag{3}$$

genügen, endlich, continuirlich und eindeutig sein; $r = \text{mod.} z$, $k_1 > k > 0$. Den Modulus der Function $\psi(z)$, welcher von $r$ und $\varphi$ abhängt, wollen wir $R(r, \varphi)$, oder kürzer $R$ nennen.

Solange der Bedingung (3) Genüge geleistet wird, bleibt $R$ endlich und continuirlich und macht bei der Veränderung von $\varphi$ verschiedene Maxima durch, deren jedes eine Function von $r$ ist. Es mögen $M_1(r)$, $M_2(r)$, ... diese Maxima sein. Jede einzelne von diesen Functionen kann dann folgendermassen ausgedrückt werden:

$$M_n(r) = R(r, \varphi_n), \tag{4}$$

wo $\varphi_n$ eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{dR}{d\varphi} = 0 \tag{5}$$

ist.

Das Maximum Maximorum der Function $\psi(z)$ in Bezug auf $\varphi$ ist $M(r)$; diese Function ist daher in der Reihe $M_1(r)$, $M_2(r)$, ... enthalten, und zwar ist:

$$M(r) \geqq M_1(r),\ M(r) \geqq M_2(r), \cdots. \tag{6}$$

Die Bedingungen (6), durch welche $M(r)$ definirt wird, haben auf die analytische Form dieser Function einen eigenthümlichen Einfluss: *Wenn $r$ von $k$ bis $k_1$ variirt, kann die Function $M(r)$ ihre Gestalt ändern, indem sie für den einen Werth von $r$ durch die eine, für einen andern Werth von $r$ durch eine andere Function aus der Reihe: $M_1(r)$, $M_2(r)$, ... dargestellt wird.*

Ehe wir unsere Betrachtungen über die Veränderungen in der Form der Function $M(r)$ anstellen, müssen wir unsere Aufmerksamkeit den Functionen $M_1(r)$, $M_2(r)$, ... zuwenden, welche wir *partielle* Maxima der Function $R$ in Bezug auf $\varphi$ nennen wollen.

§ 3.

Die Anzahl der partiellen Maxima $M_1(r)$, $M_2(r)$, ... der Function $R$ in Bezug auf $\varphi$ bleibt für die verschiedenen Werthe von $r$ nicht constant. Die Veränderung dieser Zahl wird durch Folgendes bedingt:

1) Dadurch, dass bei der Veränderung der Variabeln $r$ von einem Werth zum andern ein partielles Maximum zum Minimum werden kann, und umgekehrt. Es sei z. B.

$$\left[\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right]_{\varphi=\varphi_n} < 0, \quad \text{wenn} \quad r < \varrho,$$

$$\left[\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right]_{\varphi=\varphi_n} > 0, \quad \text{wenn} \quad r > \varrho.$$

Unter solchen Umständen wird $M_n(r)$, solange $r < \varrho$, ein Maximum der Function $R$ sein; wenn hingegen $r > \varrho$, ein Minimum. Es sei bemerkt, dass $\frac{d^2R}{d\varphi^2} = 0$ ist, wenn $\varphi = \varphi_n$ und $r = \varrho$; die Gleichung (5) hat also für $r = \varrho$ zwei gleiche Wurzeln $\varphi_n$.

2) Durch das Verschwinden oder Entstehen eines partiellen Maximums, indem infolge der Veränderung von $r$ eine reelle Wurzel der Gleichung (5) complex wird oder, umgekehrt: eine complexe Wurzel reell. Da alle Coefficienten der Gleichung (5) reell sind, so sind alle complexen Wurzeln dieser Gleichung paarweise conjugirt, und es kann daher eine complexe Wurzel nicht reell, und eine reelle nicht complex werden, ohne zweimal Wurzel von (5) zu sein.

Die Werthe von $r$, bei denen sich die Anzahl der Maxima von $R$ verändert, wollen wir *besondere* Werthe nennen, *besondere* wollen wir auch diejenigen Werthe von $r$ nennen, welche die Derivirten der Function $M_n(r)$, mit irgend einer Ordnung angefangen, unendlich werden lassen. Aus der Gleichung (4) ersieht man, dass dank der Bedingung (3) die Derivirten der Function $M_n(r)$ nur für solche Werthe von $r$ unendlich werden können, bei welchen die Gleichung (5) mehrere gleiche Wurzeln hat.

Alle diese besonderen Werthe von $r$ und die entsprechenden Werthe von $\varphi$ müssen gleichzeitig den zwei Bedingungen genügen:

$$\frac{dR}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2R}{d\varphi^2} = 0. \tag{7}$$

Daher können die Gleichungen (7) im Verein mit den bereits erwähnten, die besondern Werthe von $r$ kennzeichnenden Merkmalen zur Bestimmung dieser Werthe dienen.

Es seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ alle zwischen den Grenzen $k$ und $k_1$ enthaltenen besondern Werthe von $r$, und zwar sei:

$$k < \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < k_1. \tag{8}$$

Es ist klar, dass für alle Werthe von $r$, welche zwischen zwei benachbarten Gliedern dieser Zahlenreihe liegen, die Anzahl der partiellen Maxima von $R$ gleich ist, und sowohl jedes einzelne Maximum als auch alle seine Derivirten nach $r$ endliche und continuirliche Functionen von $r$ sind.

Wenn $r_0$ keiner von den Zahlen $k, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, k_1$ gleich ist, so kann jedes partielle Maximum der Function $R$ für die Werthe von $r$, welche wenig von $r_0$ unterschieden sind, nach der Taylor'schen Formel in die convergente Reihe:

$$(9) \qquad M_n(r) = M_n(r_0) + M_n'(r_0)\frac{r-r_0}{1} + M_n''(r_0)\frac{(r-r_0)^2}{1.2} + \cdots$$

entwickelt werden.

## § 4.

Schreiten wir jetzt zur Untersuchung der Veränderungen in der Gestalt der Function $M(r)$. Es variire $r$ zwischen zwei Zahlen $\varrho_m$ und $\varrho_{m+1}$ aus der Zahlenreihe $k, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, k_1$.

Nehmen wir an, für $\varrho_m < r < \varrho_{m+1}$ gebe es nur zwei partielle Maxima $M_1(r)$ und $M_2(r)$ der Function $R$. Betrachten wir die Gleichung:

$$(10) \qquad M_1(r) - M_2(r) = 0,$$

welche zwischen den Grenzen $\varrho_m$ und $\varrho_{m+1}$ einfache und gleiche Wurzeln haben kann. Unter $r_1, r_2, \ldots$ wollen wir die einfachen, so wie diejenigen Wurzeln verstehn, welche eine ungerade Anzahl von Malen der Gleichung genügen; die letztern wollen wir ungerade-vielfache Wurzeln von (10) nennen. Bei jedem von den Werthen $r_1, r_2, \ldots$ der Variabeln $r$ muss die Function $M(r)$ ihre Gestalt ändern. Da nämlich jedes $r_k$ ungerade-vielfache Wurzel von (10) ist, so kann man die linke Seite von (10) in folgender Weise darstellen:

$$(11) \qquad M_1(r) - M_2(r) = F(r)(r-r_1)^{2s+1},$$

wo $s$ eine ganze Zahl und $F(r)$ eine endliche Function ist, welche bei keinem Werthe von $r$ zwischen den Grenzen $\varrho_m$ und $r_2$ ihr Vorzeichen verändert und für $\varrho = r_1$ nicht gleich 0 wird. Es sei $F(r_1) < 0$. Aus (11) ist leicht ersichtlich, dass

$$(12) \qquad \begin{aligned} M_1(r) - M_2(r) &\geqq 0, \quad \text{wenn} \quad \varrho_m \leqq r \leqq r_1, \\ M_1(r) - M_2(r) &\leqq 0, \quad \text{wenn} \quad r_1 \leqq r \leqq r_2. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$(13) \qquad \begin{aligned} M(r) &= M_1(r) \quad , \quad \text{wenn} \quad \varrho_m \leqq r \leqq r_1, \\ M(r) &= M_2(r) \quad , \quad \text{wenn} \quad r_1 \leqq r \leqq r_2. \end{aligned}$$

Wenn also $r$ den Werth $r_1$ überschreitet, ändert sich die Form von $M(r)$; dasselbe geschieht beim Ueberschreiten eines jeden der Werthe $r_1, r_2, \ldots$.

Jetzt wollen wir annehmen, in den Grenzen $\varrho_m < r < \varrho_{m+1}$ existiren drei verschiedene partielle Maxima $M_1(r)$, $M_2(r)$, $M_3(r)$. Für $r = \varrho_m$ mag $M_1(r)$ den grössten Werth unter diesen drei Functionen haben. Wenn aber für $r = \varrho_m$ die Werthe von zwei oder gar allen drei Functionen gleich sind, so wollen wir annehmen, für den Werth $\varrho_m + \varepsilon$ habe $M_1(r)$ den grössten Werth, wo $\varepsilon$ eine unendlich kleine positive Grösse ist. Wir erhalten dann:

$$(14) \qquad \begin{gathered} M_1(\varrho_m+\varepsilon) > M_2(\varrho_m+\varepsilon), \quad M_1(\varrho_m+\varepsilon) > M_3(\varrho_m+\varepsilon), \\ M(\varrho_m+\varepsilon) = M_1(\varrho_m+\varepsilon). \end{gathered}$$

Betrachten wir jetzt die zwei Gleichungen:

$$(15) \qquad \begin{aligned} M_1(r) - M_2(r) &= 0, \\ M_1(r) - M_3(r) &= 0, \end{aligned}$$

von denen jede einzelne zwischen den Grenzen $\varrho_m$ und $\varrho_{m+1}$ einfache und ungerade-vielfache Wurzeln besitzen kann. Es sei $r_1$ die kleinste von allen diesen Wurzeln. Wenn $\varrho_m \leqq r \leqq r_1$, so erhalten wir offenbar:

$$(16) \qquad M_1(r) - M_2(r) > 0 \quad \text{und} \quad M_1(r) - M_3(r) > 0,$$

sodass

$$(17) \qquad M(r) = M_1(r).$$

Sobald aber $r$ den Werth $r_1$ überschreitet, ändert sich die Gestalt der Function $M(r)$, da für $r > r_1$ wenigstens eine von den Ungleichungen (16) ihre Gültigkeit verliert. $M(r)$ wird daher entweder durch $M_2(r)$ oder durch $M_3(r)$ dargestellt, durch welches von beiden, das hängt davon ab, welcher der beiden Gleichungen (15) die Wurzel $r_1$ eine ungerade Anzahl von Malen genügt. Es sei

$$(18) \qquad M(r_1+\varepsilon) = M_3(r_1+\varepsilon),$$

wo $\varepsilon$ eine unendlich kleine positive Zahl ist. Wenn zwischen den Grenzen $r_1$ und $\varrho_{m+1}$ eine neue Veränderung in der Form von $M(r)$ möglich ist, so entspricht dieselbe der kleinsten einfachen oder ungerade-vielfachen Wurzel der Gleichungen:

$$(19) \qquad \begin{aligned} M_3(r) - M_1(r) &= 0, \\ M_3(r) - M_2(r) &= 0. \end{aligned}$$

Indem wir diesen Plan weiter verfolgen, können wir alle Veränderungen in der Gestalt von $M(r)$ für die Werthe von $r$ zwischen zwei beliebigen $\varrho_m$ und $\varrho_{m+1}$ finden. Es sei noch bemerkt, dass derartige Formveränderungen auch zuweilen stattfinden können, wenn $r$

einige von den Werthen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ überschreitet. Da nun die Gestalt von $M(r)$ für alle Werthe, welche $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ unendlich nahe liegen, ermittelt ist, können auch diese Formveränderungen keine Schwierigkeiten bereiten.

## § 5.

Wenn $r$ einen von den Werthen $r_1, r_2, \ldots$ überschreitet, hört die Function $M(r)$ nicht auf continuirlich zu sein, wohl aber ihre Derivirten, von irgend einer Ordnung an, sodass die zwei Reihen:

$$\begin{matrix} M'(r_1-\varepsilon),\ M''(r_1-\varepsilon), \cdots \\ M'(r_1+\varepsilon),\ M''(r_1+\varepsilon), \cdots \end{matrix} \tag{20}$$

wenn $\varepsilon$ gleich Null wird, nicht identisch werden.

Anmerkung: Es können Störungen in der Continuität von $M'(r)$, $M''(r)$ u. s. w. auch durch andere Umstände hervorgerufen werden. Es ist möglich, dass die Derivirten von $M(r)$ für $r = \varrho'$ von irgend einer Ordnung ab unendlich werden; ohne dass $M(r)$ bei diesem Werthe von $r$ seine Form ändert. Wenn dieser Fall eintritt, so muss $\varrho'$ einem von den oben genannten besonderen Werthen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ des Modulus $r$ gleich sein. Dann lässt sich $M(r)$ durch folgende convergente Reihe ausdrücken:

$$M(r) = M(\varrho') + A(r-\varrho')^{\frac{1}{m}} + B(r-\varrho')^{\frac{2}{m}} + \cdots, \tag{21}$$

wo $m$ eine ganze ungerade Zahl ist. Die von einander verschiedenen unter den unendlich grossen Gliedern der Reihen:

$$\begin{matrix} M'(\varrho'-\varepsilon),\ M''(\varrho'-\varepsilon), \cdots \\ M'(\varrho'+\varepsilon),\ M''(\varrho'+\varepsilon), \cdots \end{matrix} \tag{22}$$

werden sich durch ihr Vorzeichen unterscheiden.

Die in dieser Anmerkung geschilderten Störungen in der Continuität der Derivirten von $M(r)$ spielen eine ebenso grosse Rolle, wie die Continuitätsstörungen, welche von Veränderungen in der Form von $M(r)$ begleitet sind.

Offenbar ist die Anzahl aller Continuitätsstörungen der Derivirten von $M(r)$ endlich, sobald $\psi(s)$ eine rationale algebraische Function ist.

## § 6.

Wenn $\varepsilon$ unendlich klein ist und es bestehen die beiden Ungleichungen:

$$M(\varrho-\varepsilon) > M(\varrho) \quad \text{und} \quad M(\varrho+\varepsilon) > M(\varrho) \tag{23}$$

oder die beiden folgenden:

$$M(\varrho-\varepsilon) < M(\varrho) \quad \text{und} \quad M(\varrho+\varepsilon) < M(\varrho), \tag{24}$$

so nennen wir $\mu = M(\varrho)$ im ersten Falle ein Minimum, im zweiten — ein Maximum der Function $M(r)$, und zwar ein *besonderes* oder ein *gewöhnliches*, je nachdem dem Werth $\varrho$ der Variabeln $r$ eine Continuitätsstörung der Derivirten von $M(r)$ entspricht oder nicht.

*Theorem: Es sei $\psi(z)$ in den Grenzen*

$$k < \text{mod. } z < k_1$$

*endlich, continuirlich und eindeutig. Dann kann $M(r)$, der Modulus des Maximum Maximorum der Function $\psi(z)$, in den Grenzen $k < r < k_1$ kein Maximum haben.*

Beweis: Nehmen wir das Gegentheil an, dass also für $r = \varrho$ die Function $M(r)$ ein Maximum $M(\varrho)$ hat. Es sei $\omega$ eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{dR(\varrho, \varphi)}{d\varphi} = 0,$$

welche dem Maximum Maximorum der Function $R(\varrho, \varphi)$ in Bezug auf $\varphi$ entspricht. Daraus folgt:

$$M(\varrho) = R(\varrho, \omega) = \text{mod. } \psi(z_0), \tag{25}$$

wo

$$z_0 = \varrho e^{\omega i}. \tag{26}$$

In der Zahlenreihe

$$\psi'(z_0), \ \psi''(z_0), \cdots$$

sei $\psi^{(n)}(z_0)$ die erste Function, welche nicht gleich Null ist; $n \geqq 1$. Wenn $h$ unendlich klein ist, erhalten wir:

$$\psi(z_0 + h) = \psi(z_0) + \frac{h^n}{1.2 \ldots n} \psi^{(n)}(z_0)(1 + \lambda),$$

wo $\lambda$ unendlich klein ist und gleichzeitig mit $h$ verschwindet. Wenn wir daher unter $P$ und $\Omega$ Modulus und Argument der Function

$$\frac{\psi^{(n)}(z_0)}{1.2 \ldots n \psi(z_0)}$$

verstehen und

$$h = \delta e^{-\frac{\Omega}{n} i}$$

setzen, wo $\delta$ der unendlich kleine Modulus von $h$ ist, so erhalten wir:

$$\varphi\left(z_0 + \delta e^{-\frac{\Omega}{n} i}\right) = \psi(z_0)\,[1 + \delta^n P(1 + \lambda)],$$

woraus folgt:

$$\text{mod. } \psi\left(z_0 + \delta e^{-\frac{\Omega}{n} i}\right) = M(\varrho)\,[1 + \delta^n P(1 + \delta')],$$

wo $\delta$ eine unendlich kleine reelle Zahl ist, welche sich gleichzeitig mit $h$ der Null nähert. Die letzte Gleichung zeigt: wenn $\delta$ positiv ist, so gilt:

$$\text{mod. } \psi\left(z_0 + \delta e^{-\frac{\Omega i}{n}}\right) > M(\varrho),$$

oder, wenn wir unter $\varrho + \varepsilon$ und $\omega'$ Modulus und Argument von $z_0 + \delta e^{-\frac{\Omega i}{n}}$ verstehen:

$$R(\varrho+\varepsilon, \omega') > M(\varrho).$$

Da nun $M(\varrho+\varepsilon)$ das Maximum Maximorum der Function $R(\varrho+\varepsilon, \varphi)$ ist, so folgt:

$$M(\varrho+\varepsilon) > M(\varrho), \tag{27}$$

was unserer Voraussetzung widerspricht. Also kann $M(r)$ in den Grenzen $k$ und $k_1$ keine Maxima haben.

Aus dem bewiesenen Theorem folgt unmittelbar:

I) *Wenn $\psi(z)$ den genannten Anforderungen genügt, so hat $M(r)$ zwischen den Grenzen $k$ und $k_1$ höchstens ein Minimum.*

II) *Wenn $\psi(z)$ den genannten Anforderungen genügt, und es ist: $M(k) = \infty$, $M(k_1) = \infty$, so erleidet $M(r)$ zwischen den Grenzen $k$ und $k_1$ ein Minimum.*

Es sei $\mu = M(\varrho)$ ein Minimum der Function $M(r)$, wo $k < \varrho < k_1$. Ist dieses Minimum ein gewöhnliches, so erhalten wir:

$$M'(\varrho) = 0. \tag{28}$$

Ist aber das Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ ein besonderes, so kann die Derivirte $M'(\varrho)$ zwei verschiedene Werthe haben, welche als Grenzwerthe von $M'(\varrho-\varepsilon)$ und $M'(\varrho+\varepsilon)$ bestimmt sind. Diese beiden Grenzwerthe können von Null verschieden sein und müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben.

## § 7.

Wir wollen im Folgenden mit $\mu$ und $\varrho$ immer das Minimum der Function $M(r)$ und den dazu gehörigen Werth der Variabeln $r$ bezeichnen.

Hat die Gleichung

$$\psi'(z) = 0 \tag{29}$$

eine Wurzel $\zeta$, welche die Bedingungen:

$$\mu = \text{mod. } \psi(\zeta), \quad \varrho = \text{mod. } \zeta \tag{30}$$

erfüllt, so wollen wir dieses Minimum $\mu = M(\varrho)$ ein *kritisches* Minimum von $M(r)$ nennen. Wenn die Gleichung (29) hingegen keine Wurzeln besitzt, welche die Bedingung (30) erfüllen, so nennen wir $\mu$ ein *nicht kritisches* Minimum der Function $M(r)$.

Bei der Anwendung der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange ist der Umstand, ob das Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ ein kritisches oder ein nicht kritisches ist, von der grössten Wichtigkeit.

Setzen wir:

$$z = re^{\varphi i}, \quad \psi(z) = Re^{\Phi i},$$

so erhalten wir, indem wir die letzte Gleichung nach $\varphi$ und $r$ differenziren:

$$\psi'(z)\,\frac{z}{r} = e^{\Phi i}\left(\frac{dR}{dr} + iR\,\frac{d\Phi}{dr}\right),$$

$$\psi'(z)\,zi = e^{\Phi i}\left(\frac{dR}{d\varphi} + iR\,\frac{d\Phi}{d\varphi}\right), \tag{31}$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{dR}{d\varphi} = -rR\,\frac{d\Phi}{dr}, \quad r\,\frac{dR}{dr} = R\,\frac{d\Phi}{d\varphi}. \tag{32}$$

Aus (31), (32) und (28) lässt sich leicht ersehen, dass ein gewöhnliches Minimum der Function $M(r)$ stets kritisch ist. In der That, es sei $\varphi = \omega$ eine solche Wurzel der Gleichung

$$\frac{dR(\varrho, \varphi)}{d\varphi} = 0, \tag{33}$$

welche dem Maximum Maximorum der Function $R(\varrho, \varphi)$ in Bezug auf $\varphi$ entspricht; wir erhalten dann:

$$\mu = M(\varrho) = R(\varrho, \omega) = \text{mod. } \psi(\zeta),\ \zeta = \varrho e^{\omega i}. \tag{34}$$

Aus (33), (34) und (28) überzeugen wir uns leicht, dass die Werthe $r = \varrho$, $\varphi = \omega$ gleichzeitig den Gleichungen

$$\frac{dR}{d\varphi} = 0, \qquad \frac{dR}{dr} = 0 \tag{35}$$

genügen müssen. Aus (35), (32), (31) ergiebt sich, dass:

$$\psi'(\zeta) = 0. \tag{36}$$

(34) und (36) beweisen, dass ein gewöhnliches Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ kritisch ist.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen könnten wir uns überzeugen, dass auch ein besonderes Minimum kritisch ist, wenn nur

$$[\lim M'(\varrho - \varepsilon)]_{\varepsilon=0} \quad \text{oder} \quad [\lim M'(\varrho + \varepsilon)]_{\varepsilon=0}$$

den Werth Null hat.

In einigen seltenen Fällen kann das Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ auch dann kritisch sein, wenn beide Grenzwerthe

$$M'(\varrho - 0) \quad \text{und} \quad M'(\varrho + 0)$$

von Null verschieden sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dieses ist nur in einem Falle möglich: wenn nämlich die Gleichung (5) eine reelle Wurzel $\varphi$ besitzt, welcher ein Werth von $R$ entspricht, der von $M(r)$ verschieden ist, solange $r$ nicht gleich $\varrho$ ist, wohl aber $M(r)$ gleich wird, sobald $r = \varrho$, wobei die Wurzel $\varphi$ für $r = \varrho$ der Gleichung

$$\psi'(re^{\varphi i}) = 0$$

genügen muss.

Wenn alle diese Ausnahmefälle nicht eintreten und die Grenzwerthe

$$M'(\varrho - 0) \quad \text{und} \quad M'(\varrho + 0) \quad .$$

von Null verschieden sind, so ist das Minimum $\mu = M(\varrho)$ der Function $M(r)$ *kein kritisches.*

Da die Function $M'(r)$ öfters Unterbrechung ihrer Continuität erleidet, so ist das Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ häufig ein besonderes, ohne ein kritisches zu sein.

Es ist evident, dass jedes nicht kritische Minimum der Function $M(r)$ ein besonderes ist.

## § 8.

Wir nehmen einige Beispiele durch, in denen wir das Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ bestimmen; und zwar wird dieses Minimum jedesmal *nicht kritisch* sein.

Beispiel I. Es sei

$$\psi(z) = \frac{1 + 18z - 3z^2 + 2z^3}{z}.$$

Der Modulus des Maximum Maximorum der gegebenen Function wird für $r = 0$ und für $r = \infty$ unendlich; folglich muss er, wenn wir $r$ sich von 0 bis $\infty$ ändern lassen, ein Minimum durchmachen. Für unser Beispiel erhalten wir:

$$R = \text{mod. } \psi(re^{\varphi i}) = \Big[r^{-2} + 330 - 63r^2 + 4r^4 + 12\left(\frac{3}{r} - 10r - r^3\right)\cos\varphi - 12(1-12r^2)\cos^2\varphi + 16r\cos^3\varphi\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$R\frac{dR}{d\varphi} = -6\sin\varphi\Big[\frac{3}{r} - 10r - r^3 - 2(1-12r^2)\cos\varphi + 4r\cos^2\varphi\Big],$$

$$R\frac{d^2R}{d\varphi^2} + \Big(\frac{dR}{d\varphi}\Big)^2 = -6\cos\varphi\Big[\frac{3}{r} - 10r - r^3 - 2(1-12r^2)\cos\varphi + 4r\cos^2\varphi\Big] + 12\sin^2\varphi[12r^2 - 1 + 4r\cos\varphi].$$

Die Gleichung

$$\frac{dR}{d\varphi} = 0 \tag{37}$$

besitzt folgende Wurzeln:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi,$$

$$\varphi_3 = \arccos\Big(\frac{1}{4r} - 3r - \frac{1}{4r}\sqrt{148r^4 + 16r^2 - 11}\Big),$$

$$\varphi_4 = \arccos\Big(\frac{1}{4r} - 3r + \frac{1}{4r}\sqrt{148r^4 + 16r^2 - 11}\Big).$$

Die Bedingung

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} < 0, \tag{38}$$

durch welche ein partielles Maximum charakterisirt wird, ergiebt für $\varphi = \varphi_1 = 0$

$$r^4 - 24r^3 + 6r^2 + 2r - 3 < 0. \tag{39}$$

Die Gleichung $r^4 - 24r^3 + 6r^2 + 2r - 3 = 0$ besitzt nur eine positive Wurzel

$$\varrho_3 = 23,73\ldots; \tag{40}$$

daher ist die Function

$$M_1(r) = \text{mod. } \psi(r) \tag{41}$$

für alle $0 < r < \varrho_3$ partielles Maximum von $R$ in Bezug auf $\varphi$, für $\varrho_3 < r < \infty$ aber ein Minimum von $R$ in Bezug auf $\varphi$.

Setzen wir $\varphi = \varphi_2 = \pi$, so ergiebt (38)

$$r^4 + 24r^3 + 6r^2 - 2r - 3 > 0. \tag{42}$$

Die Gleichung

$$r^4 + 24r^3 + 6r^2 - 2r - 3 = 0$$

hat nur eine positive Wurzel

$$\varrho_2 = 0{,}47368\ldots; \tag{43}$$

daraus folgt, dass

$$M_2(r) = \text{mod. } \psi(-r) \tag{44}$$

für $\varrho_2 < r < \infty$ ein partielles Maximum von $R$ in Bezug auf $\varphi$ ist, für $0 < r < \varrho_2$ ein Minimum.

Die Wurzel $\varphi_3$ der Gleichung (37) ist nur dann reell, wenn

$$148r^4 + 16r^2 - 11 \geqq 0,$$
$$-1 \leqq \cos\varphi_3 \leqq 1.$$

Die erste von diesen zwei Bedingungen wird nur dann erfüllt, wenn

$$r \geqq \varrho_1,$$

wo

$$\varrho_1 = 0{,}47315\ldots$$

die positive Wurzel der Gleichung

$$148r^4 + 16r^2 - 11 = 0$$

ist.

Die Bedingung

$$\cos\varphi_3 \leqq +1$$

ist identisch mit der Bedingung

$$r^4 + 24r^3 + 6r_2 - 2r - 3 \leqq 0$$

und wird nur dann erfüllt, wenn

$$r \leqq \varrho_2.$$

Ist $\varrho_1 \leqq r \leqq \varrho_2$, so ist auch die Bedingung:

$$\cos\varphi_3 \geqq -1$$

erfüllt, und die Wurzel $\varphi_3$ ist reell. Ausserdem zeigt die Bedingung (38), welche für $\varphi = \varphi_3$ die Form

$$\cos\varphi_3 < \tfrac{1}{4r} - 3r$$

annimmt, dass zwischen den Grenzen $\varrho_1$ und $\varrho_2$ die Function

$$M_3(r) = \text{mod. } \psi(re^{\varphi_4 i}) \tag{45}$$

ein partielles Maximum von $R$ in Bezug auf $\varphi$ ist.

Die Bedingung (38), welche für $\varphi = \varphi_4$ die Form

$$\cos \varphi_4 < \frac{1}{4r} - 3$$

annimmt, kann nicht erfüllt werden.

So sehen wir, dass $R$ folgende partielle Maxima hat:

1) für $0 < r < \varrho_1$ — ein Maximum $M_1(r)$,
2) für $\varrho_1 < r < \varrho_2$ — zwei Maxima $M_1(r)$ und $M_3(r)$,
3) für $\varrho_2 < r < \varrho_3$ — zwei Maxima $M_1(r)$ und $M_2(r)$,
4) für $\varrho_3 < r < \infty$ — ein Maximum $M_2(r)$.

In dem Intervall $\varrho_2 < r < \varrho_3$ stellt die grössere von den zwei Functionen $M_1(r)$ und $M_2(r)$ das Maximum Maximorum $M(r)$ dar; die Gleichung:

$$M_1(r) - M_2(r) = 0,$$

oder

$$1 - 3r^2 = 0$$

lässt in den Grenzen $\varrho_2$ und $\varrho_3$ eine einfache Wurzel zu:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577\ldots.$$

Daher tritt bei $r = \varrho$ eine Formveränderung von $M(r)$ ein:

$$\text{für } \varrho_2 \leqq r \leqq \varrho \text{ ist } M(r) = M_1(r),$$
$$\text{für } \varrho \leqq r \leqq \varrho_3 \text{ ist } M(r) = M_2(r).$$

Die Grenzwerthe

$$M'(\varrho - 0) \quad \text{und} \quad M'(\varrho + 0)$$

nehmen folgende Zahlenwerthe an:

$$M'(\varrho - 0) = -6 + \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$M'(\varrho + 0) = +6 + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Diese beiden Grenzwerthe sind also von Null verschieden und haben entgegengesetzte Vorzeichen. Folglich ist

$$\mu = M(\varrho) = 20 \tag{46}$$

ein besonderes und zwar ein nicht kritisches Minimum der Function $M(r)$. Dem § 7 zufolge kann $M(r)$ keine anderen Minima haben.

Beispiel II. Es sei

$$\psi(z) = \frac{1}{z(z+4)(z-7)^2}.$$

Der Modulus des Maximum Maximorum wird für $r = 0$, $r = 4$, $r = 7$ unendlich, muss also in den Intervallen $0 < r < 4$ und $4 < r < 7$ je ein Minimum haben. Wir wollen diese Minima bestimmen.

Im gegebenen Falle hat die Gleichung

$$\frac{dR}{d\varphi} = 0$$

folgende Wurzeln:

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi,\ \varphi_3 = \arccos\left(-\frac{5r^2+14}{84r}\right).$$

Unter der Voraussetzung $\varphi = \varphi_1 = 0$ ist die Bedingung

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} < 0 \tag{47}$$

für jeden positiven Werth von $r$ erfüllt. Daher stellt

$$M_1(r) = \frac{1}{r(r+4)(r-7)^2}$$

für jeden Werth von $r$ ein partielles Maximum von $R$ in Bezug auf $\varphi$ dar.

Setzen wir jetzt $\varphi = \varphi_2 = \pi$. Die Bedingung (47) nimmt dann folgende Form an:

$$5r^2 - 84r + 14 < 0$$

und wird erfüllt, wenn

$$\varrho_1 < r < \varrho_2,$$

wo

$$\varrho_1 = \frac{42-\sqrt{1694}}{5} = 0{,}1683\ldots,$$

$$\varrho_2 = \frac{42+\sqrt{1694}}{5} = 16{,}6316\ldots.$$

Wenn also $\varrho_1 < r < \varrho_2$, so ist

$$M_2(r) = \text{mod. } \psi(-r)$$

ein partielles Maximum von $R$ in Bezug auf $\varphi$.

Setzen wir endlich $\varphi = \varphi_3$. Aus (47) erhalten wir dann:

$$\sin^2 \varphi_3 < 0,$$

folglich entspricht der Wurzel $\varphi_3$ kein partielles Maximum von $R$.

Wenn wir $M(r)$ in den Grenzen $0 < r < 4$ verfolgen, sehen wir, dass $R$ zwei partielle Maxima für $\varrho_1 < r < 4$ zulässt:

$$M_1(r) = \frac{1}{r(4+r)(7-r)^2},$$

$$M_2(r) = \frac{1}{r(4-r)(7+r)^2}.$$

Die Gleichung

$$M_1(r) - M_2(r) = 0$$

hat zwischen $\varrho_1$ und 4 eine ungerade-vielfache Wurzel:

$$\varrho = \sqrt{7} = 2,64\ldots.$$

Daher ist:

$$M(r) = M_1(r), \quad \text{wenn} \quad 0 < r \leqq \varrho,$$
$$M(r) = M_2(r), \quad \text{wenn} \quad \varrho \leqq r < 4.$$

Die Derivirte $M'(r)$ hat für $r = \varrho$ zwei Werthe:

$$M'(\varrho - 0) = 14[M(\varrho)]^2 (1 - \sqrt{7}),$$
$$M'(\varrho + 0) = 14[M(\varrho)]^2 (1 + \sqrt{7}),$$

die von Null verschieden sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Folglich ist:

(48) $$\mu = M(\varrho) = \frac{1}{126\sqrt{7}}$$

ein besonderes, und zwar ein nicht kritisches Minimum von $M(r)$.

Zwischen den Grenzen $4 < r < 7$ hat $R$ zwei partielle Maxima:

$$M_1(r) = \frac{1}{r(r+4)(7-r)^2},$$

$$M_2(r) = \frac{1}{r(r-4)(7+r)^2},$$

und die Gleichung

$$M_1(r) - M_2(r) = 0$$

hat zwischen den Grenzen 4 und 7 eine ungerade-vielfache Wurzel:

$$\varrho' = \sqrt{19,6} = 1,4 \cdot \sqrt{10} = 4,83\ldots.$$

Daher ist:

$$M(r) = M_2(r), \quad \text{wenn} \quad 4 < r \leqq \varrho',$$
$$M(r) = M_1(r), \quad \text{wenn} \quad \varrho' \leqq r < 7.$$

Die Derivirte $M'(r)$ hat für $r = \varrho'$ zwei verschiedene Werthe:

$$M'(\varrho' - 0) = +[1,4\, M(\varrho')]^2 (200 - 56\sqrt{10}),$$
$$M'(\varrho' + 0) = -[1,4\, M(\varrho')]^2 (200 + 56\sqrt{10}).$$

Wieder sind diese zwei Grenzwerthe von Null verschieden und ihre Vorzeichen entgegengesetzt, und

(49) $$\mu = M(\varrho') = \frac{1}{246,96}$$

ist zwischen den Grenzen 4 und 7 ein besonderes und nicht kritisches Minimum von $M(r)$.

## II. Anwendung der Eigenschaften des Modulus des Maximum Maximorum auf die Reihe von Lagrange.

### § 9.

Es sei $f(u+z)$ endlich, continuirlich und eindeutig für alle Werthe von $z$, welche die Bedingung

$$\text{mod. } z < k$$

erfüllen. Unter $M(r)$ wollen wir den Modulus des Maximum Maximorum von

$$\psi(z) = \frac{f(u+z)}{z}$$

verstehen, und zwar setzen wir voraus, dass $M(0) = \infty$ und $M(k) = \infty$. Das Minimum von $M(r)$ zwischen den Grenzen $0 < r < k$ nennen wir $\mu$, und den entsprechenden Werth von $r$ nennen wir $\varrho$, so dass $\mu = M(\varrho)$.

Auf Grund der Eigenschaften von $M(r)$ und der arithmetischen Mittel von der Form

$$\frac{F(z_1) + F(z_2) + \cdots + F(z_n)}{n},$$

wo

$$z_m = re^{\frac{2m\pi i}{n}},$$

lassen sich folgende Sätze beweisen:

I. *Lehrsatz: Wenn*

$$\text{mod. } t < \frac{1}{M(r)}, \tag{50}$$

*wo* $0 < r < k$, *so besitzt die Gleichung*

$$z - tf(u+z) = 0 \tag{51}$$

*nur eine Wurzel* $z_1$, *deren Modulus kleiner ist als* $r$.

II. *Lehrsatz: Wenn die Bedingungen des Lehrsatzes* I *erfüllt sind und die Function* $F(u+z)$ *endlich, continuirlich und eindeutig ist für alle Werthe von* $z$, *welche der Bedingung*

$$\text{mod. } z < r$$

*genügen, so lässt sich* $F(u+z_1)$, *wo* $z_1$ *die Wurzel von* (51) *ist, nach der Formel von Lagrange in eine convergente Reihe entwickeln:*

$$F(u+z_1) = F(u) + \frac{t}{1} F'(u)\{f(u)\} + \frac{t^2}{1\cdot 2}\frac{d[F'(u)\{f(u)\}^2]}{du} + \cdots \tag{52}$$

Diese Sätze sind in dem Mémoire von Rouché sowie in dem „Cours d'Algèbre supérieure" von Serret bewiesen.

Wir wollen die Anwendung der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange nur in den Theilen besprechen, welche nicht genügend erläutert sind.

Das Gebiet derjenigen Werthe von $t$, welche die Bedingung (50) erfüllen, wird in der Fläche der Variabeln durch alle innern Punkte des Kreises dargestellt, welcher um das Coordinatencentrum mit dem Radius

$$\frac{1}{M(r)}$$

beschrieben ist. Der genannte Radius wächst mit abnehmendem $M(r)$ und erreicht sein Maximum:

$$a = \frac{1}{\mu}, \tag{53}$$

wenn $r = \varrho$. Diesen Radius wollen wir: *Radius des Anwendbarkeitskreises der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange* nennen. Dieser Radius ist nicht immer gleich dem Convergenzradius $b$ der Reihe von Lagrange, was zuweilen ausser Acht gelassen worden ist. Im Folgenden wollen wir untersuchen, wenn diese beiden Radien einander gleich sind; und zwar setzen wir voraus, dass die Reihe von Lagrange auf die ganze Function $F(u+z_1)$ angewandt ist; $z_1$ ist die Wurzel von (51).

## § 10.

Die Reihe von Lagrange

$$f(u) + \frac{t^1}{1.2}\frac{d[\{f(u)\}^2]}{du} + \cdots + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}[\{f(u)\}^n]}{du^{n-1}} + \cdots$$

wollen wir kürzer durch $s(t)$ bezeichnen.

Zunächst zwei Hülfssätze:

I. *Lemma: Wenn*

$$mod.\ t < \frac{1}{\mu},$$

*so besitzt die Gleichung* (51) *nur eine Wurzel $z_1$, deren Modulus kleiner ist als $\varrho$, und diese lässt sich nach der Formel von Lagrange in eine convergente Reihe entwickeln:*

$$z_1 = s(t). \tag{54}$$

Zu diesem Lemma gelangen wir, wenn wir in den Lehrsätzen I und II $r = \varrho$ und $F(u+z) = u + z$ setzen.

II. *Lemma: Es sei $\zeta$ eine Wurzel von*

$$\psi'(z) = 0, \tag{55}$$

*wo*

$$\psi(z) = z^{-1}f(u+z);$$

*ferner sei*

$$t_0 = \frac{1}{\psi(\zeta)} = \frac{1}{f'(u+\zeta)}. \tag{56}$$

*Ist die Reihe $s(t)$ convergent für alle Werthe von $t$, welche die Bedingung*

$$\text{mod.}\left(\frac{t}{t_0}\right) < 1 \tag{57}$$

*erfüllen, und nähert sich $s(t)$ dem Werthe $\zeta$, wenn $t$ sich $t_0$ nähert, so ist*

$$b = \text{mod.}\,(t_0)$$

*der Convergenzradius der Reihe von Lagrange, so dass $s(t)$ convergent ist, so lange mod. $t < b$, und divergent wird, sobald mod. $t > b$.*

Dieses Lemma folgt unmittelbar aus den Convergenzgesetzen derjenigen Reihen, in welche die Functionen nach der Taylor'schen und der Maclaurin'schen Formel entwickelt werden.

III. *Lehrsatz: Ist das Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ kritisch, so sind der Convergenzradius $b$ der Reihe $s(t)$ und der Anwendbarkeitsradius $a$ der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe $s(t)$ einander gleich.*

Beweis: Es sei $\zeta$ diejenige Wurzel der Gleichung

$$\psi'(z) = 0,$$

welche dem kritischen Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ entspricht, so dass

$$\mu = M(\varrho) = \text{mod. } \psi(\zeta), \quad \zeta = \varrho e^{\omega i}$$

und der Anwendbarkeitsradius der Eigenschaften von $M(r)$ auf $s(t)$ gleich:

$$a = \frac{1}{\mu} = \text{mod. } t_0 \tag{58}$$

ist, wo

$$t_0 = \frac{1}{\psi(\zeta)} = \frac{1}{f'(u+\zeta)}. \tag{59}$$

Es sei

$$\text{mod.}\left(\frac{t}{t_0}\right) < 1. \tag{60}$$

Dann sind die Bedingungen des Lemma I erfüllt, und wir erhalten:

$$z_1 = s(t), \text{ mod. } z_1 < \varrho, \tag{61}$$

$z_1$ ist Wurzel der Gleichung (51), welcher man folgende Form geben kann:

$$1 - t\psi(z) = 0. \tag{62}$$

Wenn $t = t_0$, so wird $\zeta$ dieser Gleichung $n \geq 2$ mal genügen. Wenn daher $t$ dem Werthe $t_0$ unendlich nahe liegt, so muss (51) oder (62) $n$ Wurzeln besitzen, welche sich unendlich wenig von $\zeta$ unterscheiden. Diese Wurzeln lassen sich folgendermassen darstellen:

$$\zeta_m = \zeta + (t_0 - t)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2m\pi i}{n}} \left\{\frac{1 \cdot 2 \ldots n}{t_0 \psi^{(n)}(\zeta)}\right\}^{\frac{1}{n}} (1+\varepsilon), \tag{63}$$

wo $m$ eine ganze Zahl ist und $\varepsilon$ eine unendlich kleine Grösse, welche gleichzeitig mit $t_0 - t$ verschwindet. Setzen wir:

$$t_0 - t = pe^{qi}. \tag{64}$$

Ferner sei:

$$\frac{1}{\zeta}\left(\frac{1.2\ldots n}{t_0^2\psi^{(n)}(\zeta)}\right)^{\frac{1}{n}} = Pe^{\Omega i},$$

dann ergiebt sich:

$$\zeta_m = \zeta\left\{1 + p^{\frac{1}{n}} P e^{\left(\frac{2m\pi+q}{n}+\Omega\right)i}(1+\varepsilon)\right\}. \tag{65}$$

Suchen wir solche Werthe für $m$ und $q$, dass die Bedingungen:

$$\text{mod.}\left(\frac{t}{t_0}\right) < 1, \quad \text{mod.}\,\zeta_m < \varrho \tag{66}$$

erfüllt werden. Aus (64) und (65) ist leicht ersichtlich, dass wenn $p$ sehr klein ist, diese Bedingungen mit den folgenden identisch sind:

$$\cos(q-\tau) > 0, \quad \cos\left(\frac{2m\pi+q}{n}+\Omega\right) < 0, \tag{66'}$$

wo $\tau$ das Argument von $t_0$ ist. Diesen Anforderungen können wir genügen, wenn wir $q$ und $m$ aus den Gleichungen

$$q - \tau = -\frac{\pi}{2} + \Theta\pi, \quad \frac{2m\pi+q}{n} + \Omega = \frac{\pi}{2} + \Theta_1\pi \tag{67}$$

bestimmen, wo $\Theta$ und $\Theta_1$ ächte positive Brüche sind:

$$0 < \Theta < 1, \qquad 0 < \Theta_1 < 1. \tag{68}$$

Setzen wir:

$$\delta = \frac{n\Omega+\tau}{2\pi} - \frac{n+1}{4} - N,$$

wobei $N$ eine ganze Zahl bedeutet und $0 \leq \delta < 1$, so ergeben die Gleichungen (67):

$$q = \tau - \frac{\pi}{2} + \Theta\pi, \quad m = -N - \delta + \frac{n\Theta_1 - \Theta}{2}.$$

Für $\Theta$ wählen wir einen solchen Werth, dass

$$\frac{\Theta}{2} + \delta < 1,$$

was immer möglich, da $0 \leq \delta < 1$. Darauf bestimmen wir $\Theta_1$ aus:

$$-\delta + \frac{n\Theta_1 - \Theta}{2} = 0,$$

und erhalten

$$\Theta_1 = \frac{2}{n}\left(\frac{\Theta}{2} + \delta\right),$$

wo wirklich $0 < \Theta_1 < 1$, da $n \geq 2$. Wenn $\Theta$ und $\Theta_1$ derartige Werthe haben, finden wir:

$$q = \tau - \frac{\pi}{2} + \Theta\pi, \quad m = -N$$

und diese Grössen $q$ und $m$ müssen die Bedingungen (66) erfüllen.

Wenn wir nun $q$ und $m$ solche Werthe beilegen, tritt das Lemma I in Kraft, und es wird $z_1 = z_m$, oder

$$(69) \qquad s(t) = \zeta + (t_0 - t_1)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2m\pi i}{n}} \left\{ \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{t_0 \varphi^{(n)}(\zeta)} \right\}^{\frac{1}{n}} (1+\varepsilon).$$

(64) und (69) beweisen, dass wenn $p$ sich unbegrenzt der Null nähert, $t$ seinen Grenzwerth $t_0$, $s(t)$ aber den Werth $\zeta$ erreicht; d. h. es sind alle Bedingungen des Lemmas II erfüllt. Daher wird dann der Convergenzradius von $s(t)$ gleich $b = \text{mod. } t_0$. Wenn wir (58) hinzuziehen, sehen wir, dass der Convergenzradius der Reihe von Lagrange und der Anwendbarkeitsradius der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange in diesem Falle einander gleich sind.

III. *Lemma. Wenn der Convergenzradius $b$ und der Anwendbarkeitsradius $a$ einander gleich sind, so ist das Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ kritisch.*

Beweis: Der Convergenzradius $b$ der Reihe von Lagrange lässt sich folgendermassen ausdrücken:

$$(70) \qquad b = \text{mod. } t_0, \quad t_0 = \frac{1}{\psi(\zeta)} = \frac{\zeta}{f(u+\zeta)},$$

wo $t_0$ und $\zeta$ durch folgende Merkmale charakterisirt sind: wenn $t$, welches der Ungleichung

$$(71) \qquad \text{mod. } t < b$$

genügt, sich unbegrenzt dem Werthe $t_0$ nähert, so werden die Derivirten von $s(t)$, von irgend einer Ordnung ab, unendlich und es ist:

$$(72) \qquad \text{Lim. } \{s(t)\}_{t=t_0} = \zeta.$$

Ferner bemerken wir: wenn $a = b$ und (71) erfüllt ist, so tritt das Lemma I in Kraft und es wird:

$$\text{mod. } s(t) < \varrho < k.$$

Diese Ungleichung, welche für jedes $t$, das dem $t_0$ beliebig nahe liegt, Gültigkeit hat, zeigt mit (72), dass mod. $\zeta$ nicht grösser ist als $\varrho$. Folglich ist $\zeta$ endlich und kann mit keinem besondern Punkte der Function $f(u+z)$ zusammenfallen. Ziehen wir dieses Resultat und das vorher über $t_0$ und $\zeta$ Gesagte in Betracht, so kommen wir zu dem Schluss, dass $\zeta$ vielfache Wurzel von

$$z - t_0 f(u+z) = 0$$

sein muss und folglich der Gleichung

$$(70') \qquad \psi'(z) = 0$$

genügt.

Nun ist es nicht schwer zu beweisen, dass mod. $\zeta$ auch nicht kleiner sein kann als $\varrho$. Wäre: mod. $\zeta < \varrho$, mod. $t < b$, lim. $t = t_0$,

so kämen wir zu dem Resultat, dass (51) nicht weniger als zwei Wurzeln hätte, welche $\zeta$ unendlich nahe lägen, und deren Modulus $< \varrho$ wäre. Dieses Resultat würde dem Lemma I widersprechen, welches in Kraft tritt, sobald (71) erfüllt ist.

Also ist:

$$\text{mod. } \zeta = \varrho. \tag{73}$$

Aus (70), (70'), (73) und aus der Bedingung $a = b = \frac{1}{\mu}$ ersehen wir, dass

$$\mu = \text{mod. } \psi(\zeta), \quad \varrho = \text{mod. } \zeta, \quad \psi'(\zeta) = 0. \tag{74}$$

Folglich ist das Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ kritisch.

IV. *Lehrsatz. Ist das Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ nicht kritisch, so ist der Anwendbarkeitsradius $a$ der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange kleiner als der Convergensradius $b$ der Reihe von Lagrange.*

Beweis: Offenbar kann $b$ nicht kleiner sein als $a$, denn dann würde aus $b < \text{mod. } t < a$ auf Grund des Lemmas I folgen, dass die Reihe $s(t)$ convergirt, was nicht möglich ist; $a$ kann auch nicht $b$ gleich sein, denn dann wäre das Minimum $\mu$ kritisch, folglich ist $a < b$.

Die Lehrsätze III und IV enthalten die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, unter denen das Gebiet der Anwendbarkeit der Eigenschaften von $M(r)$ auf $s(t)$ und das Gebiet der Convergenz der Reihe von Lagrange entweder identisch sind oder nicht.

Beispiel: Es sei $u = 0$, und

$$f(z) = 1 + 18z - 3z^2 + 2z^3,$$

folglich

$$\psi(z) = \frac{1 + 18z - 3z^2 + 2z^3}{z};$$

die Function $M(r)$ hat das nicht kritische Minimum 20, welches wir in § 8 gefunden haben. Der Anwendbarkeitsradius der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange ist daher:

$$a = \frac{1}{\mu} = 0{,}05,$$

während der Convergenzradius der Reihe $s(t)$ gleich ist

$$b = \text{mod. } \frac{16}{279 \pm i15\sqrt{15}} = 0{,}5614346 \ldots.$$

## § 11.

Die nachfolgenden Theoreme erleichtern oft die Beantwortung der Frage, ob der Convergenzradius $b$ der Reihe von Lagrange und der Anwendbarkeitsradius $a$ der Eigenschaften von $M(r)$ auf die genannte Reihe zusammenfallen. Wir werden sehen, dass sie dies öfters nicht thun.

Indem wir die bisherigen Bezeichnungen beibehalten, wollen wir die Wurzel $\zeta$, welche die Bedingungen des Lemmas II erfüllt, eine *kritische Wurzel* der Gleichung (55) nennen, und den Werth $t_0$, welcher aus (56) bestimmt wird, einen *kritischen Werth* der Variabeln $t$. Wenn eine kritische Wurzel der Gleichung (55) existirt, so ist $b = \text{mod. } t_0$.

Ferner führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$(75) \qquad \begin{aligned} \frac{-\zeta^2 f''(u+\zeta)}{2f(u+\zeta)} &= A + Bi, \\ \frac{-i\zeta^3 f'''(u+\zeta)}{6f(u+\zeta)} &= A_1 + B_1 i, \end{aligned}$$

wo $A$, $B$, $A_1$, $B_1$, reelle Grössen sind; $i = \sqrt{-1}$.

IV. *Lemma. Wenn $a = b$ und $\zeta$ eine kritische Wurzel von* (55) *ist, so entspricht diese Wurzel einem kritischen Minimum $\mu$ der Function $M(r)$.*

Dieses Lemma wird beinahe ebenso bewiesen, wie das Lemma III.

V. *Lehrsatz. Wenn die Gleichung* (55) *eine kritische Wurzel $\zeta$ besitzt, für welche entweder $A > 0$, oder $A = 0$, $A_1 \gtrless 0$, so ist $a < b$.*

Beweis: Nehmen wir an, dass $a = b$. Auf Grund des Lemmas IV muss die Wurzel $\zeta$ einem kritischen Minimum $\mu$ der Function $M(r)$ entsprechen, d. h. es ist:

$$\mu = \text{mod. } \psi(\zeta), \quad \zeta = \varrho e^{\omega i}.$$

Wenn $\varphi$ dem $\omega$ unendlich nahe liegt, so können wir den Modulus von $\psi(\varrho e^{\varphi i})$ nach Potenzen von $(\varphi - \omega)$ entwickeln:

$$\begin{aligned} R(\varrho, \varphi) &= \text{mod. } \psi(\varrho e^{\varphi i}) \\ &= \mu \{1 + A(\varphi - \omega)^2 + A_1(\varphi - \omega)^3 + \cdots\}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung beweist, dass unter den gemachten Voraussetzungen $\mu$ kein Maximum der Function $R(\varrho, \varphi)$ in Bezug auf $\varphi$ ist. Das aber ist unmöglich, da $\mu$ das Maximum Maximorum der Function $R(\varrho, \varphi)$ in Bezug auf $\varphi$ ist. Daher kann man nicht annehmen, dass $a = b$; da nun ausserdem $a$ nicht grösser sein kann als $b$, so erhalten wir $a < b$.

Der Lehrsatz V enthält nur die ausreichenden Bedingungen, unter denen die Ungleichung $a < b$ erfüllt ist. Nothwendig sind diese Bedingungen nicht. Denn damit $a = b$ sei, ist nothwendig nicht nur, dass die Wurzel $\zeta$ den Bedingungen des Lehrsatzes V widerspreche, sondern auch dass keines der partiellen Maxima der Function $R(\varrho, \varphi)$ in Bezug auf $\varphi$ grösser sei als mod. $\psi(\zeta)$.

Betrachten wir nun die Voraussetzung, dass $\zeta$ den Bedingungen des Lehrsatzes V entspricht, und die entgegengesetzte Voraussetzung, dass

es dies nicht thut, als gleich wahrscheinlich, so ist es klar, *dass die Ungleichung* $a < b$ *wahrscheinlicher ist als die Gleichung* $a = b$.

VI. *Lehrsatz: Wenn die Gleichung* (55) *eine kritische Wurzel* $\zeta$ *besitzt, welche der Bedingung*

$$\text{mod. } \zeta \geq k \tag{76}$$

*entspricht, wo* $k$ *eine positive Zahl ist, welche* $M(r)$ *unendlich werden lässt, so ist* $a < b$.

Beweis: Wenn $a = b$ wäre, so ergäbe sich aus dem Lemma IV: mod. $\zeta = \varrho < k$, was (76) widerspricht.

VII. *Lehrsatz: Wenn die Gleichung* (55) *zwei kritische Wurzeln* $\zeta'$ *und* $\zeta''$ *besitzt, und es ist*

$$\text{mod. } \zeta' \leqslant \text{mod. } \zeta'',$$

*so ist* $a < b$.

Beweis: Wenn $a = b$ ist, so können wir auf jede der beiden kritischen Wurzeln $\zeta'$ und $\zeta''$ der Gleichung (55) das Lemma IV anwenden und finden dann:

$$\text{mod. } \zeta' = \text{mod. } \zeta'' = \varrho,$$

was unsrer Voraussetzung widerspricht.

Moskau, $\frac{\text{8. November}}{\text{27. October}}$ 1887.

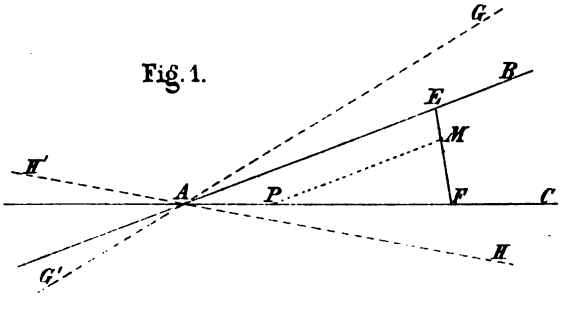
# Ueber eine specielle geometrische Aufgabe des Minimums.*)

Von

Eduard Neovius in Helsingfors.

Die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt $M$ Fig. 1 eine Gerade zu legen, auf welcher die Schenkel eines gegebenen Winkels $CAB$ eine möglichst kurze Strecke $EF$ abschneiden, ist schon im vorigen Jahrhunderte, namentlich von L'Huilier behandelt worden. Es scheint jedoch bisher nicht bemerkt worden zu sein, dass die cubische Gleichung, auf welche die Lösung dieser Aufgabe führt, unter Umständen *drei* reelle Wurzeln besitzt, wobei aber nur *zwei* Wurzeln *ein Minimum, der dritten dagegen ein Maximum* der Länge der Strecke $EF$ entspricht. Dies soll im Folgenden kurz dargethan werden.

Fig. 1.




Vom Punkte $M$ aus ziehe man $MP$ parallel zu $AB$ und setze

$$AP = a, \quad PM = b, \quad PF = x, \quad EF = u, \quad CAB = \alpha,$$

$$\cos\beta = \frac{1}{3}\cos\alpha = c.$$

Es ist alsdann

$$u = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\sqrt{b^2 - 6bcx + x^2},$$

woraus sich zur Bestimmung der unbekannten Grösse $x$ die cubische Gleichung

*) Abgedruckt aus den Nachrichten d. Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. Nr. 14. 1887.

$$x^3 - 3bcx^2 + 3abcx - ab^2 = 0$$

ergiebt, oder, wenn $x = y + bc$ gesetzt wird,

$$y^3 + py + q = 0,$$

wo

$$p = -3bc(bc - a)$$

und

$$q = -b^2(2bc^3 - 3ac^2 + a).$$

Für die Grösse $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, deren Vorzeichen darüber entscheidet, ob die cubische Gleichung eine oder drei reelle Wurzeln hat, ergiebt sich der Ausdruck

$$a^3b^3c^3\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{1 - 6c^2 - 3c^4}{4c^3} \cdot \frac{b}{a} + 1\right),$$

oder, wenn

$$m = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 6c^2 - 3c^4}{4c^3},$$

und $n$ gleich der reellen Grösse $m - \sqrt{m^2 - 1}$ gesetzt wird,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = a^3b^3c^3\left(\frac{b}{a} + n\right)\left(\frac{b}{a} + \frac{1}{n}\right).$$

Wenn man nun $a$ und $b$ als Variable ansieht und erst $\frac{b}{a} = -n$, dann $\frac{b}{a} = -\frac{1}{n}$ annimmt, so werden dadurch zwei Gerade $GG'$ und $HH'$ bestimmt, welche mit den gegebenen Geraden $AB$ und $AC$ gleich grosse Winkel $BAG$ und $CAH$ $(= \gamma)$ einschliessen.

Jenachdem der Punkt $M$ sich innerhalb eines von diesen beiden Winkeln befindet oder nicht, hat die cubische Gleichung *drei* reelle Lösungen oder nur *eine*.

Der Winkel $\gamma$ ist durch die Gleichung

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = m - \sqrt{m^2 - 1}$$

bestimmt, woraus

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma\right)\operatorname{cotg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\frac{m+1}{m-1}} = \sqrt{\frac{1+3c}{1-3c}}\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \operatorname{cotg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right) \cdot \operatorname{tg}^3\left(\tfrac{1}{2}\beta\right),$$

oder

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma\right) = \operatorname{tg}^3\left(\tfrac{1}{2}\beta\right)$$

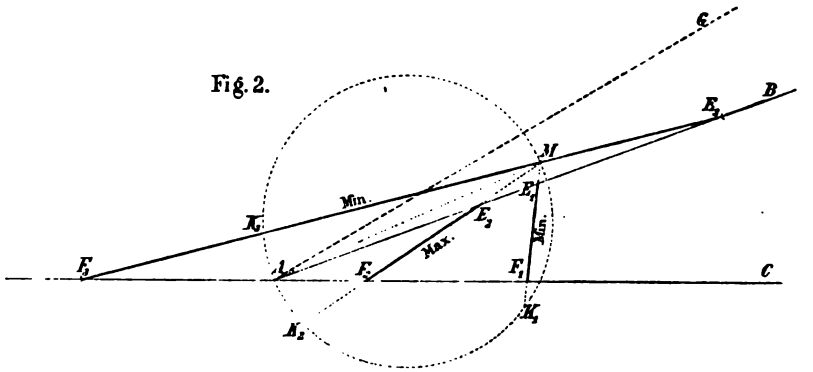
sich ergiebt.

In der folgenden Tabelle sind einige zusammengehörige Werthe der Grössen $\alpha$ und $\gamma$ zusammengestellt.

| $\alpha$ | $\gamma$ | | |
|---|---|---|---|
| Grade. | Grade. | Min. | Sec. |
| 0 | 19 | 28 | 16 |
| 10 | 14 | 46 | 50 |
| 20 | 10 | 42 | 57 |
| 30 | 7 | 17 | 54 |
| 40 | 4 | 33 | 14 |
| 50 | 2 | 29 | 54 |
| 60 | 1 | 7 | 7 |
| 70 | | 20 | 50 |
| 80 | | 2 | 41 |
| 90 | | | 0 |

Wenn für kleinere Werthe von $\alpha$ (z. B. $\alpha = 20^0$) der Punkt $M$ annähernd auf der Halbirungslinie des Winkels $\gamma$ angenommen wird,

Fig. 2.




so treten die drei Lagen der Strecke $EF$, nämlich $E_1F_1$, $E_2F_2$, $E_3F_3$, welche den drei reellen Wurzeln der cubischen Gleichung entsprechen, recht deutlich hervor, wie Fig. 2 zeigt.

Eine von L'Huilier gefundene Bedingung für den Eintritt des Minimums (beziehungsweise Maximums) (Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, Tubingae 1795, pag. 270) führt zu der Bemerkung, dass, wenn die Fusspunkte der vom Punkte $A$ auf die Geraden $MF_1$, $MF_2$, $MF_3$ gefällten Perpendikel mit $K_1$, $K_2$ und $K_3$ bezeichnet werden, die Strecken $ME_1$ und $F_1K_1$, $ME_2$ und $F_2K_2$, $ME_3$ und $F_3K_3$ beziehlich gleiche Länge haben müssen. In Folge dessen liegen die Punkte $F_1$, $F_2$, $F_3$ auf einer durch den Punkt $M$ gehenden circulären Curve dritter Ordnung, welche sich mit

Hülfe des über $AM$ als Durchmesser beschriebenen Kreises construiren lässt. Ferner kann bemerkt werden, dass die Punkte $M, K_1, K_2, K_3$ auf einer Hyperbel liegen, deren Asymptoten die beiden Schenkel des gegebenen Winkels sind.

Aus einer anderen Interpretation der Bedingungsgleichung für den Eintritt des Maximums oder Minimums (Vergl. Sturm, Cours d'Analyse I, pag. 189) ergiebt sich, dass die durch $M$ senkrecht zu $ME_\lambda F_\lambda$, durch $E_\lambda$ senkrecht zu $AB$, durch $F_\lambda$ senkrecht zu $AC$ gezogenen Geraden einander (für $\lambda = 1, 2, 3$) jedesmal in demselben Punkte schneiden.

Die beiden letzten Bemerkungen verdanke ich einer von befreundeter Seite mir gemachten Mittheilung.

# Ueber Euler's homogenen lineären Multiplicator zur Integration der regulären lineären Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von

KARL HEUN in München.

---

Euler hat in seinen Institut. calc. integr. mit grosser Ausführlichkeit das Problem behandelt: einen homogenen lineären Multiplicator erster Ordnung zu bestimmen, welcher die homogene lineäre Differentialgleichung zweiter Ordnung integrirbar macht. Im Folgenden ist diese elegante Integrationsmethode zunächst übersichtlich dargestellt und dann mit der Riemann'schen Theorie der lineären Differentialgleichungen derartig in Verbindung gesetzt, dass die eigentliche Natur derselben deutlich erkennbar wird. Namentlich wird gezeigt, dass die Methode, welche Herr Fuchs angewendet hat, um die sogenannte Lamé'sche Differentialgleichung zu integriren, unmittelbar aus der Theorie des Euler'schen Multiplicators fliesst. Zugleich wird sich aus allgemeinen Betrachtungen zeigen, dass dieser besondere Fall auch der einzige ist, in welchem die Bestimmung des integrirenden Multiplicators eine wesentliche Vereinfachung zulässt.

## 1.

### Definition des Multiplicators durch eine lineäre Differentialgleichung dritter Ordnung.

Wir untersuchen nach dem Vorgange Eulers [Inst. calc. integr. t. II, cap. V], ob die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + R \cdot y = 0 \tag{1}$$

durch einen homogenen lineären Multiplicator $\mathsf{M} = H \cdot y + J \cdot \frac{dy}{dx}$ quadrirbar wird. Die Gleichung

$$\Phi = \mathsf{M} \cdot \left[\frac{d^2y}{dx^2} + R \cdot y\right] = 0 \tag{2}$$

nimmt dann unter Anwendung der Lagrange'schen Derivirtenbezeichnung die Form an:

$$\Phi = a_{12}y'y'' + a_{02}yy'' + a_{01}yy' + a_{00}yy, \tag{2a}$$

wo

$$a_{12} = J,\ a_{02} = H,\ a_{01} = RJ,\ a_{00} = RH. \tag{3}$$

Setzt man nun

$$\Phi = \frac{dF}{dx} + \mathsf{A}\cdot y'y' + \mathsf{B}yy, \tag{4}$$

dann ist

$$F = \tfrac{1}{2}a_{12}y'y' + \tfrac{1}{2}(a_{01} - a'_{02})yy + a_{02}yy', \tag{5}$$

$$\mathsf{A} = -a_{02} - \tfrac{1}{2}a'_{12}, \tag{6}$$

$$\mathsf{B} = a_{00} - \tfrac{1}{2}a'_{01} + \tfrac{1}{2}a''_{02}. \tag{7}$$

Damit $\Phi$ ein vollständiges Differential werde, müssen also die Bedingungen $\mathsf{A} = 0$ und $\mathsf{B} = 0$ erfüllt sein. Mit Berücksichtigung der Werthe von $a_{12}$, $a_{02}$, $a_{01}$ und $a_{00}$ erhält man die beiden Gleichungen:

$$H = -\tfrac{1}{2}\frac{dJ}{dx}, \tag{8}$$

$$RH - \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}(RJ) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2H}{dx^2} = 0, \tag{9}$$

woraus für $J$ die Gleichung

$$\frac{d^3J}{dx^3} + 4R\cdot\frac{dJ}{dx} + 2R'\cdot J = 0 \tag{10}$$

folgt.

Eine erste Integralgleichung von (1) ist also $F = \alpha$ oder:

$$\tfrac{1}{2}Jy'y' + \tfrac{1}{2}\left[RJ - \frac{dH}{dx}\right]yy + Hyy' = \alpha. \tag{11}$$

Aus Gleichung (10) folgt aber:

$$R = \frac{1}{JJ}\left[\varkappa + \tfrac{1}{4}J'J' - \tfrac{1}{2}JJ''\right], \tag{12}$$

wo $\varkappa$ als Integrationsconstante eingeführt ist. Durch Einsetzen dieses Werthes von $R$ in Gleichung (11) erhält man mit Berücksichtigung von Gleichung (8):

$$\left[Jy' - \tfrac{1}{2}J'y\right]^2 + \varkappa yy = \alpha J.$$

Hieraus folgt durch Anwendung der bekannten Integrationsmethoden [M. vergl. etwa Eulers Inst. calc. integr. t. II, Nr. 889 und Nr. 892] die Integralgleichung

$$(1) \qquad y = C_1 \cdot \sqrt{J} \cdot e^{i\sqrt{\varkappa}\int \frac{dx}{J}} + C_2\sqrt{J} \cdot e^{-i\sqrt{\varkappa}\int \frac{dx}{J}}.$$

Die vorgelegte Gleichung (1) ist also vollständig integrirt, sobald irgend eine Particularlösung der Gleichung (10) bekannt ist.

## 2.

## Anwendung auf reguläre Differentialgleichungen.

Im Allgemeinen ist die Auffindung einer Particularlösung von Gleichung (10) weit schwieriger als die Integration der vorgelegten Gl. (1), was auch wohl Euler veranlasste von einer weiteren Verfolgung der vorstehenden Untersuchung abzusehen. Die neuere Theorie der linearen Differentialgleichungen gestattet jedoch näher in die Natur der Function $J$ einzudringen. Setzen wir nämlich voraus, die Gleichung (1) sei eine „reguläre" Differentialgleichung in dem üblichen Sinne, dann kann man das System der Verzweigungsindices der Function $J$ explicite darstellen. Wir nehmen also an die Function $R$ habe die Form

$$(13) \qquad R = \frac{\mathsf{P}(x)}{[\psi(x)]^2},$$

wo $\psi(x)$ eine ganze rationale Function $i^{\text{ten}}$ Grades ist, deren Nullstellen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_i$ die endlichen Verzweigungspunkte der Function $y$ anzeigen, während $\mathsf{P}(x)$ ebenfalls eine ganze rationale Function bedeutet, die vom Grade $2i - 2$ sein muss. Alsdann gehen die Gleichungen (1) und (10) über in:

$$(1a) \qquad \psi^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \mathsf{P} \cdot y = 0,$$

$$(10a) \qquad \psi^3 \frac{d^3J}{dx^3} + 4\psi \cdot \mathsf{P} \cdot \frac{dJ}{dx} + [2\psi \cdot \mathsf{P}' - 4\psi' \mathsf{P}] \cdot J = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar der Satz:

*Wird eine reguläre lineäre Differentialgleichung zweiter Ordnung durch einen Multiplicator von der Form*

$$J \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dJ}{dx} \cdot y$$

*integrabel, dann genügt die Function $J$, welche dieselbe Verzweigung besitzt wie die Function $y$, einer gleichfalls regulären lineären Differentialgleichung dritter Ordnung.*

Die zur Gleichung (1a) gehörigen „determinirenden" Gleichungen der Verzweigungsindices heissen:

$$(14) \qquad \psi'(\xi_i)\, \psi'(\xi_i)\, \lambda_i(\lambda_i - 1) + \mathsf{P}(\xi_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots i$$

für die endlichen Verzweigungspunkte

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_i$$

und

$$\lambda_{i+1}(\lambda_{i+1}+1) + \left[\frac{P(x)}{x^{2i-2}}\right]_{x=\infty} = 0$$

für den unendlich fernen Verzweigungspunkt $\xi_{i+1}$.

Die analogen Gleichungen, welche zu (10a) gehören, sind:

$$[\psi'(\xi_i)]^3 \Lambda_i(\Lambda_i - 1)(\Lambda_i - 2) + 4\psi'(\xi_i) \cdot P(\xi_i) \cdot \Lambda_i - 4\psi'(\xi_i) \cdot P(\xi_i) = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots i)$$

und

$$\Lambda_{i+1}(\Lambda_{i+1} - 1)(\Lambda_{i+1} - 2) + 6\Lambda_{i+1}(\Lambda_{i+1} - 1) + \left\{4\left[\frac{P(x)}{x^{2i-2}}\right]_{x=\infty} + 6\right\}\Lambda_{i+1} + 4\left[\frac{P(x)}{x^{2i-2}}\right]_{x=\infty} = 0.$$

Die Gleichung (16) zerfällt in die beiden folgenden:

$$\Lambda_i - 1 = 0$$

und

$$\psi'(\xi_i)\psi'(\xi_i)\Lambda_i(\Lambda_i - 2) + 4P(\xi_i) = 0.$$

Aus Gleichung (14a) folgt aber:

$$P(\xi_i) = \lambda_i^{(1)} \cdot \lambda_i^{(2)} \cdot \psi'(\xi_i)\psi'(\xi_i),$$

wenn wir die Wurzeln derselben mit $\lambda_i^{(1)}$ und $\lambda_i^{(2)}$ bezeichnen. Sind nun analog $\Lambda_i^{(1)}$, $\Lambda_i^{(2)}$, $\Lambda_i^{(3)}$ die Wurzeln von Gleichung (16), dann ist also:

$$\Lambda_i^{(1)} = 1,$$
$$\Lambda_i^{(2)} = 1 + \sqrt{1 - 4\lambda_i^{(1)}\lambda_i^{(2)}},$$
$$\Lambda_i^{(3)} = 1 - \sqrt{1 - 4\lambda_i^{(1)}\lambda_i^{(2)}},$$
$$(i = 1, 2, \ldots i).$$

Hieraus folgt aus Gleichung (17) in Verbindung mit Gleichung (15):

$$\Lambda_{i+1}^{(1)} = -1,$$
$$\Lambda_{i+1}^{(2)} = -1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{i+1}^{(1)} \cdot \lambda_{i+1}^{(2)}},$$
$$\Lambda_{i+1}^{(3)} = -1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{i+1}^{(1)} \cdot \lambda_{i+1}^{(2)}}.$$

Hiermit ist das **Resultat:**

*Besitzt* ***die vorgelegte Differentialgleichung*** (1a) *das In-*

$$\begin{Bmatrix} \underline{\xi_1} & \underline{\xi_2} & \underline{\xi_i} & \underline{\xi_{i+1}} \\ \lambda_1^{(1)}, & \lambda_2^{(1)}, \cdots & \lambda_i^{(1)}, & \lambda_{i+1}^{(1)} \\ \lambda_1^{(2)}, & \lambda_2^{(2)}, \cdots & \lambda_i^{(2)}, & \lambda_{i+1}^{(2)} \end{Bmatrix},$$

*dann gehört zu der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher die Function $J$ des integrirenden Multiplicators $J\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dJ}{dx}\cdot y$ derselben genügt, das Indicessystem*

$$\begin{Bmatrix} \underline{\xi_1} & & \underline{\xi_i} & & \underline{\xi_{i+1}} \\ 1, & \cdots & 1, & & -1 \\ 1+\sqrt{1-4\lambda_1^{(1)}\cdot\lambda_1^{(2)}}, & \cdots & 1+\sqrt{1-4\lambda_i^{(1)}\cdot\lambda_i^{(2)}}, & & -1+\sqrt{1-4\lambda_{i+1}^{(1)}\cdot\lambda_{i+1}^{(2)}} \\ 1-\sqrt{1-4\lambda_1^{(1)}\cdot\lambda_1^{(2)}}, & \cdots & 1-\sqrt{1-4\lambda_i^{(1)}\cdot\lambda_i^{(2)}}, & & -1-\sqrt{1-4\lambda_{i+1}^{(1)}\ \lambda_{i+1}^{(2)}} \end{Bmatrix}.$$

Setzt man nun $J = \psi(x)\cdot\mathfrak{J}$, dann gehört zu der Function $\mathfrak{J}$ das Indicesschema:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\xi_1} & & \underline{\xi_i} & & \underline{\xi_{i+1}} \\ 0, & \cdots & 0, & & i-1 \\ \sqrt{1-4\lambda_1^{(1)}\cdot\lambda_1^{(2)}}, & \cdots & \sqrt{1-4\lambda_i^{(1)}\cdot\lambda_i^{(2)}}, & & i-1+\sqrt{1-4\lambda_{i+1}^{(1)}\cdot\lambda_{i+1}^{(2)}} \\ -\sqrt{1-4\lambda_1^{(1)}\cdot\lambda_1^{(2)}}, & \cdots & -\sqrt{1-4\lambda_i^{(1)}\cdot\lambda_i^{(2)}}, & & i-1-\sqrt{1-4\lambda_{i+1}^{(1)}\cdot\lambda_{i+1}^{(2)}} \end{Bmatrix}$$

und die Differentialgleichung:

$$(10\,\mathrm{b}) \quad \psi\cdot\psi\cdot\frac{d^3J}{dx^3} + 3\psi'\cdot\psi\frac{d^2J}{dx^2} + [4P + 3\psi''\cdot\psi]\frac{dJ}{dx} + 2P'\cdot J = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist in gewissem Sinne einfacher als Gl. (10 a).

## 3.

## Einführung einer Normalgleichung an Stelle der vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Indem wir nach dem Vorgange Riemann's die Functionen, welche lineären Differentialgleichungen genügen, durch Angabe des zugehörigen Indicesschemas bezeichnen, stellen wir neben die Function

$$\begin{Bmatrix} \underline{\xi_1} & \underline{\xi_2} & \underline{\xi_i} & \underline{\xi_{i+1}} \\ \lambda_1^{(1)}, & \lambda_2^{(1)}, \cdots, & \lambda_i^{(1)}, & \lambda_{i+1}^{(1)} \\ \lambda_1^{(2)}, & \lambda_2^{(2)}, \cdots, & \lambda_i^{(2)}, & \lambda_{i+1}^{(2)} \end{Bmatrix},$$

welche der Gl. (1) genügt, die folgende:

$$v = \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & & \xi_i & \xi_{i+1} \\ l_1^{(1)}, & l_2^{(1)}, & \cdots, & l_i^{(1)}, & l_{i+1}^{(1)} \\ l_1^{(2)}, & l_2^{(2)}, & \cdots, & l_i^{(2)}, & l_{i+1}^{(2)} \end{matrix} \right\}.$$

Da in der Differentialgleichung (1) der Coefficient von $\frac{dy}{dx}$ gleich Null ist, so müssen die Bedingungsgleichungen

$$\lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)} = 1,$$
$$(i = 1, 2, \cdots, i)$$

bestehen. Nun ist aber:

$$v = \psi^{-\frac{1}{2}} \cdot (x - \xi_1)^{\frac{l_1^{(1)} + l_1^{(2)}}{2}} (x - \xi_2)^{\frac{l_2^{(1)} + l_2^{(2)}}{2}} \cdots (x - \xi_i)^{\frac{l_i^{(1)} + l_i^{(2)}}{2}}$$

$$\chi \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & & \xi_i & \xi_{i+1} \\ \frac{l_1^{(1)} - l_1^{(2)} + 1}{2}, & \frac{l_2^{(1)} - l_2^{(2)} + 1}{2}, & \cdots, & \frac{l_i^{(1)} - l_i^{(2)} + 1}{2}, & -\frac{i}{2} + l_{i+1}^{(1)} + \sum_{i=1}^{i=i} \left( \frac{l_i^{(1)} + l_i^{(2)}}{2} \right) \\ \frac{l_1^{(2)} - l_1^{(1)} + 1}{2}, & \frac{l_2^{(2)} - l_2^{(1)} + 1}{2}, & \cdots, & \frac{l_i^{(2)} - l_i^{(1)} + 1}{2}, & -\frac{i}{2} + l_{i+1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{i=i} \left( \frac{l_i^{(1)} + l_i^{(2)}}{2} \right) \end{matrix} \right\}.$$

Setzt man also:

$$(18) \qquad \left\{ \begin{matrix} \lambda_i^{(1)} = \frac{l_i^{(1)} - l_i^{(2)} + 1}{2}, \\ \lambda_i^{(2)} = \frac{l_i^{(2)} - l_i^{(1)} + 1}{2}, \end{matrix} \right.$$
$$(i = 1, 2, \cdots, i)$$

dann besteht zwischen den Functionen $y$ und $v$ die Relation:

$$(19) \qquad y = \psi^{\frac{1}{2}} \cdot (x - \xi_1)^{-\frac{l_1^{(1)} + l_1^{(2)}}{2}} \cdot (x - \xi_2)^{-\frac{l_2^{(1)} + l_2^{(2)}}{2}} \cdots (x - \xi_i)^{-\frac{l_i^{(1)} + l_i^{(2)}}{2}} \cdot v.$$

Die Function $v$ genügt einer Differentialgleichung von der Form:

$$(16) \qquad \psi\psi \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + \psi \cdot \chi \cdot \frac{dv}{dx} + \omega \cdot v = 0,$$

[redacted] ganze rationale Functionen des Argumentes $x$ bezw. vom

Grade $i-2$ und $2i-2$ sind, welche wegen Gl. (19) mit $R$ in der folgenden Beziehung stehen:

$$R = \frac{\varpi}{\psi^2} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\chi}{\psi}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\chi}{\psi}\right)^2. \tag{20}$$

Das Indicesschema der Function $J$ nimmt, wenn man die Indices $\lambda$ der Gl. (1) durch die Indices $l$ der Normalgleichung (16) ersetzt, die folgende einfache Form an:

$$\left\{\begin{array}{cccc} \frac{\xi_1}{0}, & \frac{\xi_2}{0}, \cdots, & \frac{\xi_i}{0}, & \frac{\xi_{i+1}}{i-1} \\ l_1^{(1)}-l_1^{(2)}, & l_2^{(1)}-l_2^{(2)}, \cdots, & l_i^{(1)}-l_i^{(2)}, & i-1+\sqrt{1-4\lambda_{i+1}^{(1)}\cdot\lambda_{i+1}^{(2)}} \\ l_1^{(2)}-l_1^{(1)}, & l_2^{(2)}-l_2^{(1)}, \cdots, & l_i^{(2)}-l_i^{(1)}, & i-1-\sqrt{1-4\lambda_{i+1}^{(1)}\cdot\lambda_{i+1}^{(2)}} \end{array}\right\},$$

wo

$$\lambda_{i+1}^{(1)} = -\frac{i}{2} + l_{i+1}^{(1)} + \sum_{i=1}^{i=i}\frac{1}{2}(l_i^{(1)} + l_i^{(2)}),$$

$$\lambda_{i+1}^{(2)} = -\frac{i}{2} + l_{i+1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{i=i}\frac{1}{2}(l_i^{(1)} + l_i^{(2)}),$$

zu setzen ist.

Eine weitere Vereinfachung erhält man durch Anwendung der elementaren Transformation:

$$\left\{\begin{array}{cccc} \frac{\xi_1}{l_1^{(1)}}, & \frac{\xi_2}{l_2^{(1)}}, \cdots, & \frac{\xi_i}{l_i^{(1)}}, & \frac{\xi_{i+1}}{l_{i+1}^{(1)}} \\ l_1^{(2)}, & l_2^{(2)}, \cdots, & l_i^{(2)}, & l_{i+1}^{(2)} \end{array}\right\} = (x-\xi_1)^{l_1^{(1)}}\cdot(x-\xi_2)^{l_2^{(1)}}\cdots(x-\xi_i)^{l_i^{(1)}}$$

$$\times\left\{\begin{array}{cccc} \frac{\xi_1}{0}, & \frac{\xi_2}{0}, \cdots, & \frac{\xi_i}{0}, & \frac{\xi_{i+1}}{l_{i+1}^{(1)}+\sum_{i=1}^{i=i} l_i^{(1)}} \\ l_1^{(2)}-l_1^{(1)}, & l_2^{(2)}-l_2^{(1)}, \cdots, & l_i^{(2)}-l_i^{(1)}, & l_{i+1}^{(2)}+\sum_{i=1}^{i=i} l_i^{(1)} \end{array}\right\}.$$

$$= (x-\xi_1)^{l_1^{(1)}}\cdot(x-\xi_2)^{l_2^{(1)}}\cdots(x-\xi_i)^{l_i^{(1)}}\cdot w.$$

Alsdann genügt die Function $w$ der Gleichung:

$$\psi\cdot\frac{d^2w}{dx^2} + \chi\cdot\frac{dw}{dx} + \varpi\cdot w = 0, \tag{1c}$$

wo $\chi$ wiederum eine ganze rationale Function vom Grade $i-1$ bedeutet, während $\varpi$ den Grad $i-2$ besitzt. Schreibt man nun das Indicesschema der Function $w$ in der Form

$$\left\{\begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_i & \xi_{i-1} \\ 0, & 0, \cdots, & 0, & l_{i+1}^{(1)} \\ l_1, & l_2, \cdots, & l_i, & l_{i+1}^{(2)} \end{array}\right\},$$

dann geht das Schema für die Function $J$ über in:

$$\left\{\begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_i & \xi_{i+1} \\ 0, & 0, & 0, & i-1 \\ -l_1, -l_2, \cdots, & -l_i, & i-1+\sqrt{1-4\lambda_{i+1}^{(1)}\cdot\lambda_{i+1}^{(2)}} \\ l_1, & l_2, \cdots, & l_i, & i-1-\sqrt{1-4\lambda_{i+1}^{(1)}\cdot\lambda_{i+1}^{(2)}} \end{array}\right\},$$

wo

$$\lambda_{i+1}^{(1)} = -\frac{i}{2} + l_{i+1}^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=i} l_i,$$

$$\lambda_{i+1}^{(2)} = -\frac{i}{2} + l_{i+1}^{(2)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=i} l_i$$

zu setzen ist.

Die Gl. (1c) hat einen wesentlichen Vorzug vor der Gl. (1b), obwohl eigentlich keine die andere an Allgemeinheit übertrifft. Um dies einzusehen, muss man beachten, dass eine lineäre Differentialgleichung zweiter Ordnung mit $i$ endlichen Verzweigungspunkten nicht durch Angabe des Indicesschemas bekannt ist, sondern noch $i-2$ weitere Bestimmungsstücke erfordert, welche wir die „charakteristischen Parameter" nennen wollen. Schreibt man nun die Function $\varpi$ in der Form:

$$\varpi = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_{i-2} x^{i-2}, \tag{20}$$

dann sind die Coefficienten $k_0, k_1, \cdots, k_{i-3}$ von den Verzweigungsindices unabhängig, so dass sie als die charakteristischen Parameter der Gl. (1c) betrachtet werden können, während

$$k_{i-2} = l_{i+1}^{(1)} \cdot l_{i+2}^{(2)} \tag{21}$$

ist. Für die Gl. (1c) hingegen finden solche einfache Verhältnisse nicht statt.

## 4.

## Reduction der Differentialgleichung dritter Ordnung.

Wir wollen nunmehr den besonders wichtigen Fall untersuchen, in welchem die Differentialgleichung (10b) auf eine andere derselben Ordnung zurückgeführt werden kann, deren Coefficienten einzeln um $i$ Grade niedriger sind als diejenigen der Gl. (10b). Zu diesem Zwecke ist es nothwendig die letztere Gleichung unter den Schema-

tismus der allgemeinen regulären Differentialgleichung dritter Ordnung zu bringen. Eine solche hat die Form:

$$(22)\quad \psi^3 \cdot \frac{d^3Y}{dx^3} + \psi\psi \cdot F_1[i-1] \cdot \frac{d^2Y}{dx^2} + \psi \cdot F_2[2i-2] \cdot \frac{dY}{dx} + F_3[3i-3] \cdot Y = 0.$$

Hierbei bedeuten $F_1$, $F_2$, $F_3$ ganze rationale Functionen des Argumentes $x$, deren Grade in Klammern angemerkt sind. Die Indices

$$\begin{gathered} L_1^{(1)},\ L_2^{(1)},\ \cdots,\ L_i^{(1)}, \\ L_1^{(2)},\ L_2^{(2)},\ \cdots,\ L_i^{(2)}, \\ L_1^{(3)},\ L_2^{(3)},\ \cdots,\ L_i^{(3)} \end{gathered}$$

sind beziehungsweise die Wurzeln der $i$ determinirenden Gleichungen:

$$[\psi'(\xi_i)]^3 L_i(L_i-1)(L_i-2) + [\psi'(\xi_i)]^2 \cdot F_1(\xi_i) \cdot L_i(L_i-1) + \psi'(\xi_i) \cdot F_2(\xi_i) \cdot L_i + F_3(\xi_i) = 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, i.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$L_i^{(1)} + L_i^{(2)} + L_i^{(3)} = \mathfrak{S}_i,$$
$$L_i^{(1)} L_i^{(2)} + L_i^{(2)} L_i^{(3)} + L_i^{(3)} L_i^{(1)} = \mathfrak{C}_i,$$
$$L_i^{(1)} L_i^{(2)} L_i^{(3)} = \mathfrak{P}_i,$$

dann ist:

$$F_1(\xi_i) = \psi'(\xi_i) \cdot (3 - \mathfrak{S}_i),$$
$$F_2(\xi_i) = [\psi'(\xi_i)]^2 (\mathfrak{C}_i - \mathfrak{S}_i + 1),$$
$$F_3(\xi_i) = -[\psi'(\xi_i)]^3 \cdot \mathfrak{P}_i.$$

Hieraus schliessen wir:

1. Die Differentialgleichung (22) kann nur dann durch die Function $\psi(x)$ theilbar werden, wenn die Bedingungen
$$\mathfrak{P}_i = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, i)$$
erfüllt sind.
2. Wenn dieselbe Differentialgleichung durch die Function $[\psi(x)]^2$ theilbar sein soll, so müssen nothwendiger Weise die Bedingungen
$$\mathfrak{C}_i - \mathfrak{S}_i + 1 = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, i)$$
erfüllt sein.

Die letzteren Bedingungen sind natürlich nur nothwendige, keineswegs auch hinreichende. Wenden wir nun das Vorstehende auf die Function $\mathfrak{J}$ an, so erkennen wir ohne Weiteres, dass die Bedingungen $\mathfrak{P}_i = 0$ hier erfüllt sind. Die Gleichungen $\mathfrak{C}_i - \mathfrak{S}_i + 1 = 0$ sind dagegen nur befriedigt, wenn $-I_i I_i + 1 = 0$ d. h. $I_i = 1$ oder gleich $-1$ wird. Man überzeugt sich jedoch leicht, dass diese Be-

dingungen hier nicht hinreichen, um die Gl. (10b) durch $\psi(x)$ theilbar zu machen.

Setzen wir aber

$$J = (x - \xi_1)^{-l_1} \cdot (x - \xi_2)^{-l_2} \cdots (x - \xi_i)^{-l_i} \cdot G,$$

dann erhält man für die Function $G$ das Indicesschema:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \xi_1 & \xi_2 & & \xi_i & & \xi_{i+1} \\ 0, & 0, \cdots, & 0, & i-1-\sum_{i=1}^{i=i} l_i & & \\ l_1, & l_2, \cdots, & l_i, & i-1-\sum_{i=1}^{i=i} l_i + \sqrt{1-4\lambda_{i+1}^{(1)}\cdot\lambda_{i+1}^{(2)}} & & \\ 2l_1, & 2l_2, \cdots, & 2l_i, & i-1-\sum_{i=1}^{i=i} l_i - \sqrt{1-4\lambda_{i+1}^{(1)}\cdot\lambda_{i+1}^{(2)}} & & \end{array} \right\}.$$

Die Bedingungen $\mathfrak{S}_i - \mathfrak{S}_i + 1 = 0$ ergeben in diesem Falle die Gleichungen

$$l_i l_i - \tfrac{3}{2} l_i + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$l_i = \tfrac{1}{2} \quad | \, i = 1, 2, \cdots, i,$$

da die andere Wurzel, welche gleich Eins ist, nach dem Obigen jedenfalls zu verwerfen ist. In der That folgt aus der Gl. (10b) für die Function $G$ wegen der Relation

$$J = (\sqrt{\psi})^{-1} \cdot G$$

die Gleichung:

$$(10c) \quad \psi \frac{d^3G}{dx^3} + \tfrac{3}{2}\psi' \cdot \frac{d^2G}{dx^2} + \left[\tfrac{1}{2}\psi'' + 4\varpi\right] \cdot \frac{dG}{dx} + 2\varpi' \cdot G = 0,$$

denn es ist wegen $l_i = \frac{1}{2}$

$$\chi = \tfrac{1}{2}\psi' \quad \text{und folglich} \quad P = \psi \cdot \varpi - \tfrac{1}{4}\psi'' \cdot \psi + \tfrac{3}{16}\psi'\psi'.$$

Wir haben also das Resultat:

„Ist $G$ eine Lösung der Differentialgleichung (10c), dann ist

$$w = C_1 \cdot \sqrt{G} \cdot e^{\sqrt{-k}\int \frac{dx}{G\sqrt{\psi}}} + C_2 \cdot \sqrt{G} \cdot e^{-\sqrt{-k}\int \frac{dx}{G\sqrt{\psi}}}$$

ein vollständiges Integral der Differentialgleichung:

$$\psi \frac{d^2w}{dx^2} + \tfrac{1}{2}\psi' \cdot \frac{dw}{dx} + \varpi \cdot w = 0.“$$

Herr Fuchs hat in einer Abhandlung [Göttinger Nachrichten 1878] über die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung die Gl. (10c)

derartig integrirt, dass $G$ eine ganze rationale Function wird. Hierbei werden alle charakteristischen Parameter der Function $w$ gewissen Bedingungen unterworfen, mit Ausnahme eines einzigen, welcher beliebig bleibt. Für den Fall $i = 3$ ist demnach die Differentialgleichung

$$\psi \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2}\psi' \cdot \frac{dw}{dx} + \varpi \cdot w = 0$$

durch die obige Methode „allgemein" integrirt, d. h. für jeden beliebigen Werth des charakteristischen Parameters.

Ist $\chi$ nicht gerade gleich $\frac{1}{2}\frac{d\psi}{dx}$, wie in dem obigen Falle, dann lässt sich die Differentialgleichung (10b) nicht auf eine einfachere zurückführen, so dass also der Fall der sogenannten Lamé'schen Differentialgleichung der *einzige* ist, für welchen eine solche Vereinfachung möglich ist.

Frankfurt a. M., 11. November 1887.

---

## Nachtrag.

Herr G. Humbert hat mich durch Vermittlung des Herrn F. Klein kürzlich aufmerksam gemacht, dass das Resultat meiner Untersuchungen über die „Integration regulärer lineärer Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die Kettenbruchentwicklung von ganzen Abel'schen Integralen dritter Gattung" (pag. 553—560 des XXX. Bandes der *Mathem. Ann.*) im Wesentlichen schon in seiner im 48. Hefte des *Journal de l'école polytechn.* erschienenen Abhandlung: „Sur l'équation differentielle linéaire du second ordre" enthalten ist. Eine Vergleichung der beiden Arbeiten zeigt in der That, dass Herrn Humbert die Priorität in diesem Punkte gebührt. Ich muss jedoch bemerken, dass die von mir benutzte Methode sich von der Heine'schen, deren sich auch Herr Humbert bedient hat, wesentlich unterscheidet und namentlich ohne Weiteres auf lineäre Differentialgleichungen dritter und höherer Ordnung übertragbar ist.

München, 14. Februar 1888.

---

# Ueber algebraische Correspondenzen.

Von

A. Brill in Tübingen.

Im Nachfolgenden beabsichtige ich die Ergebnisse einiger früheren Arbeiten, in welchen ich Correspondenzen theils in geometrischer, theils in algebraischer Form untersucht habe, im Zusammenhang und auf einheitlicher algebraischer Grundlage ruhend darzustellen. Die Gleichung einer Correspondenz, — eine Gleichung zwischen zwei Paaren von Veränderlichen — ist verschiedene Gestalten anzunehmen fähig, welche von der Ordnung abhängen, in der die Gleichung verschwindet, wenn man die Variabelnpaare einander gleich setzt; dem Studium dieser Formen ist der erste Theil dieser Untersuchungen gewidmet. In dem Falle, dass zwischen jedem der Variabelnpaare noch eine (und zwar dieselbe) Bedingungsgleichung besteht, erhebt sich die Frage nach den Coincidenzstellen d. h. den Stellen des Zusammenfallens zweier Punkte des durch diese Gleichung dargestellten Gebildes (das man als ebene Curve oder auch als Riemann'sche Fläche denken kann). Die Anzahl dieser Stellen bestimmt sich mit Hilfe des sogenannten Correspondenzprincips, einer Formel, für welche man in den späteren Abschnitten einen directen algebraischen Beweis finden wird.

Mag man auch den practischen Nutzen dieser und ähnlicher Formeln für den Zweck geometrischer Abzählungen nicht höher anschlagen, wie den anderer Abzählungsformeln der neueren Geometrie, so knüpft sich doch an jenes Princip ein weitreichendes Interesse für die Theorie der algebraischen Functionen, welches sich unter anderem darin zeigt, dass man für dasselbe von verschiedenen Seiten her neue Beweise geliefert hat, die alle — mit Ausnahme des von Herrn Schubert**) gegebenen geometrischen — auf die Functionentheorie hinweisen: so der vor längerer Zeit von Herrn Lindemann***) geführte Beweis und namentlich

*) Diese Annalen, Band VI, S. 33; Band VII, S. 607.

**) Calcul der abzählenden Geometrie, § 18. — Auch der kürzlich von Herrn Bobek in den Sitzb. d. k. Acad. d. Wiss. in Wien Jahrg. 1886 veröffentlichte Beweis beruht zum Theil auf geometrischen Betrachtungen.

***) Journal für Mathematik, gegr. von Crelle, Bd. 84, S. 300.

die Untersuchungen, durch die kürzlich Herr Hurwitz*) die Theorie der Correspondenzen in ein neues Licht gerückt hat. In seinem Werk über Geometrie (Vorlesungen von Clebsch) hat ferner Herr Lindemann auch für die algebraische Auffassung der Sache schöne Beiträge geliefert, doch beziehen sich dieselben insbesondere auf das Problem der Elimination aus *zwei* Correspondenzgleichungen zwischen zwei Punkten derselben Curve, während die Frage nach den Coincidenzpunkten *einer* Correspondenz in jenem Werk im Wesentlichen mit denselben Mitteln behandelt wird, deren ich mich bei der ersten Begründung der Correspondenzformel bedient hatte. Diese Begründung leidet aber an dem Mangel, indirect zu sein, so dass das Wesen des algebraischen Processes, der zu der Coincidenzgleichung führt, nicht klar gelegt erscheint.

Ich beabsichtige nun im Folgenden die zu dieser Coincidenzgleichung führende Elimination wirklich auszuführen, und zwar in solcher Anordnung, dass jene Gleichung nicht nur von fremden Factoren befreit erscheint, sondern auch hinsichtlich ihrer Haupteigenschaften ohne Mühe untersucht werden kann, wobei sich dann die Correspondenzformel gewissermassen beiläufig ergiebt.

Ueberhaupt wünschte ich die Abzählungsformeln, die wohl als nächstes greifbares Resultat neben der ausgeführten Elimination erscheinen, keineswegs als Ziel und Endzweck der folgenden Untersuchungen angesehn zu wissen. Das Wesentliche ist die Durchführung der algebraischen Processe, welche die Endgleichung in allen möglichen Fällen herzustellen gestatten. Jene Zählformeln — zudem wenn sie an die Voraussetzung des sogenannten „allgemeinen Falles" anknüpfen — sind vielmehr nur als Anhang zu der algebraischen Untersuchung, die derartigen Einschränkungen nicht unterliegt, anzusehen, und dienen — vermöge gewisser ihnen anhaftender formalen Eigenschaften — z. B. ihrer Symmetrie bei unsymmetrischem Gang der Elimination — vornehmlich als Controle des Resultats, indem sie die richtig erfolgte Beseitigung fremder Lösungen, die aufzutreten pflegen, anzeigen.

An die im Folgenden behandelten Probleme über das gleichzeitige Bestehen von *zwei* Correspondenzgleichungen *ohne* Bedingungsgleichung (deren eines eben mit der Aufstellung der Correspondenzformel sich als identisch erweist) reihen sich naturgemäss diejenigen an, bei welchen drei oder mehr Correspondenzen — mit und ohne Bedingungsgleichung — gegeben sind. Eine Fortsetzung der Arbeit in dieser Richtung gedenke ich später nachfolgen zu lassen.

---

*) Diese Annalen Bd. 28, S. 561 und Berichte der K. Sächs. Ges. d. Wiss. vom Jahr 1886.

## I. Allgemeines. Normirung einer Correspondenzgleichung.

### 1.

Gegeben seien zwei Paare von (reellen oder complexen) Variabeln $xy$, $x'y'$, denen ich im Folgenden des bequemeren Ausdrucks halber eine geometrische Deutung geben werde — ohne jedoch die Anschauung selbst als Beweismittel heranzuziehen —, indem ich sie auffasse als Cartesische Coordinaten von zwei Punkten $P$ und $P'$ einer Ebene. Zwischen diesen Coordinatenpaaren bestehe eine Gleichung:

$$\varphi(xy, x'y') = 0, \tag{1}$$

wo $\varphi$ eine ganze rationale Function der Veränderlichen ist, die, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, *auf ihre einfachste Form gebracht*, d. h. von allen identisch sich gegenseitig aufhebenden Gliedern befreit zu denken ist. Sieht man etwa den Punkt $P'$, mit den Coordinaten $x'y'$, als festliegend, $P$ aber als beweglich an, so entsprechen vermöge obiger Gleichung dem Punkte $P'$ unendlich viele Lagen des Punktes $P$, deren Inbegriff — wiewohl für den Fall complexer Variabeln eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit — nach dem Sprachgebrauche der Geometrie als „Curve" bezeichnet werden möge. Ich nenne sie die Curve $\varphi(P')$, weil die Coefficienten ihrer Gleichung Functionen der Coordinaten von $P'$ sind.

Wenn die Gleichung $\varphi = 0$ der Curve $\varphi(P')$ für alle Werthe von $x'y'$ durch ein Werthepaar $x = a_1$, $y = b_1$ erfüllt wird, so geht die Curve, unabhängig von der Lage des Punktes $P'$, durch den „festen" Punkt $a_1 b_1$ der Ebene. Verschwinden in derselben Weise auch die ersten, zweiten, ... partiellen Differentialquotienten von $\varphi$ nach $xy$ für $x = a_1$, $y = b_1$, so sagen wir, *die Curve $\varphi(P')$ geht doppelt, dreifach, ... durch den festen Punkt $a_1 b_1$*. — Von der Function $\varphi$ sagen wir in diesem Fall, *dass sie für $x = a_1$, $y = b_1$ mehrfach verschwinde.*

Sind andrerseits in $\varphi(xy, x'y') = 0$ die Coordinaten des Punktes $P$ gegeben, so entspricht jeder Lage von $P$ eine Curve $\varphi(P)$, welche nun auch ihrerseits durch den festen Punkt $a_1 b_1$ einfach oder mehrfach hindurchgehen kann.

Verschwindet die Function $\varphi(xy, x'y')$ für $x' = x$, $y' = y$ nicht identisch, so stellt die Gleichung, die durch Gleichsetzen von $x$ und $x'$, $y$ und $y'$ aus $\varphi = 0$ entsteht:

$$\varphi(xy, xy) = 0, \tag{2}$$

eine Curve dar, deren Punkte sich dadurch auszeichnen, dass jedem derselben, als Punkt $P'$ (bezw. $P$) aufgefasst, eine Curve $\varphi(P')$ (bezw. $\varphi(P)$) entspricht, *welche durch ihn hindurchgeht.*

Bezeichnet man die Gleichung (1), die eine „Correspondenz" zwischen den Punkten $P$ und $P'$ darstellt, als *Correspondenzgleichung*, die Curven $\varphi(P')$, $\varphi(P)$ als *Correspondenzcurven*, so kann man die Gleichung (2) die *Coincidenzgleichung* nennen, weil sie aus der Correspondenzgleichung durch Zusammenfallen der sich entsprechenden Punkte $P$ und $P'$ entsteht. Die durch dieselbe dargestellte *Coincidenzcurve* geht durch jeden festen Punkt $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... der Ebene, durch welchen eine der Correspondenzcurven — unabhängig von der Lage von $P'$, bezw. $P$ — hindurchgeht, und zwar mindestens $(\beta_i + \beta_i')$-fach durch den Punkt $a_i b_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, durch welchen $\varphi(P')$ $\beta_i$-fach, $\varphi(P)$ $\beta_i'$-fach geht.

In der That, setzt man zur Abkürzung (unter Weglassung des Index $i$):

$$\varphi(x\,y,\ a\,b) = \varphi_0,$$
$$\varphi(a\,b,\ x'\,y') = \varphi_1,$$

so wird, wenn identisch (d. h. für alle Werthe von $x, y$):

$$(3)\quad \varphi_0 = 0;\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial a} = 0;\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial b} = 0;\ \ldots\ \frac{\partial^{\beta-1}\varphi_0}{\partial a^{\beta-1}} = 0;\ \ldots\ \frac{\partial^{\beta-1}\varphi_0}{\partial b^{\beta-1}} = 0$$

ist, auch jeder Differentialquotient der linken Seiten dieser Gleichungen nach $x$ und $y$ verschwinden. Aehnliches gilt für die Ableitungen nach $x'$ und $y'$ von:

$$(3a)\qquad \varphi_1 = 0;\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} = 0;\ \ldots\ \frac{\partial^{\beta'-1}\varphi_1}{\partial b^{\beta'-1}} = 0.$$

Bezeichnet man nun durch Einschliessen in Klammern, dass in der eingeschlossenen Function:

$$x = a,\ y = b;\ x' = a;\ y' = b$$

gesetzt werden soll, so hat man die Beziehungen:

$$(\varphi) = \varphi(ab, ab) = (\varphi_0) = (\varphi_1),$$
$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}\right) = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial a}\right);\ \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x\,\partial a}\right) = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x'\,\partial a}\right);\ \text{u. s. w.}$$

Mit Hilfe derselben erkennt man, dass unter Voraussetzung der Gleichungen (3), (3a), für $\beta + \beta' > 0$ man hat:

$$\frac{\partial(\varphi)}{\partial a} = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial(\varphi)}{\partial b} = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'}\right) = 0;$$

für $\beta + \beta' > 1$ ist ferner:

$$\frac{\partial^2(\varphi)}{\partial a^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x\,\partial a}\right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x'\,\partial a}\right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x'^2}\right) = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^{\beta+\beta'-1}(\varphi)}{\partial b^{\beta+\beta'-1}} = \left(\frac{\partial^{\beta+\beta'-1}\varphi_0}{\partial y^{\beta+\beta'-1}}\right) + \left(\frac{\partial^{\beta+\beta'-1}\varphi_0}{\partial y^{\beta+\beta'-2}\partial b}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial^{\beta+\beta'-1}\varphi_1}{\partial y'^{\beta+\beta'-1}}\right) = 0,$$

... einzelne der auf der rechten Seite stehenden Glieder ... erst die $(\beta+\beta')^{\text{ten}}$ Differentialquotienten verschwinden ... auch in dieser Weise, indem beispielsweise das Glied:

$$\frac{\partial^{\beta+\beta'}\varphi_0}{\partial b^{\beta'}\,\partial y^{\beta}}$$

im Allgemeinen von Null verschieden ist.

## 2.

Die Coincidenzgleichung des § 1 verliert ihre Bedeutung, wenn die Function $\varphi$ für $x=x'$, $y=y'$ identisch verschwindet. In diesem Falle lässt sich $\varphi$ auf die Form bringen:

$$\varphi(xy, x'y') = (x-x')A + (y-y')B, \tag{1}$$

wo $A$ und $B$ ganze Functionen von $xyx'y'$ sind. Diese Form ist jedoch keine völlig bestimmte, indem man die rechte Seite, wie folgt, umgestalten kann:

$$\varphi = (x-x')\,(A+\lambda(y-y')) + (y-y')\,(B-\lambda(x-x')),$$

wo die willkürliche Function $\lambda$ zur Abänderung des Coefficienten von $x-x'$ oder des von $y-y'$ verfügbar ist. Verschwinden ausser $\varphi$ auch noch die ersten partiellen Ableitungen dieser Function nach $x$, $y$, *wenn man* $x'=x$, $y'=y$ *setzt* — eine Operation, die in der Folge durch *Einschliessen in eckige Klammern* ausgedrückt werden möge, ist also ausser:

$$[\varphi] = 0$$

auch noch:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = 0; \quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = 0,$$

so folgt aus (1):

$$[A] = 0; \qquad [B] = 0,$$

und hieraus wiederum:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right] = 0; \quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right] = 0.$$

Man kann dann die Functionen $A$ und $B$ wieder in die oben für $\varphi$ angegebene Gestalt (1) bringen, und $\varphi$ selbst erhält die Form eines homogenen quadratischen Ausdrucks von $x-x'$, $y-y'$:

$$\varphi = (x-x')^2A + (x-x')\,(y-y')B + (y-y')^2C,$$

wo die Coefficienten $A, B, C$ mit Hilfe von zwei willkürlichen Functionen noch folgendermassen umgestaltet werden können:

$$\varphi = (x-x')^2(A+\lambda(y-y')) + (x-x')(y-y')\,(B-\lambda(x-x')+\mu(y-y')) + (y-y')^2(C-\mu(x-x')).$$

...nden endlich ausser den ersten auch noch die zweiten, ...

$(\beta-1)^{\text{ter}}$ Ableitungen von $\varphi$ nach $x$ und $y$, so schliesst man zunächst wie oben, dass auch diejenigen der $1, 2 \ldots (\beta-1)^{\text{ten}}$ Ordnung nach $x'y'$ verschwinden. Die Function $\varphi$ lässt sich dann in Form eines homogenen Ausdrucks $\beta^{\text{ter}}$ Ordnung von $x-x'$, $y-y'$ anschreiben:

$$(2) \quad \varphi(xy, x'y') = A(x-x')^{\beta} + B(x-x')^{\beta-1}(y-y') + \cdots + K(y-y')^{\beta},$$

dessen Coefficienten $A, B, \ldots K$ ganze Functionen von $xyx'y'$ sind, die noch gewisser leicht aus dem Vorstehenden zu entnehmenden Veränderungen fähig sind.

Die hier vorausgesetzte Eigenschaft der Function $\varphi$, sammt ihren partiellen Differentialquotienten $1, 2, \ldots (\beta-1)^{\text{ter}}$ Ordnung nach den Variabeln für $x = x'$, $y = y'$ zu verschwinden, will ich (in Anlehnung an eine früher von mir gebrauchte Bezeichnungsweise) „*Werthigkeit*“ $\beta$ der Correspondenz oder der Function $\varphi$ nennen*) und in der Folge durch den an die Klammer angehängten Index $\beta$:

$$\varphi(xy, x'y')_{\beta}$$

andeuten.

Setzt man die Function $\varphi$ in der Darstellung (2), nachdem man mit $(x-x')^{\beta}$ dividirt hat, gleich Null, und lässt dann $x'$ mit $x$, $y'$ mit $y$ zusammenfallen, so erhält man eine Bestimmungsgleichung für den Quotienten:

$$\frac{y-y'}{x-x'},$$

aus welcher sich der Verlauf der Curve $\varphi(P')$ in der Nähe eines Punktes $P'$ ergiebt, in den der entsprechende $P$ hereingerückt ist. Sie wird dann Bestimmungsgleichung für die $\beta$ Tangenten, welche der in $P'$ auftretende $\beta$-fache Punkt der Curve $\varphi(P')$ besitzt.

## 3.

Während, nach der oben gemachten Voraussetzung, die linke Seite der identischen Gleichung (2) keine Terme enthält, die sich gegenseitig aufheben, ist dies mit der rechten Seite keineswegs mehr der Fall. Man wird in vielen Fällen finden, dass durch Ausmultipliciren und Reduciren gegenseitig sich weghebende Glieder entstehen, welche die Dimension der rechten Seite hinsichtlich $xy$ oder $x'y'$ höher erscheinen lassen, als diejenige der linken Seite ist. So z. B. sind in:

$$\varphi = xy' - yx' = (x-x')y - (y-y')x$$

*) Die „Werthigkeit“ ist also hier, und wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird auch im Folgenden, eine ganze positive Zahl. — Wenn zu der Correspondenzgleichung eine Bedingungsgleichung zwischen den Veränderlichen tritt, so erfährt der Begriff der Werthigkeit eine unbedeutende Modification, von der unten § 12 die Rede sein wird.

die sich weghebenden Glieder $xy$ und $-xy$ rechts von der zweiten Dimension in $xy$, während $\varphi$ nur bis zur ersten ansteigt.

Der Grund dieser scheinbaren Graderhöhung liegt in der einseitigen Bevorzugung der beiden Differenzen $x - x'$, $y - y'$ vor einer dritten gleichberechtigten. Führt man nämlich in der Function $\varphi$ statt $xy$ und $x'y'$ je homogene Variable ein, indem man dieselben durch die Quotienten:

$$\frac{x}{z}, \quad \frac{y}{z}, \quad \frac{x'}{z'}, \quad \frac{y'}{z'}$$

ersetzt, und durch Multiplication mit einer passenden Potenz von $z$ und $z'$ $\varphi$ auf die Form einer ganzen homogenen Function von $xyz$ und $x'y'z'$ bringt, so stellt sich den Differenzen:

$$u = yz' - zy',$$
$$v = zx' - xz',$$

die andere:

$$w = xy' - yx'$$

gleichberechtigt zur Seite, und es erhebt sich die Forderung, *die homogene Function von $xyz$ und $x'y'z'$*:

$$\varphi(xyz, x'y'z')_\beta,$$

welche sammt ihren partiellen Ableitungen $1 . 2 \ldots, (\beta - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung nach $xyz$ verschwindet, wenn man $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ setzt, *als homogenen Ausdruck $\beta^{\text{ter}}$ Dimension der drei Differenzen $u, v, w$ darzustellen*, also die Coefficienten $A, B, C, \ldots K$ der Entwicklung:

$$\varphi(xyz, x'y'z')_\beta = w^\beta A_0 + w^{\beta-1}(B_0 u + B_1 v) + w^{\beta-2}(C_0 u^2 + C_1 uv + C_2 v^2) + \cdots + K_0 u^\beta + K_1 u^{\beta-1} v + \cdots + K_\beta v^\beta$$

als homogene Functionen von $xyz$, $x'y'z'$ zu bestimmen.

Diese Darstellung ist so wenig wie die frühere eine eindeutige. Denn wenn man die linken Seiten der identischen Gleichungen:

$$ux + vy + wz = 0,$$
$$ux' + vy' + wz' = 0$$

mit beliebigen homogenen Functionen von passender Dimension der Variabeln: $uvw, xyz, x'y'z'$ multiplicirt und zur rechten Seite addirt, so ändert sich der Werth und der Grad der rechten Seite nicht, wohl aber der Werth der Coefficienten $A_0, B_0, B_1, \ldots$. — Hat man irgend eine Darstellung der gewünschten Art gefunden, so ist diese Wandelbarkeit der Coefficienten zur Erfüllung anderweitiger Bedingungen verwendbar.

Eine solche Darstellung erhält man aber mit Hilfe des im nachfolgenden Paragraphen angegebenen Verfahrens, das in einer *schrittweisen Umwandlung* von $\varphi$ erst in einen homogenen Ausdruck 1. Ordnung von $u, v, w$, dann in einen solchen 2. Ordnung u. s. w. besteht.

4.

Wenn die Function $\varphi(xyz, x'y'z')$ für $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ identisch verschwindet, wenn also, vermöge der in § 2 eingeführten Bezeichnungsweise:

$$[\varphi] = 0$$

ist, so muss sich zu jedem Glied, welches in dem Audruck $\varphi$ auftritt, wie:

$$G = A x^p y^q z^r x'^P y'^Q z'^R,$$

wo $p, q, r, P, \ldots$ ganze positive Zahlen sind, $A$ irgend eine Constante, ein anderes finden lassen, das für $x = x', \ldots$ bis aufs Vorzeichen ihm gleich wird, und sich gegen dasselbe aufhebt. Sei dieses:

$$\Gamma = A x^\pi y^\varkappa z^\varrho x'^\Pi y'^K z'^P.$$

Dann ist, wegen der Gleichheit der Dimensionen:

(1) $\quad p + q + r = \pi + \varkappa + \varrho; \quad P + Q + R = \Pi + \mathsf{K} + \mathsf{P},$

ferner, weil die Differenz

$$[G] - [\Gamma] = 0$$

angenommen wird:

(2) $\quad p + P = \pi + \Pi; \quad q + Q = \varkappa + \mathsf{K}; \quad r + R = \varrho + \mathsf{P}.$

Nennt man nun „Abstand" zweier Glieder, wie $G$ und $\Gamma$, die halbe Summe der Differenzen der Exponenten derselben Variabeln in diesen Gliedern, jede Differenz mit positivem Vorzeichen genommen, so ist der Abstand von $G$ und $\Gamma$ gleich:

$$|p-\pi| + |q-\varkappa| + |r-\varrho|,$$

wobei durch Einschliessen in Striche der absolute Werth der eingeschlossenen Differenz bezeichnet wird. Ist diese Zahl gleich zwei, so lässt sich, weil wegen (1) alsdann eine der Differenzen gleich Null, und jede der anderen gleich 1 sein muss, aus $G - \Gamma$ sogleich einer der Factoren $u$, $v$, $w$ ausscheiden. Um nun auch in dem Fall, dass der Abstand von $G$ und $\Gamma$ grösser als 2 ist, die Differenz $G - \Gamma$ in die Gestalt einer linearen Function von $u$, $v$, $w$ zu bringen, schalte man zwischen $G$ und $\Gamma$, je mit positivem und negativem Vorzeichen versehen, eine Reihe von sich aufhebenden Zwischengliedern $G', G'', \ldots G^{(n)}$ ein. Für jedes derselben sei die Summe der Exponenten von $x$ und $x'$ dieselbe, wie für die Endglieder $G$ und $\Gamma$, ebenso hinsichtlich der von $y$ und $y'$, $z$ und $z'$. Lassen sich diese Zwischenglieder so bestimmen, dass je zwei auf einander folgende, ebenso wie $G$ von $G'$ und $G^{(n)}$ von $\Gamma$, den Abstand 2 haben, so kann man in:

$$G - \Gamma = (G - G') + (G' - G'') + (G'' - G''') + \cdots + (G^{(n)} - \Gamma)$$

aus jedem der Klammerausdrücke einen der Factoren $u$, $v$, $w$ ausscheiden. Jene Einschaltung lässt sich aber, und zwar auf verschiedene

[illegible], vorausgesetzt, sofern nur der Abstand von $G$ und $\Gamma$ eine gerade Zahl ist.

Wenn nun $p - \pi$ etwa positiv, so muss, wegen (1), entweder $q - \varkappa$ oder $r - \varrho$ negativ sein. Man stellt also das Glied $G'$ aus $G$ dadurch her, dass man in $G$ die Exponenten etwa von $x$ und $y'$ (oder $z'$) um 1 vermindert und die von $x'$ und $y$ (oder $z$) um 1 erhöht; aus $G'$ bildet man in ähnlicher Weise $G''$, u. s. f., wobei im Auge zu behalten ist, dass, wenn nicht überflüssige Glieder entstehen sollen, der Abstand jedes neu zu bildenden Gliedes von $\Gamma$ kleiner sein muss, als der des vorhergehenden. — Dass endlich der Abstand von $G$ und $\Gamma$ eine gerade Zahl sein muss, ergiebt sich aus der Bemerkung, dass der Absolutwerth einer Differenz von zwei ganzen Zahlen sich von dem wahren Werth derselben entweder nicht oder durch eine gerade Zahl unterscheidet. Demnach unterscheidet sich der Abstand von $G$ und $\Gamma$ von

$$(p+q+r) - (\pi+\varkappa+\varrho) = 0$$

um eine gerade Zahl, w. z. b. w. — Beispiel: Zwischen den Gliedern:

$$G = Ax^2y^4z x'^2z'^3; \quad \Gamma = Ay^3z^4x'^4y'$$

schalte man die beiden Glieder:

$$G' = Ax^2y^3z^2x'^2y'z'^2; \quad G'' = Axy^3z^3x'^3y'z',$$

je mit positivem und negativem Vorzeichen versehen, ein. Dann lässt sich aus $G - G'$ der Factor $u$, aus $G' - G''$ und $G'' - \Gamma$ je der Factor $v$ ausscheiden, also ist $G - \Gamma$ in der Form $Au + Bv$ darstellbar.

Was von einem einzelnen Gliederpaar wie $G$ und $\Gamma$, gilt, lässt sich auch von der aus solchen Gliederpaaren zusammengesetzten Function $\varphi$, wenn $[\varphi] = 0$ ist, behaupten.

Durch das angegebene Verfahren erhält also, wenn $\beta \geqq 1$ ist, die Function $\varphi(xyz, x'y'z')_\beta$ die Form:

$$\varphi = Au + Bv + Cw, \tag{3}$$

wo $A$, $B$, $C$ homogene Functionen von $xyz$, $x'y'z'$ von je einer um 1 niederen Dimension wie $\varphi$ sind. Eine bemerkenswerthe Eigenschaft des so entstandenen Ausdrucks der rechten Seite von (3) ist die, dass (nach erfolgter Ausrechnung durch Ausmultipliciren) in keinem Glied eine *einzelne* der Veränderlichen in höherem Grad vorkommt als auf der linken Seite. Denn die Glieder rechts sind entweder solche, wie $G, \Gamma, \ldots$ die auch links auftreten, oder solche, die, wie $G', G'', \ldots$ durch den Einschaltungsprocess hinzugekommen sind. Aber die Letzteren sind, zufolge ihrer Entstehung, höchstens vom Grad des einen der beiden Endglieder, zwischen denen sie eingeschaltet sind, und die links vorkommen. Hiernach ist in:

(3) $\varphi = Au + Bv + Cw$

die Function $A$ hinsichtlich $x$ und $x'$ höchstens von demjenigen Grad, in welchem diese Veränderlichen auch links auftreten, hinsichtlich $yzy'z'$ aber je von einem mindestens um 1 niedrigeren Grad, als $\varphi$, weil, wenn in $A$ etwa $y$ zu der höchsten Potenz vorkäme, in der $y$ in $\varphi$ auftritt, das Product:

$$u \cdot A = (yz' - zy')A$$

hinsichtlich $y$ von höherem Grad wäre, als die linke Seite. — Ebenso ist $B$ hinsichtlich der Variabeln $xzx'z'$, $C$ hinsichtlich $xyx'y'$ von niedrigerem Grad, als die unveränderte Function $\varphi$. Verschwindet für $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ nur die Function $\varphi$, nicht aber jede ihrer ersten Ableitungen nach $xyz$, so liefert (3) die verlangte Umgestaltung von $\varphi$. Ist aber $\beta > 1$, so gelangt man von diesem Ausdruck zu einem quadratischen in $u, v, w$ auf folgendem Weg.

Die höchste Potenz, in welcher die Variabeln $x$ und $x'$ in $\varphi$ auftreten, sei bezw. die $m^{\text{te}}$ und $m'^{\text{te}}$. Dann kann man durch Absonderung derjenigen Glieder, die hinsichtlich $x$ vom $m^{\text{ten}}$ und zugleich in $x'$ vom $m'^{\text{ten}}$ Grad sind — sofern solche überhaupt vorkommen — die Function $A$ in (3) auf die Form bringen:

$$A = x^m x'^{m'} \cdot \mu + xM + x'M',$$

wo die Function $\mu$ (die verschwindet, wenn jene Glieder nicht vorkommen) nur noch die Variabeln $yy'zz'$ enthält und in Bezug auf jede derselben — ebenso wie die Functionen $MM'$ hinsichtlich jeder der Variabeln $xx'yy'zz'$ — von niedrigerem Grad als die unveränderte Function $\varphi$ ist. Daher überschreiten die einzelnen Terme der Summe:

$$S = M(ux + vy + wz) + M'(ux' + vy' + wz'),$$

nachdem man die Werthe für $uvw$ eingesetzt und ausmultiplicirt hat, hinsichtlich keiner der Variabeln einzeln genommen den Grad, den $\varphi$ in denselben erreicht. Dies ist auch noch der Fall mit:

$$\varphi \equiv \varphi - S = Uu + Vv + Ww \tag{4}$$

wo:

$$U = \mu x^m x'^{m'}; \quad V = B - yM - y'M'; \quad W = C - zM - z'M'$$

ist. Nun bestehen, für $\beta > 1$, die Gleichungen:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] = 0,$$

welche, auf die Form der rechten Seite von (4) übertragen, sogleich die folgenden nach sich ziehen:

$$[U] : [V] : [W] = x : y : z,$$

wo wieder das Einschliessen in eckige Klammern die Bedeutung hat: für $x' = x$, u. s. w.

Weil aber:

$$[U] = [\mu] x^{m+m'},$$

und die Functionen $[V]$ und $[W]$ hinsichtlich $x$ höchstens bis zum Grad $m + m' - 2$ ansteigen, so muss:

$$[U] = [V] = [W] = 0$$

sein. Daher verschwinden die durch obiges Verfahren bestimmten Functionen $U, V, W$ für $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, und sind hinsichtlich der einzelnen Variabeln bezw. $yy'zz'$; $zz'xx'$; $xx'yy'$ je von niederem Grad, wie $\varphi$.

Wendet man wiederum auf jede derselben das oben für $\varphi$ beschriebene Verfahren an, so erhält sie die Form (3), und $\varphi$ wird als quadratischer Ausdruck in $u, v, w$ darstellbar, welcher nach erfolgter Einsetzung dieser Grössen und Ausrechnung wiederum keine Glieder enthält, die von höherem Grad hinsichtlich der einzelnen Veränderlichen sind, wie $\varphi$. Auch diesem Ausdruck kann man eine Form geben, welcher derjenigen (4) für $\varphi$ analog ist, indem man auf $U$, $V$, $W$ einzeln das Verfahren anwendet, das $\varphi$ in die Form (4) überführte. Ist $\beta > 2$, so verschwinden wieder die Coefficienten der so umgestalteten quadratischen Function von $u, v, w$ einzeln, wenn man $x = x', \ldots$ setzt; es lassen sich also alle wieder linear und homogen durch $u, v, w$ ausdrücken, und man gelangt, indem man so fortfährt, zu dem gewünschten Ausdruck für die Function $\varphi$:

$$\begin{aligned}(5) \qquad \varphi = {} & w^\beta A_0 + w^{\beta-1}(B_0 u + B_1 v) + \cdots \\ & + K_0 u^\beta + K_1 u^{\beta-1} v + \cdots + K_\beta v^\beta,\end{aligned}$$

*wo die $A, B, \ldots K$ bekannte homogene Functionen von $xyz$, $x'y'z'$ sind* von einer je um $\beta$ niedrigeren Dimension als $\varphi$: *deren Grad hinsichtlich jeder einzelnen Veränderlichen dadurch bemessen ist, dass keines der Glieder, die entstehen, wenn man:*

$$\begin{aligned} u &= yz' - zy', \\ v &= zx' - xz', \\ w &= xy' - yx' \end{aligned}$$

*einsetzt und die Klammern auflöst, von höherem Grad hinsichtlich irgend einer Veränderlichen ist, als die Function $\varphi$ vor ihrer Umgestaltung.* Hiernach wird z. B. der Grad von $A_0$ in Bezug auf $xyx'y'$ einzeln mindestens um $\beta$ Einheiten niedriger sein*), als der von $\varphi$, der Grad von $B_0$ hinsichtlich $yy'$ je um $\beta$ Einheiten, hinsichtlich $xx'$ je um $\beta - 1$, hinsichtlich $zz'$ je um eine Einheit, u. s. w.

Ist also die Dimension von $\varphi$ hinsichtlich $xyz$ gleich $b$, hinsichtlich $x'y'z'$ gleich $b'$, so ist diejenige sämmtlicher Coefficienten $A_0 B_0 B_1 \ldots K_\beta$ gleich $b - \beta$ hinsichtlich $xyz$, gleich $b' - \beta$ hinsichtlich $x'y'z'$. Erhebt sich ferner die Function $\varphi$ hinsichtlich der

*) Wenn eine dieser Zahlen negativ ausfällt, so verschwindet $A_0$.

Veränderlichen $z$ allein etwa bis zum Grad $p(\leqq b)$, hinsichtlich $z'$ bis zu $p'$ $(\leqq b')$, so ist der Grad des Coefficienten $A_0$ von $w^\beta$ in $z$: $\leqq p$; in $z'$: $\leqq p'$; der Coefficienten $B_0$, $B_1$ von $w^{\beta-1}$ in $z$: $\leqq p-1$; in $z'$ $\leqq p-1$ u. s. w. der Coefficienten $K_0 K_1 \ldots K_\beta$ von $w^0$ in $z$: $\leqq p-\beta$; in $z'$: $\leqq p'-\beta$. Wenn man die Function $\varphi$ als unzerfällbar voraussetzt, so darf man

$$p \geqq \beta; \quad p' \geqq \beta$$

annnehmen. Denn wäre z. B. $p-\beta$ negativ, so müssten sämmtliche Coefficienten $K$ verschwinden. Dann liesse sich aber aus $\varphi$ der Factor:

$$w = xy' - yx'$$

ausscheiden.

## 5.

Wenn man in den Coefficienten $A, B, \ldots K$ der Gleichung (5) des vorigen Paragraphen die Variabeln $x'y'z'$ und $xyz$ einander gleich setzt, und aus der Gleichung:

$$(1) \quad 0 = \Phi(uvw, xyz) = w^\beta[A_0] + w^{\beta-1}([B_0]u + [B_1]v) + \cdots + [K_0]u^\beta + \cdots + [K_\beta]v^\beta,$$

in Verbindung mit der Identität:

$$ux + vy + wz = 0$$

die Verhältnisse $u:v:w$ berechnet, so erhält man die Richtung der Tangenten in dem $\beta$-fachen Punkt, welchen die Curve $\varphi(P')$ in dem Punkte $P'$ selbst besitzt. Die Dimension der Coefficienten

$$[A_0]\,[B_0] \cdots [K_\beta]$$

wird alsdann gleich:

$$b + b' - 2\beta,$$

und hinsichtlich $z$ allein steigen die Coefficienten an:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $[A_0]$ | bis höchstens zum Grad | | | | $p + p'$, |
| $[B_0]\,[B_1]$ | „ | „ | „ | „ | $p + p' - 2$, |
| . . . . . | | | | | |
| $[K_0] \cdots [K_\beta]$ | „ | „ | „ | „ | $p + p' - 2\beta$. |

Die Gleichung $\Phi = 0$, in Verbindung mit der Identität:

$$ux + vy + wz = 0$$

stellt ein Gebilde dar, das Clebsch als „Hauptcoincidenz" des „Connexes" $\Phi = 0$ bezeichnet. Es liegt auf der Hand, dass eine und dieselbe Hauptcoincidenz zu sämmtlichen Connexen gehört, deren Gleichung von der Form ist:

$$\Phi + \lambda(ux + vy + wz) = 0$$

wo $\lambda$ eine beliebige homogene Function von $uvw$ und $xyz$ ist, je von einem Grad niedriger, wie $\Phi$. Eine dieser Formen erhält man auf

einem Weg, der vor dem oben betretenen, der auf $\Phi$ führte, sich durch die Einfachheit auszeichnet, mit der die an der Function $\varphi$ vorzunehmende Operation sich angeben lässt.

In der Abhandlung „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie (Göttinger Denkschriften Bd. 17) hat nämlich Clebsch den Nachweis geliefert, dass sich jede ganze Function $\varphi$ von zwei Reihen Veränderlichen $xyz$; $x'y'z'$ in eine nach Potenzen von:

$$u = yz' - zy',$$
$$v = zx' - xz',$$
$$w = xy' - yx',$$

aufsteigende Reihe entwickeln lässt, deren Coefficienten (selbst wieder Functionen von $xyz, x'y'z'$) durch gewisse Differentiations- und darauf folgende Polarenprocesse aus $\varphi$ abgeleitet werden können. Dieselben lassen sich, wie folgt, darstellen. Man operire an der Function $\varphi$ wiederholt mit dem Symbol:

$$\Omega = u\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z'} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y'}\right) + v\left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial x'} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z'}\right) + w\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x'}\right)$$

und wende auf die so erhaltenen Ausdrücke:

$$\Omega\varphi;\ \Omega(\Omega\varphi) = \Omega^2\varphi;\ \Omega^3\varphi;\ \cdots,$$

nachdem man in denselben $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ gesetzt, den bekannten Polarenprocess:

$$\Delta = x\frac{\partial}{\partial x'} + y\frac{\partial}{\partial y'} + z\frac{\partial}{\partial z'}$$

so oft mal an, als der Grad des betreffenden Ausdrucks in $xyz$ vor Gleichsetzung der Variabeln betrug. Man bilde also, wenn $b$ die Dimension von $\varphi$ hinsichtlich $xyz$ ist, der Reihe nach die Ausdrücke:

$$\Delta^b[\varphi],\ \Delta^{b-1}[\Omega\varphi],\ \Delta^{b-2}[\Omega^2\varphi], \cdots$$

wo das Einschliessen in eckige Klammern die frühere festgestellte Bedeutung hat (§ 2). Diese Ausdrücke sind dann, bis auf Zahlenfactoren, die einzelnen Glieder jener Reihenentwicklung von $\varphi$. In dem Fall, dass $\varphi$ die Werthigkeit $\beta$ besitzt (s. § 2), verschwinden offenbar die $b$ ersten Glieder, und man hat:

$$\varphi = \alpha_0\Delta^{b-\beta}[\Omega^\beta\varphi] + \alpha_1\Delta^{b-\beta-1}[\Omega^{\beta+1}\varphi] + \cdots$$

wo die $\alpha$ (gebrochene) hier nicht näher zu bestimmende Zahlen sind.

Wenn die Grössen $u$, $v$, $w$ sich der Null nähern, indem man $x = x', \ldots$ setzt, so fallen die späteren Glieder gegen das erste weg, die Polarenformen gehen, abgesehen von Zahlenfactoren, in die Formen selbst zurück, und man erhält, wenn man die für $x = x', \ldots$ $\beta$-fach

verschwindende Function $\varphi$ mit $[\varphi]$ bezeichnet, für dieselbe die folgende Darstellung durch die (unendlich klein zu denkenden) Grössen $u, v, w$:

$$[\varphi] = [\Omega^\beta \varphi],$$

in Gestalt eines Connexes, der sich in der linearen Mannigfaltigkeit:

$$\Phi + \lambda(ux + vy + wz) = 0$$

befinden muss. Man überzeugt sich jedoch leicht davon, dass man durch den hier geschilderten Process im Allgemeinen nicht einen Connex mit den hinsichtlich des Grades in den *einzelnen* Veränderlichen gewünschten Eigenschaften erhält, wie ihn das frühere angegebene Verfahren lieferte. Obwohl das Letztere umständlicher ist, können wir doch von der dadurch erreichten Normirung der Correspondenz $\varphi = 0$ nicht absehen wegen des Einblicks, den sie in gewisse Eigenschaften der im Folgenden aus $\varphi$ abzuleitenden Bildungen gewährt.

## II. Zwei Correspondenzgleichungen.

### 6.

Wenn zwei Correspondenzgleichungen gegeben sind, welche zwischen den Punkten einer Ebene bestehn:

$$(1) \qquad \varphi(xyz, x'y'z') = 0, \quad \psi(xyz, x'y'z') = 0,$$

wo wieder $xyz$ homogene Coordinaten sind, ebenso $x'y'z'$, so erheben sich verschiedene Fragen, je nachdem dieselben durch $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ nicht identisch erfüllt werden, oder eine von Null verschiedene „Werthigkeit" besitzen. In jedem Falle gehören vermöge $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zu jedem Punkte $P'$ der Ebene zwei Curven $\varphi(P')$, $\psi(P')$, deren Schnittpunkte dem $P'$ entsprechen.

Ist die Werthigkeit der einen oder von beiden gleich Null, so fallen die zu $P'$ gehörenden Punkte $P$ im Allgemeinen nicht mit $P'$ zusammen. Man kann dann diejenigen Punkte $P'$ zu finden verlangen, für welche einer der Punkte $P$ mit $P'$ vereinigt liegt (Coincidenzstellen). Dieselben ergeben sich, wenn beide Correspondenzen die Werthigkeit Null haben, als die Durchschnittspunkte der Curven:

$$(2) \qquad \varphi(xyz, xyz) = 0; \quad \psi(xyz, xyz) = 0.$$

Wird aber eine der beiden Gleichungen (1), etwa $\varphi = 0$, durch $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ identisch erfüllt, so erhält man die gesuchten Punkte $P$, die jedenfalls auf der Curve:

$$\psi(xyz, xyz) = 0$$

liegen, indem man die Bedingung dafür aufstellt, dass in dem Punkte $P'$ dieser Curve einer der Zweige von $\varphi(P')$ die Curve $\psi$ berührt. — Wir werden die angedeuteten algebraischen Operationen in einem späteren Abschnitt (§ 8 u. ff.) ausführen.

Sind endlich sowohl $\varphi$ wie $\psi$ Correspondenzen mit von Null verschiedener Werthigkeit, so bilden die Stellen der Ebene, für welche $P'$ mit $P$ zusammenfällt, eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, nämlich den Ort der Punkte, für welche eine Tangentenrichtung des ein- oder vielfachen Punktes $P'$ der Curve $\varphi(P')$ mit einer solchen der Curve $\psi(P')$ zusammenfällt. Man erhält die Gleichung dieses Ortes, indem man aus den zu den Correspondenzen $\varphi$ und $\psi$ gehörigen Connexgleichungen (§ 5):

$$\Phi(uvw, xyz) = 0, \quad \Psi(uvw, xyz) = 0$$

und der Identität:

$$ux + vy + wz = 0$$

die Grössen $u\,v\,w$ eliminirt.

Wir wollen die Ordnung der so entstehenden Curve und ihr Verhalten in solchen festen „Ausnahmepunkten" der Ebene, welche mehrfache Punkte *aller* Curven $\varphi(P')$, $\psi(P')$ (also unabhängig von der Lage von $P'$) sind, und auch solche für die Curven $\varphi(P)$, $\psi(P)$ (unabhängig von $P$) sein können, im nächsten Paragraphen bestimmen, indem wir die Elimination in solcher Anordnung ausführen, dass fremde Factoren im Endresultat vermieden werden.

## 7.

Anstatt jedoch an die Gleichungen des § 6 anzuknüpfen, in welchen die Punkte $P$ und $P'$ bereits zusammengefallen angenommen sind, ziehe ich vor, die Elimination von $u$, $v$, $w$ aus den mit Hilfe des Processes in § 4 normirten Correspondenzgleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ vorzunehmen, diese mit:

(1) $$ux + vy + wz = 0$$

(oder statt dessen mit:

$$ux' + vy' + wz' = 0)$$

zu combiniren, und erst nachträglich die Coordinaten $x\,y\,z$ und $x'\,y'\,z'$ einander gleich zu setzen. Die Elimination selbst ist nämlich nicht schwieriger, wie in dem andern Falle, und das Resultat derselben wird allgemeiner.

Wir gehn also aus von den Correspondenzgleichungen:

$$\varphi(\overbrace{x\,y\,z}^{b}, \overbrace{x'\,y'\,z'}^{b'})_\beta = 0,$$

$$\psi(\overbrace{x\,y\,z}^{c}, \overbrace{x'\,y'\,z'}^{c'})_\gamma = 0,$$

wo die Zahlen über den Strichen die Dimension in den betreffenden Veränderlichen, die Indices die Werthigkeit bezeichnen mögen. Ist ferner

die höchste Potenz von $z$, welche in $\varphi$ auftritt, die $p^{te}$, die von $z'$ die $p'^{te}$, und sind $q$ und $q'$ die analogen Zahlen für $\psi$, so bestehen nach den Ausführungen von § 4 a. E., *wenn $\varphi$ und $\psi$ hinsichtlich $xyz$ und $x'y'z'$ unzerfällbare Functionen sind*, die Ungleichungen:

$$\beta \leqq p \leqq b; \quad \beta \leqq p' \leqq b'.$$
$$\gamma \leqq q \leqq c; \quad \gamma \leqq q' \leqq c'.$$

Nach § 4 lassen sich $\varphi$ und $\psi$ in folgende normirte Form bringen:

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi = w^\beta A_0 + w^{\beta-1}(B_0 u + B_1 v) + \cdots + K_0 u^\beta + \cdots + K_\beta v^\beta, \\ \psi = w^\gamma \mathsf{A}_0 + w^{\gamma-1}(\mathsf{B}_0 u + \mathsf{B}_1 v) + \cdots + \mathsf{K}_0 u^\gamma + \cdots + \mathsf{K}_\gamma v^\gamma, \end{cases}$$

wo die Dimension der Coefficienten $A, B, \ldots, K$ bez. $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots, \mathsf{K}$ in $xyz$ gleich: $b - \beta$, bezw. $c - \gamma$, in $x'y'z'$ gleich: $b' - \beta$, bez. $c' - \gamma$ ist, und der Grad in $z$ von $A_0$ bez. $\mathsf{A}_0$ (höchstens) gleich: $p$ bez. $q$, in $z'$ gleich: $p'$ bez. $q'$; von $B_0 B_1$ bez. $\mathsf{B}_0\mathsf{B}_1$ in $z$ gleich: $p - 1$, bez, $q - 1$, in $z'$ gleich: $p' - 1$, bez. $q' - 1$, u. s. w. endlich von $K_0 K_1 \ldots K_\beta$ bez. $\mathsf{K}_0\mathsf{K}_1 \ldots \mathsf{K}$ der Grad in $z$ und $z'$ gleich: $p - \beta$ bez. $q - \gamma$ und $p' - \beta$ bez. $q' - \gamma$ ist.

Setzt man, unter Aufgabe der Homogenität:

$$v = 1$$

und substituirt für $u$ aus (1) den Ausdruck:

$$u = \frac{-wz - y}{x}$$

in die Gleichungen (2), so erhält man, wenn man wieder nach Potenzen von $w$ ordnet und mit einer passenden Potenz von $x$ multiplicirt, Ausdrücke von der Form:

$$(3) \quad \begin{cases} x^\beta \varphi = w^\beta \mathsf{a} + w^{\beta-1} \mathsf{b} + \cdots + \mathsf{k}, \\ x^\gamma \psi = w^\gamma \alpha + w^{\gamma-1} \beta + \cdots + \kappa, \end{cases}$$

wo nun die Coefficienten $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \ldots, \mathsf{k}$; $\alpha, \beta, \ldots, \kappa$ in den Variabeln $xyz$ bis bez. zu der Ordnung: $b$, $c$ ansteigen, dagegen in $x'y'z'$ nur bis zu den Ordnungen bez.: $b' - \beta$ und $c' - \gamma$; ferner in $z$ allein bis zu den Ordnungen $p, p - 1, \ldots, p - \beta$; $q, q - 1, \ldots, q - \gamma$ in $z'$ bis zur: $p', p' - 1, \ldots, p' - \beta$; $q', q' - 1, \ldots, q' - \gamma$-ten Ordnung.

Die Resultante der Ausdrücke (3), welche hinsichtlich $xyz$ von der Ordnung $\gamma b + \beta c$ ist, lautet in Determinantenform:

$$R = \begin{vmatrix} \mathsf{a}\,\mathsf{b} \ldots \\ \mathsf{a} \ldots \\ \ldots\ldots \\ \alpha\beta \ldots \\ \alpha \ldots \\ \ldots\ldots \end{vmatrix},$$

[illegible] $z$ allein [illegible] $z$ [illegible]

$$\gamma\gamma - \beta q - \beta\gamma$$

[illegible] Determinante $R$ mit der $1, z, \ldots, z^{\beta-\gamma}$ Verticalreihe der Determinante $R$ mit den $1, z, \ldots, z^{\beta-\gamma}$; ferner die $1, z, \ldots, z^{\gamma}$, $\gamma - 1$, $\ldots$ $\beta - \gamma$ Horizontalreihen mit den $z^{q-\gamma}, \ldots, 1$, $z^{q-\gamma}, \ldots, 1$, so ersieht sich der Grad der Elemente [illegible] $z$ [illegible] $\gamma$ ersten Horizontalreihen [illegible] $z$ [illegible] auf $q - \gamma - 1$, während die $\beta$ ersten Reihen den Grad $q - \beta - 1$ in $z$ allein erhalten. Der Grad in $z$ der $w$ verändernden Determinante ist daher gleich:

$$\gamma\, p + \gamma - 1,\ q + \beta\, q + \beta - 1.$$

Diese Zahl ist, um die für $R$ selbst gültige zu erhalten, um die Summe der Exponenten der Potenzen von $z$, mit denen die Zeilen von $R$ multiplicirt wurden, zu verringern, d. h. um:

$$\frac{\beta + \gamma \cdot \beta + \gamma - 1}{2} + \frac{\gamma\,\gamma - 1}{2} + \frac{\beta\,\beta - 1}{2}.$$

Man erhält so die oben angegebene Zahl. Aehnlich findet man, dass $R$ in $z'$ allein höchstens bis zum Grad:

$$\gamma p' + \beta q' - \beta\gamma$$

ansteigt, während $R$ hinsichtlich der Variabeln $x'y's'$ wie man ohne Weiteres erkennt, von der Ordnung:

$$\gamma(b' - \beta) + \beta(c' - \gamma) = \gamma b' + \beta c' - 2\beta\gamma$$

ist.

Vergleicht man die Dimension in $xyz$ von $R$ mit derjenigen, die eine directe Abzählung für *die von überflüssigen Factoren freie Resultante* $\varrho$ *aus den Gleichungen* (1) *und* (2) ergiebt, nämlich: $\gamma(b - c) + \beta(c - \gamma) + \beta\gamma$, so findet man, dass sich diese Zahlen um die Grösse $\beta\gamma$ unterscheiden, was, wie man leicht einsieht, nur auf Rechnung einer Potenz von $x$ kommen kann, mit der $R$ multiplicirt ist. Man hat demnach:

$$R = x^{\beta\gamma} \cdot \varrho(xyz,\ x'y's'),$$

wo nun die Correspondenzgleichung $\varrho = 0$ im Allgemeinen durch $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ nicht erfüllt wird, und hinsichtlich der Variabelnpaare $xyz, x'y's'$ bis zu den Graden $\gamma b + \beta c - \beta\gamma$, $\gamma b' + \beta c' - 2\beta\gamma$ ansteigt. Wenn der Maximalgrad in $z$ von $\varphi$ $p < b$ ist, so lässt sich dies geometrisch so auffassen, dass die Correspondenzcurven $\varphi(P')$ in dem Ursprung $x = y = 0$ des Coordinatensystems einen:

$$b - p = \mathfrak{b}$$

-fachen Punkt besitzen; ebenso haben die Curven $\varphi(P)$, $\psi(P')$, $\psi(P)$ daselbst bez. einen:

$$b' - p' = \mathfrak{b}'; \quad c - q = \mathfrak{c}; \quad c' - q' = \mathfrak{c}'$$

-fachen Punkt.

Nach dem oben Gesagten besitzt an dieser Stelle die Correspondenzcurve $\varrho(P')$, die von der: $(\gamma b + \beta c - \beta\gamma)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, einen mindestens:

$$(\gamma b + \beta c - \beta\gamma) - (\gamma p + \beta q - \beta\gamma) = \gamma\mathfrak{b} + \beta\mathfrak{c}$$

-fachen Punkt, die Curve $\varrho(P)$, deren Ordnung gleich $\gamma b' + \beta c' - 2\beta\gamma$ ist, einen mindestens:

$$(\gamma b' + \beta c' - 2\beta\gamma) - (\gamma p' + \beta q' - \beta\gamma) = \gamma\mathfrak{b}' + \beta\mathfrak{c}' - \beta\gamma$$

-fachen Punkt*).

Bemerkt man noch, dass man durch (theilweise oder ausschliessliche) Benutzung der Identität:

$$ux' + vy' + wz' = 0$$

an Stelle von:

$$ux + vy + wz = 0$$

neben den beiden Correspondenzgleichungen (2) zu Correspondenzen**) von anderer Gestalt wie $\varrho$, und zwar ebenfalls von der Werthigkeit Null gelangt wäre, deren Coincidenzcurve (§ 1) jedoch von der von $\varrho$ nicht verschieden sein kann, so lassen sich unsere Ergebnisse in geometrischer Fassung wie folgt aussprechen:

*Hat man durch zwei Correspondenzgleichungen, deren Werthigkeit von Null verschieden ist, eine Beziehung zwischen den Punkten einer Ebene hergestellt derart, dass jedem Punkte $P'$ — abgesehen von den in $P'$ selbst und in gewisse feste Ausnahmepunkte der Ebene entfallenden Punkten — eine Anzahl von Punkten $P$ entsprechen, die mit $P'$ beweglich sind, so lassen sich immer Correspondenzen von der Werthigkeit Null finden, welche die gleiche Beziehung ausdrücken, und deren gemeinsame Coincidenzcurve der geometrische Ort derjenigen Punkte $P'$ ist, in welchen ein Zweig der Correspondenzcurve $\varphi(P')$ einen solchen der $\psi(P')$ berührt.*

Der letzte Zusatz ergiebt sich unmittelbar aus der Bemerkung, dass es gleichgültig ist, ob man erst aus (1), (2) eliminirt und dann die Variabeln gleichsetzt oder ob man diese Reihenfolge umkehrt. Die erwähnte Coincidenzcurve $\varrho(xyz, xyz) = 0$ hat unter der früheren

*) In den Fällen, wo diese Zahl negativ wird, ist für dieselbe Null zu setzen.

**) Die Correspondenzcurven derselben schneiden sich übrigens, ausser in denjenigen Punkten, welche auch $\varphi(P')$ und $\psi(P')$ gemeinsam sind, noch in gewissen Ausnahmepunkten, für welche nämlich die vermöge $\varphi = 0$, $\psi = 0$ den $u, v, w$ proportionalen Functionen von $xyz$, $x'y'z'$ sämmtlich verschwinden.

Voraussetzung, dass die Gradzahlen der gegebenen Correspondenzen $\varphi$, $\psi$ hinsichtlich $xyz$, $x'y'z'$ bez. $b$, $c$ und $b'$, $c'$ sind, und die Werthigkeiten $\beta, \gamma$ haben, den Grad:

$$\gamma(b + b') + \beta(c + c') - 3\beta\gamma,$$

und geht durch jeden Ausnahmepunkt der Ebene, in welchem die Correspondenzcurven

$$\varphi(P'),\ \psi(P'),\ \varphi(P),\ \psi(P) \quad \text{bez.} \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$$

-fache Punkte besitzen, mindestens:

$$\gamma(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') + \beta(\mathfrak{c} + \mathfrak{c}') - \beta\gamma$$

-fach hindurch.

## III. Correspondenz zwischen zwei Punkten einer Curve. Das Correspondenzprincip.

### 8.

In § 6 ist die Frage unerörtert geblieben nach den Coincidenzstellen von zwei Correspondenzen, von denen eine, $\psi$, die Werthigkeit Null, die andere, $\varphi$, eine von Null verschiedene Werthigkeit besitzt. Man hat, um dieselbe zu beantworten, wie bereits erwähnt, die oben (§ 5 (1)) aufgestellte Connexform:

$$\Phi(uvw,\ xyz) = 0$$

der Correspondenz $\varphi$, welche durch Zusammenrücken der Punkte $P$ und $P'$ aus $\varphi$ entsteht, zu combiniren mit der Bedingung dafür, dass $u:v:w$ die Tangentenrichtung an die Coincidenzcurve der nullwerthigen Correspondenz $\psi$ angiebt, also mit:

$$u : v : w = f'(x) : f'(y) : f'(z),$$

wenn:

$$\psi(xyz\ xyz) = f(xyz)$$

gesetzt wird.

Auf genau dasselbe algebraische Problem führt aber eine verwandte Frage von allgemeinerem Interesse, nämlich die *nach den Coincidenzstellen einer Correspondenz auf einer gegebenen Curve* (in functionentheoretischer Ausdrucksweise: auf einer Riemann'schen Fläche). Wir ziehen vor, an diese Fragestellung anzuknüpfen.

Zwischen zwei Punkten $P$ und $P'$ einer ebenen algebraischen Curve $f$ — deren Gleichung also von den beiden Coordinatenpaaren befriedigt wird:

$$f(xyz) = 0; \quad f(x'y'z') = 0$$

— bestehe eine Correspondenz von der oben betrachteten Art:

$$\varphi(xyz,\ x'y'z')_\beta = 0.$$

Die Correspondenzcurve $\varphi(P')$, welche vermöge dieser Gleichung einem beliebigen Punkte $P'$ von $f$ entspricht, trifft $f$ in Punkten $P$, welche in drei Gruppen zerfallen:

1) Solche, welche mit $P'$ selbst zusammenfallen. Wenn die Werthigkeit $\beta$ der Correspondenz von Null verschieden ist, giebt es mindestens $\beta$ solcher Punkte.

2) Solche, welche in „Ausnahmepunkte" der Ebene fallen, die auf $f$ liegen, d. h. in Punkte, durch welche $\varphi(P')$ (unabhängig von der Lage von $P'$) ein- oder mehrfach hindurchgeht, und die zugleich ein- oder mehrfache Punkte von $f$ sind.

3) Solche, deren Lage sich mit derjenigen von $P'$ ändert, ohne dass sie in $P'$ selbst fallen.

Es entsteht nun die Aufgabe, die Coincidenzstellen auf der Curve $f$ zu finden, d. h. diejenigen Stellen, in welchen einer der Punkte $P$ aus der Gruppe 3) in den Punkt $P'$ hereinrückt, dem er entspricht.

Wir machen zunächst die Annahme, dass, für eine unbestimmte Lage von $P'$ auf $f$, keine der Tangenten des $\beta$-fachen Punktes, welchen die Curve $\varphi(P')$ in $P'$ hat, mit der Tangente von $f$ an dieser Stelle übereinstimmt — ein Fall, auf den wir später alle anderen zurückführen werden. In algebraischer Form heisst dies, dass die oben (§ 5) angegebene Coincidenzgleichung (1):

$$\Phi(uvw, xyz) = 0,$$

welche zu der Correspondenz $\varphi$ gehört, weder identisch erfüllt wird, noch den Factor erhält:

$$ux + vy + wz = 0,$$

wenn man in derselben:

$$u : v : w = f'(x) : f'(y) : f'(z),$$

d. h. den partiellen Ableitungen von $f(xyz)$ nach $xyz$ proportional setzt. Bezeichnet man dieselben abgekürzt durch $f_1 f_2 f_3$, so drückt alsdann die Gleichung:

$$\Phi(f_1 f_2 f_3, xyz) = F(xyz) = 0,$$

oder in ausgeführter Form (vgl. § 5, (1)):

$$(1) \qquad F(xyz) = 0 = f_3^{\beta}[A_0] + f_3^{\beta-1}([B_0]f_1 + [B_1]f_2) + \cdots + [K_0]f_1^{\beta} + \cdots + [K_\beta]f_2^{\beta}$$

die Bedingung dafür aus, dass ein Zweig der Curve $\varphi(P')$ die Curve $f$ in $P'$ berührt, d. h. dass einer der Punkte der Gruppe 3) in $P'$ hereingerückt ist. Die Function $F(xyz)$ verschwindet also für die Coordinaten der Coincidenzstellen, und kann, gleich Null gesetzt, als *Gleichung der Coincidenzcurve von $\varphi$ hinsichtlich $f$* bezeichnet werden, wobei zu bemerken ist, dass sie sich von der in § 2 als Coincidenzcurve einer Correspondenz, deren Werthigkeit $\beta$ gleich Null ist, ein-

geführten Curve (die für $\beta > 0$ illusorisch wird) wesentlich dadurch unterscheidet, dass sie die Adjunction der Gleichung $f = 0$ voraussetzt.

Ausser für die Coincidenzstellen verschwindet jedoch die Function $F$ noch:

1. Für die singulären Punkte von $f$, für welche zugleich $f_1$, $f_2$ und $f_3$ verschwinden, sie mögen „Ausnahmepunkte" der Correspondenz sein, oder nicht.

2. Für diejenigen *einfachen* Punkte von $f$, welche *„Ausnahmepunkte" der Correspondenz* $\varphi$ sind, d. h. solche Punkte von $f$, durch welche alle Correspondenzcurven $\varphi(P')$ oder $\varphi(P)$ hindurchgehen.

Wünscht man die Anzahl der nicht in diese Punkte 1., oder 2., entfallenden Coincidenzstellen (man kann sie als *„eigentliche"* Coincidenzpunkte bezeichnen) zu bestimmen, so muss man die oben aufgeführten einzeln berechnen und von der Gesammtzahl der Schnittpunkte von $F = 0$ mit $f = 0$ abziehen. Dies soll in den folgenden beiden Paragraphen geschehen.

## 9.

Die Gesammtzahl der Schnittpunkte von $F = 0$ und $f = 0$ (etwa in's Unendliche fallende mit eingerechnet) ist gleich dem Product ihrer Dimensionen. Ist $m$ diejenige von $f(xyz)$, $b$ die von $\varphi(xyz, x'y'z')$ hinsichtlich $xyz$, $b'$ hinsichtlich $x'y'z'$, so ist die Dimension der Coefficienten $[A_0]$, $[B_0]$, $[B_1]$ ... $[K_\beta]$ der Form $\Phi$ hinsichtlich $xyz$ nach § 5 gleich $b + b' - 2\beta$, und hiernach diejenige der Function:

$$F(xyz) = \Phi(f_1 f_2 f_3, xyz)$$

gleich*):

$$b + b' - 2\beta + \beta(m-1) = b + b' + \beta(m-3),$$

mithin ist die Gesammtzahl der Schnittpunkte der Curve $F = 0$ mit $f = 0$ gleich:

$$m(b + b' + \beta(m-3)).$$

Wir kommen zur Bestimmung *der in die singulären Punkte von* $f$, welche nicht Ausnahmepunkte von $\varphi$ sind, entfallenden Schnittpunkte. Jede homogene Function $\beta^{\text{ter}}$ Ordnung der partiellen Ableitungen $f_1 f_2 f_3$ von $f$ nach $xyz$ verschwindet (mindestens) in der Ordnung $\beta \cdot \mu$ an einer Stelle, an welcher die Curve:

$$\xi f_1 + \eta f_2 + \zeta f_3 = 0 \tag{1}$$

(wo $\xi\eta\zeta$ willkürliche Grössen sind) mit der Curve $f$ $\mu$ Schnittpunkte besitzt, die von den $\xi\eta\zeta$ unabhängig sind. Solche Schnittpunkte sind nur vorhanden an denjenigen Stellen, für welche einzeln:

*) Auf indirectem Wege findet man diese Zahl im VII. Bd. d. Ann. S. 616 bestimmt.

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

ist, d. h. wie schon erwähnt, in singulären Punkten von $f$. Je nach der Natur des singulären Punktes ist die Zahl $\mu$ eine verschiedene. Ist derselbe ein $\alpha$-facher Punkt mit getrennten (sich nicht berührenden) Zweigen, so ist bekanntlich $\mu = \alpha(\alpha - 1)$. Aber auch für einen $\alpha$-fachen Punkt, dessen Zweige sich berühren oder durch hereinfallende Verzweigungspunkte beliebig zusammenhängen, lässt sich die Zahl $\mu$ ermitteln, wenn man sich derjenigen Hilfsmittel bedient, die Herr Nöther in seiner Abhandlung „Rationale Ausführung der Operationen etc." im 23. Bande dieser Annalen entwickelt hat. Die Curve (1) ist, geometrisch zu reden, die erste Polare des Punktes $\xi\eta\zeta$ in Bezug auf $f$, für welche die Anzahl $\mu$ ihrer Schnittpunkte mit $f$ in einem $\alpha$-fachen Funkte von $f$ sich aus der a. a. O. S. 332 angegebenen Formel (18) bestimmt. Man kann derselben die Gestalt geben:

$$\mu = \alpha(\alpha - 1) + 2\sigma + N,$$

wo $\sigma$ eine von gegenseitiger Berührung der Zweige des $\alpha$-fachen Punktes herrührende ganze Zahl ist, $N$ die Anzahl der „Verzweigungspunkte" angiebt, die in den $\alpha$-fachen Punkt fallen. Indem ich wegen dieser Zahlen auf jenen Aufsatz verweise, füge ich nur noch bei, dass nach Formel (23) a. a. O. (S. 332) sich das „Geschlecht" $p$ der Curve $f$ durch dieselben wie folgt ausdrückt:

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\sum \alpha(\alpha-1) - \sum \sigma,$$

wo das Summenzeichen $\sum$ sich auf alle singulären Punkte von $f$ erstreckt.

„Im Allgemeinen" also, d. h. wenn nicht besondere Beziehungen der Coefficienten von $\varphi$ zu denen von $f$ (wie wir sie erst später annehmen werden) bestehen, entfallen in einen $\alpha$-fachen Punkt der betrachteten Art von $f$, welcher nicht Ausnahmepunkt (vgl. § 8) von $\varphi$ ist:

$$\mu\beta = \beta(\alpha(\alpha-1) + 2\sigma) + \beta N$$

Schnittpunkte von $f$ mit der homogenen Function $\beta^{\text{ter}}$ Ordnung $F = 0$ der $f_1 f_2 f_3$. Die Anzahl $C$ der eigentlichen Coincidenzen drückt sich somit, wenn die Correspondenz $\varphi$ überhaupt keine Ausnahmepunkte hat, durch die Differenz aus:

$$C = m(b + b' + \beta(m-3)) - \beta \cdot \sum(\alpha(\alpha-1) + 2\sigma) - \beta \cdot \sum N,$$

wo sich die Summe $\sum$ über alle singulären Punkte von $f$ erstreckt. Man kann mit Benutzung des oben angegebenen Ausdrucks für das Geschlecht $p$ dieser Formel die Gestalt geben:

$$C = m(b + b' + \beta(m-3)) - \beta \cdot \Big((m-1)(m-2) - 2p + \sum N\Big)$$
$$= (mb - \beta) + (mb' - \beta) + 2\beta p - \beta \cdot \sum N,$$

wo $\sum N$ beispielsweise dann verschwindet, wenn die singulären Punkte von $f$ nur getrennte Zweige haben.

## 10.

Sind auf der Curve $f$ Ausnahmepunkte (§ 8) der Correspondenz $\varphi$ vorhanden, so sind auch die in diese fallenden Schnittpunkte in der Formel für $C$ in Abzug zu bringen, beziehungsweise die für die singulären Punkte von $f$, welche Ausnahmepunkte sind, angegebenen Zahlen zu modificiren.

Die Bestimmung dieser Abänderung erfordert ein näheres Eingehen auf die normirte Function $\varphi$. Es möge ein $\alpha$-facher Punkt von $f$ $\mathfrak{b}$-facher Punkt der Correspondenzcurven $\varphi(P')$ und $\mathfrak{b}'$-facher Punkt der $\varphi(P)$ sein. Derselbe befinde sich — was durch lineare Transformation immer erreicht werden kann — im Ursprunge $x=y=0$ des Coordinatensystems.

Dann steigt die Function:

$$\varphi(xyz,\ x'y'z')$$

hinsichtlich der Variabeln $z$ und $z'$ nur bis zu den Graden an:

$$b - \mathfrak{b} = p; \quad b' - \mathfrak{b}' = p'.$$

Die Coefficienten $[A_0]$, $[B_0]$ ... des Ausdrucks $F(xyz)$ erheben sich (§ 5) hinsichtlich der Variabeln $z$ höchstens:

$$\begin{aligned} [A_0] &\text{ bis zum Grad } p + p', \\ [B_0], [B_1] &\ \ ,, \ \ ,, \ \ ,, \ \ p + p' - 2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [K_0] \ldots [K_\beta] &\ \ ,, \ \ ,, \ \ ,, \ \ p + p' - 2\beta, \end{aligned}$$

während:

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

in $z$ bis zum Grad $m - \alpha = a$, dagegen:

$$f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$$

nur bis zum Grad $a - 1$ wirklich ansteigt. Setzt man nun:

$$\begin{gathered} [A_0] = A, \\ [B_0] f_1 + [B_1] f_2 = B, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [K_0] f_1^\beta + \cdots + [K_\beta] f_2^\beta = K, \end{gathered}$$

so sind in der Gleichung der Coincidenzcurve:

$$F(xyz) = f_3^{\beta} A + f_3^{\beta-1} \cdot B + \cdots + K = 0$$

die Coefficienten $A, B, \ldots, K$ hinsichtlich $z$ vom Grad

$$p + p', \; p + p' - 2 + a, \; \cdots, \; p + p' - 2\beta + \beta a.$$

Da es sich um die Schnittpunkte dieser Curve mit $f = 0$ handelt, so ist es erlaubt, die Gleichung derselben mit Hülfe von $f$ umzugestalten, sofern der Grad dadurch nicht erhöht wird; man kann auf diese Weise den Grad eines jeden Gliedes, wie: $A \cdot f_3^{\beta}$, $Bf_3^{\beta-1}, \ldots$, $Ef_3^{\beta-i}, \ldots$ hinsichtlich der Veränderlichen $z$ auf den von $K$, also auf $p + p' - 2\beta + \beta a$ herabdrücken. Betrachtet man nämlich das $(i+1)^{\text{te}}$ Glied $E \cdot f_3^{\beta-i}$, so ist $z$ in $E$ höchstens bis zum Grad $p + p' - 2i + ia$ vorhanden. Andererseits darf man voraussetzen, dass $z$ in $E$ wirklich vorkommt, wenn dieses Glied nicht bereits unter den Grad von $K$ in $z$ hinabgeht. Sei also:

$$E = e_0 z + e_1,$$

wo der Grad von $e_0$ und $e_1$ in $z$ niedriger ist, als der von $E$. Hat ferner die Function $f$, nach absteigenden Potenzen von $z$ geordnet, die Gestalt:

$$f = z^a P + z^{a-1} Q + \cdots,$$

so ist:

$$f_3 = a z^{a-1} P + (a-1) z^{a-2} Q + \cdots.$$

Daher ist der Ausdruck:

$$f_3^{\beta-i-1}(f_3 E - f a e_0) = f_3^{\beta-i-1} E'$$

hinsichtlich $z$ von niedrigerem Grad, als $f_3^{\beta-i} E$. Zieht man also von $F(xyz)$ das Product ab:

$$f f_3^{\beta-i-1} \cdot a e_0,$$

das von derselben Dimension in $x, y, z$ ist, wie $F$, so wird dadurch der Grad in $z$ des $(i+1)^{\text{ten}}$ Gliedes mindestens um 1 erniedrigt. Man kann dasselbe Verfahren nun wieder auf $f_3^{\beta-i-1} \cdot E'$ anwenden und erniedrigt so, durch (höchstens) $(\beta - i)$-malige Wiederholung des Verfahrens den Grad des betrachteten Gliedes um $(\beta - i)$ Einheiten, also auf mindestens:

$$p + p' - 2i + ia + (\beta - i)(a - 1) - (\beta - i) = p + p' + \beta(a-2),$$

d. h. auf den Grad von $K$.

Verfährt man ebenso mit den übrigen Gliedern, mit Ausnahme des letzten, so erniedrigt sich überhaupt der Grad von $F$ hinsichtlich $z$ auf den des letzten. Die so umgestaltete Function:

$$F + \lambda f = 0,$$

ist noch immer als homogener Ausdruck $\beta^{\text{ter}}$ Dimension in den $f_i (i = 1, 2, 3)$ darstellbar. Denn die oben durch die erste Umformung erhaltene Function $E'$:

$$E' = f_3 E - f a e_0$$

lässt sich mit Hülfe der Identität:

$$m \cdot f = f_1 x + f_2 y + f_3 z$$

als homogene lineare Function der $f_i$ darstellen, und das $(i+1)^{te}$ Glied wird sowenig, wie bei dieser Umformung, bei den späteren die Eigenschaft einbüssen, homogen und linear von der $\beta^{ten}$ Dimension hinsichtlich der $f_i$ zu sein.

Diese Function:

$$F + \lambda f = \Phi(f_1 f_2 f_3 x y z)$$

hat nun, da sie in $z$ bis zum Grad:

$$p + p' + \beta(a - 2) = p + p' + \beta(m - \alpha - 2)$$

ansteigt, im Ursprung des Coordinatensystems mindestens einen:

$$b + b' + \beta(m - 3) - \{p + p' + \beta(m - \alpha - 2)\}$$
$$= b + b' + \beta(\alpha - 1)$$

-fachen Punkt, und also mit $f = 0$ an dieser Stelle mindestens:

$$\alpha(b + b' + \beta(\alpha - 1))$$

Schnittpunkte gemein. Diese Zahl wird nicht überschritten, solange die erste Polare:

$$\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3 = 0$$

mit $f$ nur $\alpha(\alpha - 1)$ Schnittpunkte in dem Ursprung des Coordinatensystems besitzt. Wenn diese Zahl aber durch gegenseitige Berührung der Zweige von $f$ und hereinfallende Verzweigungsstellen, wie dies im vorigen Paragraphen ausgeführt ist, um:

$$2\sigma + N$$

grösser wird, so vermehrt sich die Anzahl der Schnittpunkte des obigen *homogenen Ausdrucks* $\beta^{ter}$ *Ordnung* $\Phi$ *von* $f_1 f_2 f_3$ um:

$$\beta(2\sigma + N),$$

sodass die Gesammtzahl der in einen $\alpha$-fachen singulären Punkt von $f$ fallenden Schnittpunkte von $\Phi = 0$ mit $f = 0$ gleich:

$$\alpha(b + b' + \beta(\alpha - 1)) + \beta(2\sigma + N)$$

ist, also um $\alpha(b + b')$ grösser, als die Zahl der in den $\alpha$-fachen Punkt von $f$ fallenden Schnittpunkte beträgt, wenn derselbe kein Ausnahmepunkt von $\varphi$ ist.

Schliesst man ein noch höheres Verschwinden aus, indem man annimmt, dass die Curven $\varphi(P')$, $\varphi(P)$ die Zweige von $f$ in dem $\alpha$-fachen Punkt nicht berühren (eine Beschränkung, auf die ich unten noch zurückkommen werde) so kann man sagen, dass *die Anzahl* $C$ *der eigentlichen Coincidenzen sich ausdrückt* durch die Differenz:

$$\begin{aligned} C &= m(b + b' + \beta(m-3)) - \sum (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')\,\alpha \\ &\quad - \beta \sum (\alpha(\alpha-1) + 2\sigma) - \beta \sum N \\ &= \left(mb - \sum \mathfrak{b}\alpha - \beta\right) + \left(mb' - \sum \mathfrak{b}'\alpha - \beta\right) \\ &\quad + 2\beta p - \beta \cdot \sum N \\ &= \varkappa + \varkappa' + 2\beta p - \beta \sum N. \end{aligned}$$

In dieser „*Correspondenzformel*“ bezeichnet:

$$\varkappa = mb - \sum \mathfrak{b}\alpha - \beta; \quad \varkappa' = mb' - \sum \mathfrak{b}'\alpha - \beta$$

die Anzahl der mit $P'$ (bez. $P$) beweglichen und nicht nach $P'$ (bez. $P$) zurückfallenden Schnittpunkte der Correspondenzcurven $\varphi(P')$ bez. $\varphi(P)$ mit $f$, während die Summenzeichen $\sum$ sich auf alle Ausnahmepunkte der Correspondenz $\varphi$ beziehen, mögen dieselben singuläre ($\alpha$-fache) Punkte von $f$ sein, oder einfache ($\alpha = 1$), sowie in solche singulären Punkte, die nicht Ausnahmepunkte von $\varphi$ sind. Im ersteren Fall geben die Zahlen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ die Vielfachheit der Correspondenzcurven in einem $\alpha$-fachen Punkt von $f$ an, im letzteren sind diese beiden Zahlen Null. — Die Summe $\sum N$ erstreckt sich auf solche Singularitäten, welchen (s. oben) „Verzweigungsfactoren“ der Discriminante entsprechen, und ist gleich Null für solche, welche nur aus einfachen (nicht „superlinearen“) Zweigen, die sich jedoch beliebig berühren können, bestehen.

Die Gesammtzahl der in die Ausnahmepunkte und die übrigen singulären Punkte von $f$ entfallenden Schnittpunkte der Coincidenzcurve mit $f$ zerfällt in zwei Theile, deren einer allein den betreffenden Punkten, sofern sie *singuläre Punkte von f sind*, entspricht, während der andere:

$$\sum (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')\,\alpha$$

nur verschwindet, wenn diese Punkte aufhören, *Ausnahmepunkte* von $\varphi$ zu sein. Dieser letzte Theil ist nun aber genau gleich der Anzahl der mit $x'y'$, bez. $xy$ nicht beweglichen Schnittpunkte der Curven $\varphi(P')$ und $\varphi(P)$ mit $f$, unabhängig von der gegenseitigen Lage dieser Punkte. Diese Zahl bleibt offenbar erhalten, wenn die Ausnahmepunkte theilweise zusammenrücken, d. h. *wenn die Correspondenzcurven in einfachen oder singulären Punkten von f diese Curve einfach oder beliebig vielfach berühren*. Die Correspondenzformel verliert also in diesem Fall ihre Gültigkeit nicht; die oben angegebene Bedeutung der Zahlen $\varkappa$ und $\varkappa'$ ist nicht einmal dem Wortlaut nach zu modificiren.

Ich schliesse hier noch eine Bemerkung an, auf die ich später zurückkommen werde. Wenn aus einer Correspondenzgleichung $\varphi = 0$ sich ein Factor absondern lässt, der eine Function von einem der beiden Variabelnpaare allein ist: $p(xyz)$, so dass etwa:

$$\varphi(xyz, x'y'z') = p(xyz) \cdot \varphi'(xyz, x'y'z')$$

ist, so ist die Zahl der Coincidenzpunkte von $\varphi = 0$ auf $f = 0$ gleich derjenigen von $\varphi' = 0$. Denn $p$ wird zwar Factor der Coincidenzcurve von $\varphi$ sein, aber die Schnittpunkte von $p = 0$ mit $f = 0$ sind sämmtlich Ausnahmepunkte und kommen demnach bei Aufstellung der „eigentlichen" Coincidenzpunkte von $\varphi$ nicht in Rechnung.

Es erübrigt nun noch die letzte Beschränkung aufzuheben, die im Vorstehenden bezüglich der Correspondenzcurven gemacht wurde, indem man nämlich voraussetzte, dass dieselben die Curve $f$ in dem (beweglichen) Punkte $P'$ (bez. $P$) nicht berühren. Es wird dies dazu führen, der Zahl $\beta$ eine von der angegebenen etwas abweichende Bedeutung beizulegen, um die oben aufgestellte Formel auf alle möglichen Fälle anwenden zu können.

## 11.

## Ueber Berührung von Curven.

In den beiden vorigen Paragraphen wurde angenommen, dass in dem Punkte $x = x'$, $y = y'$ die Curve $f$ von keinem der Zweige der Correspondenzcurven $\varphi(P')$, $\varphi(P)$ berührt wird. Lässt man diese Voraussetzung fallen, so kann es vorkommen, dass die Function $\varphi$ (die jetzt wieder in nicht homogener Form angenommen werden möge), wenn man $x = x'$, $y = y'$ setzt, nicht identisch verschwindet, wohl aber dann den Factor $f(x'y')$ erhält.

Entwickelt man in diesem Fall die Functionen:

$$\varphi(xy, x'y') = \varphi((x - x') + x', \ (y - y') + y'; \ x'y'),$$
$$f(xy) = f((x - x') + x', \ (y - y') + y')$$

nach steigenden Potenzen von $x - x'$ und $y - y'$, und bezeichnet man die Gesammtheit der Glieder $i^{\text{ter}}$ Dimension hinsichtlich $x - x'$, $y - y'$ durch den Index $i$, so erhalten $f$ und $\varphi$ die Form:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots,$$
$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots.$$

Nach Annahme wird dann:

$$\varphi_0 = \lambda_0 f_0,$$

wo $\lambda_0$ eine ganze Function von $x'y'$ ist (aber auch gleich Null sein kann) und:

$$f_0 = f(x'y').$$

Man bilde nun die Functionen:

$$\varphi - \lambda_0 f_0 = \varphi - \varphi_0 = \varphi_i + \varphi_{i+1} + \varphi_{i+2} + \cdots,$$
$$f - f_0 = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots,$$

wo $\varphi_i$ die erste nicht verschwindende Function in der Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sein möge, $f_1$ aber nicht verschwinden kann, weil $x'y'$ *ein einfacher Punkt von* $f$ ist. Ist $f_1$ nicht Factor von $\varphi_i$, so haben die Curven $f$ und $\varphi$ keine Berührung in $P'$, und die Multiplicität des Schnittpunktes $P'$ von $f$ und $\varphi(P')$ ist gleich $i$.

Ist aber $f_1$ Theiler von $\varphi_i$, ist also identisch:

$$\varphi_i = f_1 \varrho_{i-1},$$

wo nun $\varrho_{i-1}$ homogen in $x - x'$, $y - y'$ ist, mit übrigens Coefficienten, die ganze Functionen von $x'y'$ sein werden, so bilde man den Ausdruck:

$$\psi = (\varphi - \varphi_0) - \varrho_{i-1}(f - f_0) = (\varphi_{i+1} - \varrho_{i-1} f_2) + (\varphi_{i+2} - \varrho_{i-1} f_3) + \cdots$$
$$= \psi_{i+1} + \psi_{i+2} + \cdots.$$

Ist $f_1$ nicht Theiler von $\psi_{i+1}$, so berühren sich die Curven $f = 0$ und $\psi = 0$ in $P'$ nicht, und die Anzahl ihrer Schnittpunkte in $P'$ ist gleich $i + 1$. Ebenso gross ist die der Curven $\varphi$ (das heisst $\varphi(P')$) und $f$. Ist aber $f_1$ Factor auch von $\psi_{i+1}$, bestehen also gleichzeitig die beiden identischen Gleichungen:

$$\varphi_i = f_1 \varrho_{i-1},$$
$$\varphi_{i+1} = f_2 \varrho_{i-1} + f_1 \varrho_i,$$

wo $\varrho_i$ eine homogene Function $i^{\text{ter}}$ Dimension von $x - x'$, $y - y'$ ist, so setze man wieder:

$$\chi = \psi - \varrho_i(f - f_0) = (\varphi - \varphi_0) - (\varrho_{i-1} + \varrho_i)(f - f_0)$$
$$= (\varphi_{i+2} - \varrho_{i-1} f_3 - \varrho_i f_2) + \cdots = \chi_{i+2} + \chi_{i+3} + \cdots,$$

untersuche die Theilbarkeit von $\chi_{i+2}$ durch $f_1$ und fahre so fort. Da sich die Vielfachheit des Punktes, welchen die Curven $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ (sämmtlich als Functionen von $xy$ aufgefasst) in $P'$ besitzen, fortwährend erhöht, so muss zuletzt der Fall eintreten, dass dieselbe gleich der Multiplicität des Schnittpunktes von $f$ und $\varphi$ wird. Ist dies etwa nach $(\beta - i)$-maliger Wiederholung der Fall, so dass also in:

$$\Phi = (\varphi - \varphi_0) - \varrho(f - f_0) = \Phi_\beta + \Phi_{\beta+1} + \cdots$$

wo

$$\varrho = \varrho_{i-1} + \varrho_i + \varrho_{i+1} + \cdots + \varrho_{\beta-2}$$

ist, alle Glieder von der $i^{\text{ten}}$, $(i+1)^{\text{ten}}$, ... bis $(\beta - 1)^{\text{ten}}$ Dimension in $x - x'$, $y - y'$ identisch verschwinden, während erst $\Phi_\beta$ von Null verschieden ist, so hat die Curve $\Phi = 0$ in dem Punkte $P'$ einen $\beta$-fachen Punkt, dessen Zweige sämmtlich die Curve $f$ nicht berühren.

$\Phi$ besitzt demnach genau $\beta$ Schnittpunkte mit $f$ an dieser Stelle. Die Functionen $\varrho_{i-1}, \ldots, \varrho_{\beta-2}$ bestimmen sich dann aus den Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi_i &= \varrho_{i-1} f_1, \\ \varphi_{i+1} &= \varrho_{i-1} f_2 + \varrho_i f_1, \\ \varphi_{i+2} &= \varrho_{i-1} f_3 + \varrho_i f_2 + \varrho_{i+1} f_1, \\ \cdots & \cdots \\ \varphi_{\beta-1} &= \varrho_{i-1} f_{\beta-i} + \varrho_i f_{\beta-i-1} + \cdots + \varrho_{\beta-2} f_1, \end{cases}$$

welche sich durch Nullsetzen eben jener Glieder niederster Dimension von $\Phi$ ergeben.

*Wenn also zwei ebene Curven $\varphi = 0$ und $f = 0$ an einer Stelle, wo die letztere nur einen einfachen Zweig besitzt, bei beliebigem Verhalten der Curve $\varphi = 0$ eine gewisse Anzahl von Schnittpunkten gemeinsam haben, so lässt sich eine ganze Function $\varrho$ von $xy$ finden derart, dass die Curve:*

$$(\varphi - \varphi_0) - \varrho(f - f_0) = 0$$

*an derselben Stelle einen vielfachen Punkt besitzt, dessen Zweige $f$ nicht berühren, und dieselbe Anzahl von Schnittpunkten mit $f$ hat, wie $\varphi$**).

Die hier vorgetragene Methode lässt sich (Sitzb. d. math.-phys. Cl. d. bayr. Acad. d. Wiss. 1888) auf die Bestimmung der Multiplicität der Schnittpunkte zweier Curven von beliebigem Verhalten an einer gegebenen Stelle anwenden.

## 12.

## Das Correspondenzprincip für Berührungscorrespondenzen.

Zurückkehrend nun zu der Frage der Coincidenzen einer Correspondenz $\varphi(xy, x'y') = 0$ auf der Curve $f(xy) = 0$ in dem Falle, *dass eine Berührung der Zweige von $\varphi$ mit $f$ in $x = x'$, $y = y'$ stattfindet*, wollen wir zunächst den Begriff der „Werthigkeit" erweitern. Unter Werthigkeit einer Correspondenz $\varphi$ verstanden wir oben die Ordnung des Verschwindens der Function $\varphi$ für $x = x'$, $y = y'$. Unter *Werthigkeit der Correspondenz $\varphi$ hinsichtlich der Gleichung $f = 0$* möge in der Folge diejenige Zahl verstanden werden, welche die Multiplicität des Schnittpunktes $x = x'$, $y = y'$ der Curven $f$ und $\varphi(P')$ angiebt. Diese Zahl giebt zugleich genau die Multiplicität des Schnittpunktes $x' = x$, $y' = y$ der Curven $f$ und $\varphi(P)$ an. Denn da die-

---

*) Man beweist leicht, dass im Falle $i = 1$ die Gleichungen (1) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür enthalten, *dass $\varphi$ und $f$ sich in $\beta$ consecutiven Punkten treffen.* — *Berührt* die Curve $\varphi$ diejenige $f$ einfach, jedoch *mit $\gamma$ verschiedenen Zweigen*, so beginnt die Entwicklung von $\varphi$ mit den Gliedern:

$$\varphi = f_1^{\gamma} + f_1^{\gamma-1}\varphi_2 + f_1^{\gamma-2}\varphi_4 + \cdots + f_1\varphi_{2\gamma-2} + \varphi_{2\gamma} + \cdots \quad \text{u. s. w.}$$

selbe definirt ist durch die Vielfachheit (etwa $\beta$) des Punktes $x = x'$, $y = y'$ der Curve (§ 11):

$$\Phi = (\varphi - \varphi_0) - \varrho(f - f_0) = 0,$$

und da ferner das Verschwinden der $\beta - 1$ ersten partiellen Ableitungen von $\Phi$ nach $xy$, genommen für $x = x'$, $y = y'$, nach § 2 auch das der ersten $\beta - 1$ Ableitungen von $\Phi$ nach $x'y'$ (für $x' = x$, $y' = y$) nach sich zieht, so hat $\varphi - \varphi_0 = 0$ in diesem Punkt mit $f$ dieselbe Anzahl $\beta$ von Schnittpunkten, gleichviel, ob man $xy$ oder $x'y'$ als Veränderliche ansieht.

Diese Zahl $\beta$, die wir in der Folge, wenn ein Missverständniss ausgeschlossen ist, schlechtweg die *Werthigkeit der Correspondenz* $\varphi$ nennen werden (und deren hier gegebene Definition mit der früher von mir aufgestellten und auch von Anderen angenommenen übereinstimmt), ist nun in der Formel des § 10 an Stelle der als Werthigkeit von $\varphi$ bezeichneten Zahl einzusetzen, wenn es sich um die Coincidenzen auf $f$ *einer Correspondenz* $\varphi$ *handelt, die in* $x = x'$, $y = y'$ *mit* $f$ *irgend welche Berührungen eingeht* derart, dass $\beta$ die Multiplicität des Schnittpunktes ist.

Denn wenn die Gleichungen:

$$\varphi(xyx'y') = 0, \quad f(xy) = 0, \quad f(x'y') = 0$$

gleichzeitig bestehen, so kann man an Stelle von $\varphi$ auch die Function setzen:

$$\Phi = (\varphi - \lambda_0 f_0) - (f - f_0)\varrho = (\varphi - \varphi_0) - (f - f_0)\varrho,$$

wo:

$$f_0 = f(x'y')$$

ist, und die Bedeutung von $\varrho$, $\lambda_0$ oben erklärt ist. Um das Abzählungsverfahren des § 10 auch auf diesen Fall übertragen zu können, muss man mit Hülfe der Variabeln $z$ und $z'$, wie früher, homogen machen, wodurch der Ausdruck $\Phi$ die Form annimmt:

$$\varphi z^q z'^{q'} + f\sigma + f_0\tau = \Phi(xyz, x'y'z') = 0.$$

Diese Correspondenz besitzt nun wieder die Werthigkeit $\beta$ „an sich" (d. h. ohne Bezug auf $f$) und kann, wie vordem, in die Form eines homogenen Ausdrucks $\beta^{\text{ter}}$ Dimension in $uvw$ verwandelt werden. Substituirt man in diesen wieder:

$$u : v : w = f'(x) : f'(y) : f'(z),$$

so erhält man, nachdem $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ gesetzt ist, eine Gleichung:

$$F(xyz) = 0,$$

deren nicht in die Ausnahme- und singulären Punkte von $f$ fallenden Schnittpunkte die (eigentlichen) Coincidenzpunkte der Correspondenz $\Phi = 0$, oder auch der Correspondenz:

$$z^q z'^{q'} \varphi = 0$$

sind. Nach der Bemerkung am Schlusse des § 10 sind aber diese zugleich die Coincidenzpunkte von $\varphi$ selbst.

Nun gehören zu den Ausnahmepunkten der Correspondenzcurven $\Phi(P)$ und $\Phi(P')$ — deren Grad gleich $q + b$ und $q' + b'$ ist — sämmtliche Schnittpunkte von:

$$z^q = 0, \quad z'^{q'} = 0$$

mit $f = 0$, die, wie die anderen in die Ausnahmepunkte fallenden, von der Gesammtzahl der Schnittpunkte von $F = 0$ und $f = 0$

$$m(b + q + b' + q' + \beta(m - 3))$$

in Abzug kommen. Die in die singulären Punkte von $f$ und die anderen Ausnahmepunkte fallenden Schnittpunkte von $\Phi(P)$ und $\Phi(P')$ mit $f$ sind im Uebrigen genau dieselben, wie die von $\varphi(P)$ und $\varphi(P')$, wegen der zwischen $\varphi$, $\Phi$ und $f$ bestehenden identischen Gleichung; mit Rücksicht auf die Formel des § 10 und deren Ausdehnung auf den Fall, dass Berührungen in den Ausnahmepunkten stattfinden können, ist demnach die Anzahl $C$ der Coincidenzpunkte von $\Phi = 0$ und also von $\varphi = 0$ auf $f$ gleich:

$$\begin{aligned} C &= m(b + q + b' + q' + \beta(m - 3)) - \sum (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')\,\alpha \\ &\quad - \beta \sum (\alpha(\alpha - 1) + 2\sigma) - \beta \sum N - m(q + q') \\ &= \varkappa + \varkappa' + 2\beta p - \beta \sum N, \end{aligned}$$

wo sämmtliche Grössen die oben § 10 angegebene Bedeutung haben, insbesondere:

$$\varkappa = mb - \sum \mathfrak{b}\alpha - \beta; \quad \varkappa' = mb' - \sum \mathfrak{b}'\alpha - \beta$$

ist; nur bedeutet $\beta$ hier die Werthigkeit der Correspondenz $\varphi$ *hinsichtlich* $f$.

*Die Correspondenzformel des* § 10 *umfasst also alle Fälle von Correspondenzen* $\varphi = 0$ *mit beliebigem Verhalten in den Ausnahmepunkten und in dem Punkt* $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ *der Curve* $f$ (*die ihrerseits beliebige Singularitäten haben kann*), *wenn unter* $\beta$ *die Werthigkeit von* $\varphi$ *in Bezug auf* $f$ *verstanden wird, während* $\varkappa$ *und* $\varkappa'$, $p$ *und* $N$ *die a. a. O. angegebene Bedeutung haben.*

Da eine Correspondenz auf einer gegebenen Curve $f$ mit Rücksicht auf die Zahl ihrer Coincidenzen auf $f$ vollkommen bestimmt ist durch die Zusammenstellung:

$$[\varkappa, \varkappa']_\beta,$$

so kann man sich derselben zu ihrer Charakterisirung bedienen.

*Beispiel einer Berührungscorrespondenz:*

$$\varphi = x' \cdot f'(x) + y' \cdot f'(y) + z' \cdot f'(z),$$

wo $f'(x)\ldots$ die partiellen Ableitungen der ganzen homogenen Function $f(xyz)$ sind, und noch die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$f(xyz) = 0, \quad f(x'y'z') = 0.$$

Man erhält durch das angegebene Verfahren:

$$\Phi = zz'^{n-1}\varphi - (n-1)\, z'^n f(xyz) - z^n f(x'y'z') = 0$$

an Stelle von $\varphi$, eine Correspondenz mit der Werthigkeit $\beta = 2$ *an sich;* $\varphi$ hat also die Werthigkeit $\beta = 2$ *in Bezug auf* $f$.

## 13.

## Das Correspondenzprincip für Correspondenzen mit negativer Werthigkeit.

Wenn man im Vorstehenden, um die Allgemeinheit der Voraussetzungen zu wahren, „Ausnahmepunkte" einer Correspondenz, Berührungen der Correspondenzcurven mit der Grundcurve $f$ in dem Punkte $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ und beliebige Singularitäten dieser Curve annahm, so brachte dies ohne Zweifel manche Weitläufigkeiten in die Untersuchung; es bedingte nämlich:

1) Die *Normirung* der Gleichung der Correspondenz,
2) Deren *Umgestaltung,* sowie die der Gleichung der Coincidenzcurve, mit Hülfe von $f(xyz) = 0$ und $f(x'y'z') = 0$.

Indessen dürfte kaum auf andere Weise die Einsicht in die *algebraische* Seite der behandelten Frage gewonnen werden können, als indem man, wie dies oben geschehen, einen Weg sucht zu der von fremden Factoren freien Coincidenzgleichung und deren Resultante mit $f$. Uebrigens erweisen sich die entwickelten Hilfsmittel, wie ich schon oben zeigte und in späteren Arbeiten noch weiter auszuführen gedenke, auch als zureichend für die Bewältigung anderer nicht minder wichtigen Probleme, die einen unmittelbaren Zusammenhang mit der Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln nicht haben.

Auf die nahe Beziehung dagegen der vorbehandelten Fragen zu dieser Theorie und derjenigen der Abel'schen Functionen wirft ein interessantes Licht die erwähnte Arbeit des Herrn Hurwitz, in welcher eine merkwürdige Erweiterung des Begriffs der Correspondenz zwischen zwei Punkten einer Curve (Riemann'schen Fläche) aufgestellt wird. Betrachtungen über Modularcorrespondenzen hatten Herrn Hurwitz zur Conception von Correspondenzen geführt, welche nicht durch eine, sondern durch (mindestens) zwei Gleichungen (zwischen den Coordinaten der sich entsprechenden Punkte) definirt sind, die

einen Theil ihrer Lösungen gemeinsam haben, und welche entweder Correspondenzen mit negativer Werthigkeit oder von Herrn Hurwitz als „singulär" bezeichnete Correspondenzen sind. Diese letzteren sind die gemeinsamen Lösungen zweier von einander unabhängiger Gleichungen, die jedoch vermöge des besonderen Charakters der Curve, auf welcher sie bestehen, sich gegenseitig nicht völlig ausschliessen*).

Ich unterlasse es, hier auf dieselben einzugehen. Dagegen lässt sich das algebraische Gegenbild solcher Correspondenzen, denen man eine *negative* Werthigkeit zuerkennen muss, leicht in einer Form darstellen, aus der man ersehen wird, dass dieselben in naher Beziehung zu den von mir (d. Annalen, Bd. VII, S. 615) untersuchten Correspondenzen mit *verschiedenwerthigen* Punkten stehen.

Es kann nämlich eintreten, dass diejenigen Punkte $P$, welche vermöge einer Correspondenz:

$$\varphi(xy, x'y') = 0$$

einem gegebenen Punkt $x'y'$ $(P')$ der Curve:

$$f(xy) = 0$$

entsprechen, und nicht in $P'$ oder in die Ausnahmepunkte fallen, für jede Lage von $P'$ *in rational trennbare Gruppen zerfallen*, ohne dass deshalb die Gleichung $\varphi = 0$ selbst zerfällt, oder mit Hülfe von $f = 0$ zerfällbar gemacht werden kann.

Beispiel. Besteht die Correspondenzcurve $\varphi(P')$ aus dem Product der von dem Punkt $P'$ von $f$ ausgehenden Tangenten an $f$, so zerfallen die $P'$ entsprechenden Punkte $P$ in zwei Gruppen:

1. Die Berührungspunkte der Tangenten, deren jeder für zwei Punkte $P$ zu rechnen, „zweiwerthig" ist,
2. Die übrigen (einwerthigen) Punkte, in welchen die Tangenten die Curve $f$ noch weiter treffen.

Erfolgt, wie in diesem Fall, die Trennung der verschiedenen Gruppen in der Weise, dass die dem $P'$ entsprechenden Punkte $P$ verschiedene Werthigkeit besitzen, sind also $\varkappa_\varrho$ von den $\varkappa$ Punkten, die $P'$ entsprechen, $\varrho$-werthig, d. h. als $\varrho$ einfache Schnittpunkte von $\varphi(P)$ mit $f$ zu zählen, — wir bezeichnen dieselben als Punkte $P_\varrho$ —, $\varkappa_\sigma$ Punkte $P_\sigma$ $\sigma$-werthig, u. s. w., so ist:

$$\varkappa = \varrho \cdot \varkappa_\varrho + \sigma \cdot \varkappa_\sigma + \cdots$$

die Gesammtheit aller einfachen Punkte $P$, welche — abgesehen von den Ausnahmepunkten und $P'$ selbst — die Correspondenzcurve

*) Die Existenz solcher Correspondenzen auf Curven, die gewisse Symmetrieverhältnisse aufweisen, war mir schon früher im Verlauf eines brieflichen Verkehrs mit Herrn Zeuthen zu Anfang der siebenziger Jahre bekannt geworden.

$\varphi(P')$ ausschneidet, und es ist leicht zu sehen, dass, wenn man umgekehrt die Correspondenzcurve $\varphi(P)$ für einen der Punkte $P_\varrho$ bildet, die Curve $\varphi(P_\varrho)$ in dem ihm entsprechenden Punkte $P'$ ebenfalls einen $\varrho$-werthigen Punkt besitzt. Dies ist für den Fall, dass der $\varrho$-werthige Schnittpunkt in $P_\varrho$ ein $\varrho$-facher Punkt der Correspondenzcurve $\varphi(P') = 0$ ist, unmittelbar klar, wenn man sich des Satzes in § 2 erinnert. Ist aber die Werthigkeit von $P_\varrho$ eine $\varrho$-fache nur „in Bezug auf $f$" (also etwa durch ein- oder mehrfache Berührung entstanden), so kann man nach dem im § 11 ausgesprochenen Satz den Ausdruck $\varphi = 0$ durch Addition von $f$ mit einer passend gewählten Function in die Gleichung einer Correspondenzcurve mit $\varrho$-fachem Punkt verwandeln, für welche wieder die erste Bemerkung gilt.

Hiernach also zerfallen auch die dem Punkt $P$ entsprechenden Punkte $P'$ in $\varkappa'_\varrho$ $\varrho$—, $\varkappa'_\sigma$ $\sigma$— $\cdots$ werthige. Ist die Gesammtzahl der *einfachen* Schnittpunkte, die $P$ entsprechen, gleich $\varkappa'$, so hat man wieder eine Beziehung von der Form:

$$\varkappa' = \varrho \cdot \varkappa'_\varrho + \sigma \cdot \varkappa'_\sigma + \cdots .$$

Aber auch die Coincidenzgleichung:

$$\Phi(f_1 f_2 f_3 xyz) = 0$$

muss in diesem Fall entweder direct oder mit Hülfe von $f = 0$ rational zerfällbar sein, indem die Coincidenzen von $P'$ mit einem der $\varrho$-fach zählenden Schnittpunkte $P_\varrho$ als $\varrho$-fache Coincidenzen von den übrigen $\sigma$-fachen u. s. w. rational sich trennen lassen müssen. Giebt es $C_\varrho$ Coincidenzstellen der ersten Art, $C_\sigma$ der zweiten, u. s. w., so dass die Gesammtzahl $C$ sich aus:

$$C = \varrho C_\varrho + \sigma C_\sigma + \cdots$$

zusammensetzt, so geht die Correspondenzformel des § 10 durch Substitution dieser Werthe in die folgende über:

$$\varrho(C_\varrho - \varkappa_\varrho - \varkappa'_\varrho) + \sigma(C_\sigma - \varkappa_\sigma - \varkappa'_\sigma) + \cdots = 2p\beta,$$

(wo der Einfachheit wegen $N = 0$ angenommen ist).

Eine Bedeutung erhält diese Formel namentlich dann, wenn sich von den Coincidenzzahlen:

$$C_\varrho, \; C_\sigma, \; \ldots$$

alle bis auf eine auf *directem* Weg bestimmen lassen.

Es kann nämlich vorkommen, dass die Beziehungen 1) zwischen $P$ und $P_\varrho$; 2) zwischen $P$ und $P_\sigma$; u. s. w. je durch besondere Correspondenzgleichungen darstellbar sind, so dass die Gleichung ihrer Coincidenzcurven (nöthigenfalls mit Hülfe von $f = 0$) als Factor derjenigen von $\varphi$ sich absondern lassen*).

*) So kommen in dem oben betrachteten Beispiel die Coincidenzen von $P'$ mit der ersten Gruppe in die Wendepunkte der Curve $f$ zu liegen, ihre Coincidenz-

Bleibt dann noch eine solche Beziehung übrig, welche nicht, wie die anderen, isolirbar ist, so lässt sich diese als Correspondenz algebraisch durch den (allerdings nicht ausführbaren) Quotienten aus der gegebenen Correspondenz und dem Product der isolirbaren $P \ldots P_\varrho$, $P \ldots P_\sigma, \ldots$, erhoben je auf eine entsprechende Potenz, definiren. Die Anzahl ihrer Coincidenzen ist gleich der Differenz derer von Zähler und Nenner, wie denn auch die Anzahl der in den Punkt $P'$ zurückfallenden Punkte $P$, d. h. die *Werthigkeit* der nicht isolirbaren Correspondenz, durch eine Differenz darstellbar ist, die unter Umständen *negativ* ausfällt.

Dies ist die algebraische Interpretation der Correspondenzen — auch der allgemeinsten — mit negativer Werthigkeit. Man sieht, dass dieselben nur wieder auf die bereits bekannten Correspondenzen mit verschiedenwerthigen Punkten zurückführen, welche, wenigstens von algebraischem Standpunkt aus, kein hervorragendes Interesse zu beanspruchen scheinen. — Die algebraische Auffassung erhellt aus dem folgenden *Beispiel für Correspondenzen mit zerfallender Coincidensgleichung*, das seiner prägnanten Form wegen zum Schluss hier Platz finden möge.

Gegeben sei die Gleichung einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem unendlich fernen Punkt je auf der $X$-Axe und der $Y$-Axe, deren Gleichung also die Form hat:

$$f(xy) = A \cdot xy + B = 0,$$

wo $A$ und $B$ Functionen von $x, y$ bez. von der $(n-2)^{\text{ten}}$ und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind.

Ein Punkt $P''$ mit den Coordinaten $x''y''$ werde beliebig auf $f$ angenommen, und durch ihn parallel mit der $X$-Axe eine Gerade gelegt, welche die Curve in noch $n-2$ Punkten, die im Endlichen gelegen sind und als Punkte $P'$ bezeichnet werden mögen, trifft.

Ebenso schneide eine Parallele zur $Y$-Axe durch $P''$ noch in $n-2$ endlichen Punkten $P$. Dann findet zwischen den Punkten $P$ und $P'$ ein Entsprechen statt, das (§ 12) durch:

$$[(n-2)^2, (n-2)^2]$$

dargestellt werden kann, weil jedem Punkt $P$ $n-2$ Punkte $P''$ entsprechen, zu deren jedem wiederum $n-2$ Punkte $P'$ gehören. Man kann diese Correspondenz $(PP'')$ isolirt nicht darstellen. Denn wenn man aus:

$$y = y'; \quad x' = x''; \quad f(x''y'') = 0$$

---

curve ist also die Hesse'sche, welche sich als dreifacher Factor aus der Coincidenzgleichung ausscheiden lässt, die in diesem Fall nichts Anderes, als $F(f_1 f_2 f_3) = 0$ ist, wo $F(uvw) = 0$ die Curve $f$ in Liniencoordinaten geschrieben bedeutet.

die Grössen $x''y''$ eliminirt, so erhält man die Correspondenzgleichung:

$$f(x'y) = 0,$$

die hinsichtlich $x$ und $y'$ je zum $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad ansteigt. Die Curven $\varphi(P)$, $\varphi(P')$ bestehen aus je $(n-1)$ Parallelen zu einer der Axen, die durch die im Endlichen gelegenen Schnittpunkte der Geraden $y = y''$, bez. $x' = x''$ mit der Curve gehn, wovon also je eine durch den Punkt $P'$ (bez. $P$) selbst hindurchpassirt. Die Correspondenz $f(x'y) = 0$ ist also charakterisirt (§ 12 a. E.) durch:

$$[n(n-2),\ n(n-2)]_1,$$

und besitzt demnach:

$$2n(n-2) + 2p$$

Coincidenzen, unter denen sich auch diejenigen unserer Correspondenz $(PP')$ befinden müssen.

Aber es befinden sich offenbar unter ihnen auch diejenigen der Correspondenzen:

$$x = x'',\ y = y'',$$

die beide von der Form:

$$[n-2,\ n-2]_1$$

sind und zusammen:

$$2[2n-4+2p]$$

Coincidenzen haben. Es bleiben also für die Correspondenz $(PP')$ noch:

$$2n(n-2) + 2p - 2[2n-4+2p) = 2(n-2)^2 - 2p$$

Coincidenzen, welche dem Quotienten:

$$\frac{f(xy')}{(x-x')(y-y')}$$

entsprechen. Die Werthigkeit der durch diesen Quotienten dargestellten Correspondenz ist gleich $-1$, weil die des Zählers $= +1$ ist, die des Nenners $= +2$. In der That ergiebt die Correspondenzformel — die auf Zähler und Nenner einzeln anwendbar ist, und also für den Quotienten gelten muss, wenn man negative Werthigkeiten zulässt — den oben erhaltenen Ausdruck:

$$(n-2)^2 + (n-2)^2 + 2p(-1) = 2(n-2)^2 - 2p.$$

Tübingen, im November 1887.

# Ueber die Potenzreihen der hyperelliptischen Thetafunctionen.

Von

Ed. Weltheiss in Halle a./S.

Bekanntlich besteht diejenige Eigenschaft, welche die Weierstrass'ischen hyperelliptischen Thetafunctionen vor den Jacobi'schen auszeichnet, darin, dass die Coefficienten der Entwicklung der ersteren nach Potenzen der Argumente rationale Functionen der Verzweigungspunkte und gewisser in den Integralen zweiter Gattung vorkommender Grössen sind. Dass diese Coefficienten bei richtiger Bestimmung dieser Grössen in den Integralen zweiter Gattung, abgesehen von einem allen gemeinschaftlichen Factor, auch *ganze* Functionen dieser Verzweigungspunkte sind, davon existirt, soweit mir bekannt ist, ein einfacher, unmittelbarer Beweis nicht. Einen solchen möchte ich hier liefern, und dabei möglichst wenig Voraussetzungen, nämlich nur die folgenden drei, machen:

1) die Definition *einer* Thetafunction durch Integrale dritter Gattung;
2) die Formel, welche die übrigen Thetafunctionen aus dieser Thetafunction bei Vermehrung der Argumente um ein System halber Perioden ableitet;
3) das Abel'sche Theorem für die Integrale erster Gattung.

## § 1.

## Vorbereitungen.

Als Ausgangspunkt nehme ich die Definition der Thetafunction durch das System von Gleichungen

$$(A)\quad u_\beta = \sum_\alpha \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha y_\alpha} x^{\beta-1}\,\frac{dx}{2y}, \qquad w_\beta = \int_{a_{2\varrho+1}}^{\xi\eta} x^{\beta-1}\,\frac{dx}{2y}, \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, \varrho)$$

$$(B)\quad \lg \frac{\Theta(0,0,\ldots,0)\,\Theta(u_1-w_1,\,u_2-w_2,\ldots,u_\varrho-w_\varrho)}{\Theta(w_1,w_2,\ldots,w_\varrho)\,\Theta(u_1,u_2,\ldots,u_\varrho)} = \sum_\alpha \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha y_\alpha} \frac{dx}{2y} \int_{a_{2\varrho+1}}^{\xi\eta} \frac{2y\eta + 2f(x|\xi)}{(x-\xi)^2}\,\frac{d\xi}{2\eta},$$

das ich in nur wenig veränderter Form auch meinen früheren Arbeiten zu Grunde gelegt habe. In demselben ist

$$y^2 = f(x) = \sum_{\lambda=0}^{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{\lambda} A_\lambda x^\lambda = A_{2\varrho+2} \prod_{\mu=0}^{2\varrho+1} (x - a_\mu),$$

und $\eta$ bedeutet einen der Werthe von $y$ ausgerechnet für $x = \xi$; sodann ist

$$f(x|\xi) = \sum_{i,j=0}^{\varrho+1} \binom{\varrho+1}{i} \binom{\varrho+1}{j} A_{i+j} x^i \xi^j,$$

und endlich ist die Summation über $\alpha$, wie später die Summationen über $\beta$ und $\gamma$, von 1 bis $\varrho$ auszuführen.

Dieses System werde ich nun so umwandeln, dass ich für die folgenden Entwicklungen passendere Formeln erhalte. Ich differentiire zu diesem Zwecke die Gleichung (B) nach $\xi$ und finde, wenn ich zur Abkürzung bei der Thetafunction nur *ein* Argument $-\Theta(u_\alpha)$ statt $\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)$ — schreibe:

$$(1) \qquad \sum_\beta \left( \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha - w_\alpha)}{\partial u_\beta} + \frac{\partial \lg \Theta(w_\alpha)}{\partial w_\beta} \right) \xi^{\beta-1}$$

$$= -\sum_\alpha \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha y_\alpha} \frac{2y\eta + 2f(x|\xi)}{(x-\xi)^2} \cdot \frac{dx}{2y}.$$

Hierauf bestimme ich mit Hilfe des Abel'schen Theorems $\varrho$ Grössenpaare $c_\alpha, e_\alpha$ der Art, dass

$$\sum_\alpha \int_{a_{2\alpha-1}}^{c_\alpha e_\alpha} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y} - \int_{a_{2\varrho+1}}^{\xi\eta} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y} = 0;$$

die Grössen $c_\alpha, e_\alpha$ genügen dann dabei für $x, y$ gesetzt der Gleichung

$$\eta \prod_{\varkappa=1}^{\varrho+1} (x - a_{2\varkappa-1}) + y \prod_{\varkappa=1}^{\varrho+1} (\xi - a_{2\varkappa-1}) = 0.$$

Wenn ich jetzt

$$u_\beta - w_\beta = \bar{u}_\beta$$

setze, so ist (vergl. (A))

$$(2) \qquad \bar{u}_\beta = \sum_\alpha \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha y_\alpha} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y} - \int_{a_{2\varrho+1}}^{\xi\eta} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y} = \sum_\alpha \int_{c_\alpha e_\alpha}^{x_\alpha y_\alpha} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y},$$

während die Gleichung (1) die Form annimmt:

$$\sum_{\beta}\left(\frac{\partial \lg \Theta(\bar{u}_\alpha)}{\partial \bar{u}_\beta}+\frac{\partial \lg \Theta(w_\alpha)}{\partial w_\beta}\right)\xi^{\beta-1}$$
$$=-\sum_{\alpha}\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha y_\alpha}\frac{2y\eta+2f(x\mid\xi)}{(x-\xi)^2}\cdot\frac{dx}{2y}.$$

Hierin lasse ich die Argumente Null werden und subtrahire die so entstehende Gleichung von der ursprünglichen; da $\Theta(u_\alpha)$ eine gerade Thetafunction ist, so erhält man

$$(3)\qquad \sum_{\beta}\frac{\partial \lg \Theta(\bar{u}_\alpha)}{\partial \bar{u}_\beta}\xi^{\beta-1}=-\sum_{\alpha}\int_{c_\alpha e_\alpha}^{x_\alpha y_\alpha}\frac{2y\eta+2f(x\mid\xi)}{(x-\xi)^2}\cdot\frac{dx}{2y}.$$

An Stelle von $\bar{u}_\alpha$ will ich wieder $u_\alpha$ schreiben; dann aber müssen auch die oberen Grenzen in den Gleichungen (2) und (3) anders, z. B. mit $\mathfrak{x}_\alpha$, $\mathfrak{y}_\alpha$, bezeichnet werden. Dadurch ist man jetzt *zu dem Gleichungssystem gelangt:*

$$(C)\qquad u_\beta=\sum_{\alpha}\int_{c_\alpha e_\alpha}^{\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{y}_\alpha}x^{\beta-1}\frac{dx}{2y},$$

$$(D)\qquad \sum_{\beta}\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta}\xi^{\beta-1}=-\sum_{\alpha}\int_{c_\alpha e_\alpha}^{\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{y}_\alpha}\frac{2y\eta+2f(x\mid\xi)}{(x-\xi)^2}\cdot\frac{dx}{2y},$$

*in dem die Grössen $c_\alpha$, $e_\alpha$ dadurch bestimmt sind, dass der Ausdruck*

$$(E)\qquad \eta\prod_{\varkappa=1}^{\varrho+1}(x-a_{2\varkappa-1})+y\prod_{\varkappa=1}^{\varrho+1}(\xi-a_{2\varkappa-1})$$

*verschwindet, wenn man in demselben $c_\alpha$, $e_\alpha$ für $x$, $y$ setzt.* Die Argumente $u_\alpha$ können als dieselben Grössen betrachtet werden, welche die Argumente in den Gleichungen (A) und (B) sind. — Von diesen Gleichungen ausgehend werde ich den hier zu entwickelnden Beweis für die in denselben vorkommende Thetafunction liefern, und damit auch zugleich für alle die andern Thetafunctionen, welche aus dieser durch Vertauschung der $a_\lambda$ entstehen.

Bezüglich der übrigen Thetafunctionen wird der Beweis wohl am leichtesten dadurch zu führen sein, dass ich dieselben durch diese Thetafunction und ihre Ableitungen ausdrücke. Eine derartige Formel will ich jetzt hier entwickeln. Dieselbe kann als eine Ausdehnung der bekannten Gleichung der elliptischen Functionen

$$-\frac{d^2 \lg \sigma u}{du^2}-e_\varkappa=pu-c_\varkappa=\frac{\sigma_\varkappa^2 u}{\sigma^2 u}$$

auf hyperelliptische Functionen betrachtet werden. Ich werde dieselbe, da die Entwicklung dadurch am einfachsten wird, zuerst für den Fall beweisen, dass einer der Verzweigungspunkte, $a_{2\varrho+1}$, im Unendlichen liegt. Die Gleichungen (C) und (D) gehen aber, wenn ich in denselben

$$y^2 = \left(\frac{-x}{a_{2\varrho+1}} + 1\right) \sum_{\lambda=0}^{2\varrho+1} \binom{2\varrho+2}{\lambda} A_\lambda' x^\lambda$$

$$= \left(\frac{-x}{a_{2\varrho+1}} + 1\right) (2\varrho+2)\, A'_{2\varrho+1} \prod_{\mu=0}^{2\varrho} (x - a'_\mu) = \left(\frac{-x}{a_{2\varrho+1}} + 1\right) y'^2,$$

also

$$\binom{2\varrho+2}{\lambda} A_\lambda = \binom{2\varrho+2}{\lambda} A_\lambda' - \binom{2\varrho+2}{\lambda-1} \frac{1}{a_{2\varrho+1}} A'_{\lambda-1}$$

setze und hierauf $a_{2\varrho+1}$ unendlich werden lasse, über in

$$u'_\beta = \sum_\alpha \int_{c'_\alpha e'_\alpha}^{\xi'_\alpha \eta'_\alpha} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y'}, \tag{4}$$

$$\sum_\beta \frac{\partial \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\beta} \xi^{\beta-1} = -\sum_\alpha \int_{c'_\alpha e'_\alpha}^{\xi'_\alpha \eta'_\alpha} \frac{2y'\eta' + 2f_1(x|\xi)}{(x-\xi)^2} \cdot \frac{dx}{2y'}, \tag{5}$$

wobei die $c'_\alpha$, $e'_\alpha$ für $x, y'$ gesetzt den Ausdruck

$$\eta' \prod_{\varkappa=1}^{\varrho} (x - a'_{2\varkappa-1}) + y' \prod_{\varkappa=1}^{\varrho} (\xi - a'_{2\varkappa-1}) \tag{6}$$

zum Verschwinden bringen, und $f_1(x|\xi)$ sich nur dadurch von $f(x|\xi)$ unterscheidet, dass in demselben $A_\lambda'$ an Stelle von $A_\lambda$ für

$$\lambda = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2\varrho+1$$

und Null an Stelle von $A_{2\varrho+2}$ steht. Jetzt lasse ich auch noch den Werth $\xi$ in's Unendliche rücken, nachdem ich die Gleichung (5) durch $\xi^{\varrho-1}$ dividirt habe. Wenn ich dabei zugleich auch die Bezeichnung der oberen Grenzen ein wenig ändere, gehen dadurch die Gleichungen (4) und (5), da noch aus dem Ausdrucke (6) folgt, dass für $\xi = \infty$ die $c_\alpha$ die Werthe $a'_{2\alpha-1}$ annehmen, über in

$$u'_\beta = \sum_\alpha \int_{a'_{2\alpha-1}}^{x'_\alpha y'_\alpha} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y'},$$

$$\frac{\partial \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\varrho} = \sum_\alpha \int_{a'_{2\alpha-1}}^{x'_\alpha y'_\alpha} G(x)_\varrho \frac{dx}{2y'}, \tag{7}$$

wobei

$$G(x)_\varrho = -2\sum_{\varkappa=0}^{\varrho}\binom{\varrho+1}{\varkappa} A'_{\varrho+1+\varkappa}\, x^\varkappa.$$

Diese Gleichungen differentiire ich und eliminire die $dx'_\alpha$; das Ergebniss ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \sum_\gamma \frac{\partial^2 \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\gamma \partial u'_\varrho}\, du'_\gamma, & G(x_1')_\varrho, & G(x_2')_\varrho, \cdots, & G(x_\varrho')_\varrho \\ du'_\beta, & x_1'^{\beta-1}, & x_2'^{\beta-1}, \cdots, & x_\varrho'^{\beta-1} \end{vmatrix} = 0,$$

in der die zweite, dritte, u. s. w. Zeile aus der zweiten hervorgeht, indem ich dem $\beta$ die Werthe 1, 2, u. s. w. gebe. Hierin sind die $du'_\beta$ ganz beliebig, und ich kann daher für $du'_\beta$ den Werth $t^{\beta-1}$ setzen, wo $t$ eine neue vollkommen unabhängige Variable ist. Hierauf addire ich zur ersten Zeile die mit $2A'_{\varrho+1}$, bez. $2\binom{\varrho+1}{1}A'_{\varrho+2}$ u. s. w. multiplicirten zweiten, bez. dritten u. s. w. Zeilen. Die erste Zeile nimmt dadurch die Form an:

$$\Big(\sum_\gamma \frac{\partial^2 \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\gamma \partial u'_\varrho} t^{\gamma-1} - G(t)_\varrho\Big) - (2\varrho+2)A'_{2\varrho+2}t^\varrho, \; -(2\varrho+2)A'_{2\varrho+2}x_1'^\varrho, \cdots, -(2\varrho+2)A'_{2\varrho+2}x_\varrho'^\varrho,$$

und die übrigen werden

$$t^{\beta-1}, \quad x_1'^{\beta-1}, \quad \cdots, \quad x_\varrho'^{\beta-1}.$$

Die Determinante kann man jetzt in folgender Weise spalten:

$$\Big(\sum_\gamma \frac{\partial^2 \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\gamma \partial u'_\varrho} t^{\gamma-1} - G(t)_\varrho\Big) \, |x_1'^{\beta-1}, \; x_2'^{\beta-1}, \; \cdots, \; x_\varrho'^{\beta-1}|$$

$$= (2\varrho+2)\, A'_{2\varrho+1} \begin{vmatrix} t^\varrho, & x_1'^\varrho, & x_2'^\varrho, & \cdots, & x_\varrho'^\varrho \\ t^{\beta-1}, & x_1'^{\beta-1}, & x_2'^{\beta-1}, & \cdots, & x_\varrho'^{\beta-1} \end{vmatrix}.$$

Da die beiden Determinanten je gleich dem Producte der Differenzen der in ihnen vorkommenden Grössen sind, so ergiebt sich hieraus:

$$(8) \quad \sum_\gamma \frac{\partial^2 \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\gamma \partial u'_\varrho} t^{\gamma-1} - G(t)_\varrho = (2\varrho+2)\, A'_{2\varrho+1} \prod_\alpha (t - x'_\alpha). -$$

Nun besteht andererseits die Formel

$$(9) \quad \prod_\alpha (a'_\mu - x'_\alpha) = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{f_1'(a'_\mu)}{(2\varrho+2)\, A'_{2\varrho+1}}} \cdot \frac{\Theta^2(u'_\alpha)_\mu}{\Theta^2(u'_\alpha)},$$

wo $\varepsilon_1$ eine vierte Wurzel der Einheit bedeutet, und

$$f_1'(x) = \frac{d}{dx} y'^2$$

ist, während die Thetafunction $\Theta(u_\alpha)_\mu$ durch die Gleichung

$$\Theta(u_\alpha + \omega_\alpha) = j\Theta(u_\alpha)_\mu \, e^{\sum_\alpha \eta_\alpha (u_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha)} \tag{10}$$

definirt ist, in der mit $j$ eine achte Wurzel der Einheit bezeichnet wird, und

$$\omega_\alpha = \int_\infty^{a'_\mu} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y'}. \tag{11}$$

Diese Formel (9) kann bekanntlich aus der Gleichung (B) abgeleitet werden, indem man nur das Abel'sche Theorem für die Integrale erster Gattung und die Gleichungen (10) und (11) zu Hilfe nimmt, wobei man sogar nicht einmal in (10) die Bedeutung von $\eta_\alpha$ zu kennen braucht. —

Gebe ich jetzt in der Gleichung (8) der noch beliebigen Variablen $t$ den Werth $a'_\mu$ und drücke die rechte Seite mittels (9) durch den Quotienten der Thetafunctionen aus, so erhalte ich die *gesuchte Beziehung für den Fall, dass einer der Verzweigungspunkte im Unendlichen liegt:*

$$\sum_\gamma \frac{\partial^2 \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\gamma \partial u'_\varrho} a_\mu'^{\gamma-1} - G(a'_\mu)_\varrho = \varepsilon_1 \sqrt{(2\varrho+2)} A'_{2\varrho+1} f_1'(a'_\mu) \frac{\Theta^2(u'_\alpha)_\mu}{\Theta^2(u'_\alpha)}. \tag{12}$$

Dieselbe muss nun noch dadurch umgeformt werden, dass ich den im Unendlichen befindlichen Verzweigungspunkt in's Endliche verlege. Diess geschieht durch zwei aufeinanderfolgende Substitutionen.

Die erste besteht darin, dass ich

$$x' = \frac{1}{x''}, \quad \text{also} \quad a_\lambda' = \frac{1}{a_\lambda''}$$

setze. Bezeichne ich sodann

$$\sum_{\lambda=1}^{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{\lambda} A'_{2\varrho+2-\lambda} x''^\lambda = A_0' x'' \prod_{\mu=0}^{2\varrho} (x'' - a''_\mu) = y''^2 = f_2(x''),$$

so ist

$$y' = \frac{1}{x''^{\varrho+1}} y''$$

und mithin

$$(2\varrho+2) A'_{2\varrho+1} = \left[\frac{df_2(x'')}{dx''}\right]_{x=0} = f_2'(0), \quad f_1'(a'_\mu) = \frac{-1}{a''^{2\varrho}_\mu} f_2'(a''_\mu),$$

und ferner wird

$$G(a'_\mu)_\varrho = \frac{-2}{a''^{\varrho}_\mu} \sum_{\varkappa=0}^{\varrho} \binom{\varrho+1}{\varkappa+1} A'_{2\varrho+1-\varkappa} a''^\varkappa_\mu = \frac{1}{a''^{\varrho}_\mu} G_1(a''_\mu)_\varrho.$$

Aendere ich ausserdem noch die Bezeichnung der Argumente, indem ich $-u''_{\varrho+1-\alpha}$ für $u'_\alpha$ schreibe, so nehmen die Gleichungen (7) und (12) die folgende Form an:

$$(13) \qquad u''_\beta = \sum_\alpha \int_{a''_{2\alpha-1}}^{x''_\alpha y''_\alpha} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y''},$$

$$(14) \qquad \sum_\gamma \frac{\partial^2 \lg \Theta(u''_\alpha)}{\partial u''_1 \partial u''_\gamma} a''_\mu{}^\gamma - G_1(a''_\mu)_\varrho = \varepsilon \sqrt{f_2'(0) f_2'(a''_\mu)} \frac{\Theta^2(u''_\alpha)_\mu}{\Theta^2(u''_\mu)},$$

wo $\varepsilon$ wieder eine vierte Wurzel der Einheit bedeutet.

Hierauf mache ich die Substitution

$$x'' = x - a_{2\varrho+1}.$$

Der Ausdruck, in den sich dadurch $y''^2 = f_2(x'')$ verwandelt, ist vom $(2\varrho+2)^{\text{ten}}$ Grade mit $2\varrho+3$ willkürlichen Coefficienten, und ich kann daher denselben mit dem in (A) und (B) vorkommenden $y^2$ identificiren:

$$(15) \qquad y''^2 = f_2(x - a_{2\varrho+1}) = y^2 = f(x),$$

so dass

$$a''_\lambda = a_\lambda - a_{2\varrho+1}$$

wird. Wenn ich jetzt

$$u_\beta = \sum_{\nu=1}^{\beta} \binom{\beta-1}{\nu-1} a_{2\varrho+1}^{\beta-\nu} u''_\nu$$

setze, so geht die Gleichung (13) in die Gleichung (A) über; sodann ist

$$\sum_\gamma \frac{\partial \lg \Theta(u''_\alpha)}{\partial u''_\gamma} a''_\mu{}^{\gamma-1} = \sum_\beta \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta} a_\mu^{\beta-1},$$

und mithin

$$(16) \qquad \sum_\gamma \frac{\partial^2 \lg \Theta(u''_\alpha)}{\partial u''_1 \partial u''_\gamma} a''_\mu{}^\gamma = (a_\mu - a_{2\varrho+1}) \sum_{\beta,\gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} a_\mu^{\beta-1} a_{2\varrho+1}^{\gamma-1}.$$

Da ferner $f(s|t)$ eine Covariante von $f(x)$ ist, so geht dieser Ausdruck, wenn sich $f(x)$ durch die Substitution $x = x'' + a_{2\varrho+1}$ in $f_2(x'')$ verwandelt, durch die Substitution

$$s = s'' + a_{2\varrho+1}, \quad t = t'' + a_{2\varrho+1}$$

in $f_2(s''|t'')$ über:

$$f(s|t) = f_2(s''|t''),$$

wo $f_2(s''|t'')$ aus $f_2(x'')$ ebenso gebildet ist, wie $f(s|t)$ aus $f(x)$. Gebe ich nun hierin $s$ und $t$ die Werthe $a_\mu$ und $a_{2\varrho+1}$, so muss man $a'_\mu$, bez. 0 für $s''$ und $t''$ setzen:

$$f(a_\mu|a_{2\varrho+1}) = f_2(a''_\mu|0),$$

und hieraus folgt, da $a''_\mu G_1(a''_\mu)_\varrho = -2f_2(a''_\mu|0)$ ist:

$$(17) \qquad G_1(a''_\mu)_\varrho = \frac{-2f(a_\mu|a_{2\varrho+1})}{a_\mu - a_{2\varrho+1}}.$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen (16) und (17), wenn ich noch mit hinzunehme, dass

$$f_2'(0) = f'(a_{2\varrho+1}), \quad f_2'(a_\mu'') = f'(a_\mu)$$

ist, wie dies aus (15) folgt, bekomme ich die endgültige Form der Gleichung:

$$(F) \qquad (a_\mu - a_{2\varrho+1}) \sum_{\beta,\gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} a_\mu^{\beta-1} a_{2\varrho+1}^{\gamma-1} + \frac{2f(a_\mu \mid a_{2\varrho+1})}{a_\mu - a_{2\varrho+1}}$$
$$= \varepsilon \sqrt{f'(a_\mu) f'(a_{2\varrho+1})} \frac{\Theta^2(u_\alpha)_\mu}{\Theta^2(u_\alpha)},$$

*durch welche die Thetafunction* $\Theta(u_\alpha)_\mu$, *die mittels*

$$(G) \qquad \Theta(u_\alpha + \omega_\alpha) = j\Theta(u_\alpha)_\mu e^{\sum \eta_\alpha (u_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha)}, \quad \omega = \int_{a_{2\varrho+1}}^{a_\mu} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y}$$

*definirt ist, ausgedrückt wird durch diejenige Thetafunction* $\Theta(u_\alpha)$, *welche von den Gleichungen* (A) *und* (B) *bestimmt ist.* In derselben ist $\varepsilon$ eine vierte Wurzel der Einheit, und die Argumente sind dieselben, wie in den Gleichungen (A), (B), (C) und (D).

Selbstverständlich kann man aus dieser Formel noch eine grosse Anzahl analoger ableiten, indem man dieselbe entweder linear transformirt, also die $a_\lambda$ vertauscht, oder indem man die Argumente um halbe Perioden vermehrt.

## § 2.

## Beweis.

Ich wende mich jetzt zu dem zu liefernden Beweise selbst. Der Einfachheit halber will ich dabei den Coefficienten von $x^{2\varrho+2}$ in $y^2 = f(x)$, d. i.

$$A_{2\varrho+2} = 1$$

annehmen.

Indem ich die Gleichungen (C) als Differentialgleichungen schreibe:

$$du_\beta = \sum_\alpha \mathfrak{x}_\alpha^{\beta-1} \frac{d\mathfrak{x}_\alpha}{2\mathfrak{y}_\alpha}$$

und sie nach $d\mathfrak{x}_\alpha$ auflöse, finde ich bei Einführung der Bezeichnung

$$\frac{1}{t-\mathfrak{x}_\alpha} \prod_\beta (t-\mathfrak{x}_\beta) = \varphi_\alpha(t) = \sum_\beta X_{\alpha,\varrho-\beta} t^{\beta-1}$$

bekanntlich

$$\varphi_\alpha(\mathfrak{x}_\alpha) \frac{d\mathfrak{x}_\alpha}{2\mathfrak{y}_\alpha} = \sum_\beta X_{\alpha,\varrho-\beta} du_\beta,$$

so dass

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_\alpha}{\partial u_\beta} = 2\mathfrak{y}_\alpha \frac{X_{\alpha,\varrho-\beta}}{\varphi_\alpha(\mathfrak{x}_\alpha)}.$$

Differentiirt man jetzt die Gleichung (D) partiell nach $u_\gamma$, so erhält man

$$\sum_\beta \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \xi^{\beta-1} = -\sum_\alpha \frac{2\mathfrak{y}_\alpha \eta + 2f(\mathfrak{x}_\alpha \mid \xi)}{(\mathfrak{x}_\alpha - \xi)^2} \cdot \frac{X_{\alpha,\varrho-\beta}}{\varphi_\alpha(\mathfrak{x}_\alpha)}.$$

Die rechte Seite verwandelt sich, wenn man die einzelnen Glieder der Summe zusammenzieht, in einen Bruch, dessen Zähler eine ganze Function, $F_0(\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\alpha)$, der $\mathfrak{x}_\alpha$, $\mathfrak{y}_\alpha$ wird, welche bei Vertauschung der $\mathfrak{x}_\alpha$ höchstens ihr Vorzeichen ändert, während der Nenner das Product des Quadrates von

$$\varphi(\xi) = \prod_\alpha (\xi - \mathfrak{x}_\alpha)$$

mal dem Producte der Differenzen der $\mathfrak{x}_\alpha$:

$$\Delta = \prod_{i<j} (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_j)$$

ist:

$$\sum_\beta \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \xi^{\beta-1} = \frac{F_0(\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\alpha)}{\varphi^2(\xi)\Delta}.$$

Wiederholt man diese partielle Differentiation, so ändert sich die rechte Seite nur insofern, als an Stelle von $F_0(\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\alpha)$ eine andere ganze Function von $\mathfrak{x}_\alpha$, $\mathfrak{y}_\alpha$, $F(\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\alpha)$, tritt, welche auch höchstens ihr Vorzeichen ändert, wenn man die $\mathfrak{x}_\alpha$ vertauscht, indess im Nenner höhere Potenzen von $\varphi(\xi)$ und $\Delta$ auftreten. Den Exponenten von $\Delta$ will ich dabei als gerade, $= 2q$, annehmen, indem ich, wenn dies nicht schon unmittelbar der Fall ist, Nenner und Zähler mit $\Delta$ multiplicire:

$$\sum_\beta \frac{\partial^{h_1+h_2+\cdots+h_\varrho+1} \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_1^{h_1} \partial u_2^{h_2} \cdots \partial u_\varrho^{h_\varrho} \partial u_\beta} \xi^{\beta-1} = \frac{F(\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\alpha)}{\varphi^p(\xi)\Delta^{2q}}.$$

In dieser Gleichung lasse ich die $u_\alpha$ gleich Null werden; dadurch gehen die $\mathfrak{x}_\alpha$, $\mathfrak{y}_\alpha$ in $c_\alpha$, $e_\alpha$ über, so dass man, wenn

$$\varphi_0(\xi) = \prod_\alpha (\xi - c_\alpha), \qquad \Delta_0 = \prod_{i<j} (c_i - c_j)$$

gesetzt wird,

$$\sum_\beta \left[ \frac{\partial^{h_1+h_2+\cdots+h_\varrho+1} \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_1^{h_1} \partial u_2^{h_2} \cdots \partial u_\varrho^{h_\varrho} \partial u_\beta} \right]_{u_\alpha=0} \xi^{\beta-1} = \frac{F(c_\alpha, e_\alpha)}{\varphi_0^p(\xi)\Delta_0^{2q}}$$

findet. Die $c_\alpha$, $e_\alpha$ bringen für $x$, $y$ gesetzt den Ausdruck (E) zum Verschwinden; mithin ist, wenn man

$$\prod_{\varkappa=1}^{\varrho+1}(x-a_{2\varkappa-1})=\psi(x)$$

setzt:

$$e_\alpha=-\eta\frac{\psi(c_\alpha)}{\psi(\xi)}.$$

Diesen Ausdruck von $e_\alpha$ substituire ich in die Function $F(c_\alpha, e)$, welche dadurch in eine ganze Function der $c_\alpha$, $F(c_\alpha)$, dividirt durch eine Potenz von $\psi(\xi)$ verwandelt wird:

$$F(c_\alpha, e_\alpha)=F(c_\alpha):\psi^r(\xi).$$

Folglich ist

$$(18)\qquad \sum_\beta\left[\frac{\partial^{h_1+h_2+\cdots+h_\varrho+1}\lg\Theta(u_\alpha)}{\partial u_1^{h_1}\partial u_2^{h_2}\cdots\partial u_\varrho^{h_\varrho}\partial u_\beta}\right]_{u_\alpha=0}\xi^{\beta-1}=\frac{F(c_\alpha)}{\varphi_0^{\varrho}(\xi)\psi^r(\xi)\Delta_0^{2q}}.$$

Da die linke Seite und der Nenner auf der rechten Seite bei der Vertauschung der $c_\alpha$ ungeändert bleibt, so muss dies auch bei dem Zähler $F(c_\alpha)$ der Fall sein, d. h. es ist $F(c_\alpha)$ eine symmetrische Function der $c_\alpha$.

Nun finde ich aus der Gleichung (E), welche wie eben erwähnt, für $x=c_\alpha$, $y=e_\alpha$ befriedigt wird, indem ich durch Quadriren die Wurzelgrösse $y$ entferne, dass die $c_\alpha$ die Wurzeln der Gleichung

$$(19)\quad \overline{\varphi}(x)=\left[\prod_{\varkappa=0}^{\varrho}(x-a_{2\varkappa})(\xi-a_{2\varkappa+1})-\prod_{\varkappa=0}^{\varrho}(\xi-a_{2\varkappa})(x-a_{2\varkappa+1})\right]:(x-\xi)$$
$$=C_0x^\varrho-C_1x^{\varrho-1}+C_2x^{\varrho-2}-\cdots+(-1)^\varrho C_\varrho$$

sind, (wo die $C_\nu$ ganze Functionen der $a_\lambda$ sind, und insbesondere

$$C_0=\prod_{\varkappa=0}^{\varrho}(\xi-a_{2\varkappa+1})-\prod_{\varkappa=0}^{\varrho}(\xi-a_{2\varkappa})$$

ist,) so dass

$$\varphi_0(\xi)=C_0^{-1}\overline{\varphi}(\xi).$$

Bekanntlich lassen sich aber alle symmetrischen Functionen der $c_\alpha$ ganz und rational durch die elementaren symmetrischen Functionen, d. i. hier durch $C_\nu:C_0$ ausdrücken, und in Folge davon kann man $F(c_\alpha)$ als ganze Function der $C_\nu$, d. i. mithin auch als ganze Function der $a_\lambda$, dividirt durch eine Potenz von $C_0$ darstellen:

$$F(c_\alpha)=C_0^{-g}F_1(a_\lambda).$$

Dasselbe muss auch mit $\Delta_0^2$ der Fall sein:

$$\Delta_0^2=C_0^{-k}D(a_\lambda).$$

Bezüglich dieser Function $D(a_\lambda)$ behaupte ich nun, sie enthält keinen von $\xi$ unabhängigen Factor. Denn existirte ein solcher, so würde derselbe gleich Null gesetzt, eine Beziehung zwischen den $a_\lambda$ darstellen,

der Art, dass $\overline{\varphi} = 0$ zwei gleiche Wurzeln hätte, sobald dieser Beziehung genügt wäre, unabhängig davon, welchen Werth $\xi$ hat. Aber eine solche Beziehung existirt nicht, denn die Bedingung, unter welcher bei $\xi = a_0$ zwei Wurzeln von $\overline{\varphi} = 0$ einander gleich sind, ist eine ganz andere als diejenige, bei der dies für $\xi = a_1$ der Fall ist; die erstere besteht, wie aus (19) folgt, darin, dass zwei der Grössen $a_0, a_2, \ldots a_{2\varrho}$ einander gleich sind, die andere darin, dass zwei der $a_1, a_3, \ldots a_{2\varrho+1}$ denselben Werth haben. Folglich kann $D(a_\lambda)$ keinen von $\xi$ unabhängigen Factor enthalten. —

Die Gleichung (18) hat jetzt nach diesen Umformungen, wenn man die eventuell im Zähler vorkommende Potenz von $C_0$ mit $F_1(a_\lambda)$ unter Bezeichnung $F_2(a_\lambda)$ zusammenfasst, die Gestalt angenommen:

$$\sum_\beta \left[ \frac{\partial^{h_1+h_2+\cdots+h_\varrho+1} \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_1^{h_1} \partial u_2^{h_2} \cdots \partial u_\varrho^{h_\varrho} \partial u_\beta} \right]_{u_\alpha=0} \xi^{\beta-1} = \frac{F_2(a_\lambda)}{C_0^s \overline{\varphi}^p(\xi) \psi^r(\xi) D^q(a_\lambda)},$$

in der die rechte Seite als Quotient zweier, in $\xi$ und den $a_\lambda$ ganzer Functionen erscheint. Nun ist aber die linke Seite eine ganze Function von $\xi$, folglich müssen auf der rechten Seite alle $\xi$ enthaltenden Factoren des Nenners, d. i., da daselbst keine von $\xi$ unabhängigen Factoren vorkommen, die *sämmtlichen* Factoren des Nenners in den Zähler theilbar sein. Da Nenner und Zähler ganze Functionen der $a_\lambda$ sind, so ist dies nach bekannten Sätzen auch mit dem Quotienten der Fall. Demgemäss ist

$$\sum_\beta \left[ \frac{\partial^{h_1+h_2+\cdots+h_\varrho+1} \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_1^{h_1} \partial u_2^{h_2} \cdots \partial u_\varrho^{h_\varrho} \partial u_\beta} \right]_{u_\alpha=0} \xi^{\beta-1}$$

eine ganze Function der $a_\lambda$, und da $\xi$ beliebig ist, müssen es auch die einzelnen Ableitungen von $\lg \Theta(u_\alpha)$ selbst sein. Daraus schliesst man, dass in der Reihenentwicklung von

$$\lg \frac{\Theta(u_\alpha)}{\Theta(0)}$$

nach Potenzen der $u_\alpha$ die Coefficienten ebenfalls ganze Functionen der $a_\lambda$ sind. Aus dieser Thatsache folgt dann weiter, da

$$\frac{\Theta(u_\alpha)}{\Theta(0)} = e^{\lg \frac{\Theta(u_\alpha)}{\Theta(0)}} = 1 + \left(\lg \frac{\Theta(u_\alpha)}{\Theta(0)}\right) + \frac{1}{2}\left(\lg \frac{\Theta(u_\alpha)}{\Theta(0)}\right)^2 + \cdots,$$

dass *auch in der Reihenentwicklung der durch die Gleichungen* (A) *und* (B) *oder durch die Gleichungen* (C), (D) *und* (E) *definirten Thetafunction,* $\Theta(u_\alpha)$, *nach Potenzen der* $u_\alpha$ *sämmtliche Coefficienten, abgesehen von dem allen gemeinsamen Factor* $\Theta(0)$, *ganze Functionen der Verzweigungspunkte* $a_\lambda$ *sind.* Damit wäre der Beweis für diese Theta-

function erbracht. — Man erkennt aber weiter noch, dass diese Coefficienten je symmetrisch sind einerseits in den $a_0, a_2, \ldots a_{2\varrho}$, anderseits in den $a_1, a_3, \ldots a_{2\varrho+1}$. Denn dies ist mit den $c_\alpha$, mit $C_0$ und mit $\psi(\xi)$ der Fall, und durch diese Grössen allein sind die Ableitungen von $\lg \Theta(u_\alpha)$ ausgedrückt worden.

*Was nun für diese Thetafunction, $\Theta(u_\alpha)$, bewiesen wurde, gilt auch für alle die $\frac{1}{2}\binom{2\varrho+2}{\varrho+1} - 1$ anderen Thetafunctionen, welche durch Vertauschung der $a_\lambda$,* d. i. *also durch lineare Transformation der Thetafunctionen aus dieser hervorgehen*, denn die ganze seitherige Entwicklung dieses Paragraphen bleibt dann mit der einzigen Veränderung bestehen, dass in der Gleichung (E) die betreffende Vertauschung der $a_\lambda$ gemacht werden muss.

Insbesondere ist dies auch bei derjenigen Thetafunction, $\Theta(u_\alpha)_\mathrm{I}$, der Fall, welche aus $\Theta(u_\alpha)$ durch die Vermehrung der Argumente $u_\alpha$ um

$$\varpi_\alpha = \int_{a_{2\varrho+1}}^{a_0} x^{\alpha-1}\frac{dx}{2y} - \int_{a_{2\varrho-1}}^{a_2} x^{\alpha-1}\frac{dx}{2y}$$

hervorgeht; dieselbe ist symmetrisch in $a_0, a_2, a_1, a_3, a_5, \ldots a_{2\varrho-3}$, bez. $a_4, a_6, a_8, \ldots a_{2\varrho}, a_{2\varrho-1}, a_{2\varrho+1}$. Substituirt man nämlich

$$u_\alpha + \varpi_\alpha = \tilde{u}_\alpha$$

in die Gleichungen (A) und (B) und macht hierauf die nothwendigen Umänderungen, so erhält man wiederum das System (C), (D) und (E), nur dass in dem letzteren Ausdruck $a_0$ und $a_2$ an Stelle von $a_{2\varrho-1}$ und $a_{2\varrho+1}$, und umgekehrt, stehen. —

Die Reihenentwicklung der übrigen Thetafunctionen, die nicht symmetrisch in je $\varrho+1$ der Verzweigungspunkte sind, führt man mittelst der Formel (F) auf diese Thetafunctionen zurück. Denn schreibe ich in derselben an Stelle der Ableitungen des Logarithmus die Ableitungen der Thetafunction selbst, indem ich zugleich, um eine bestimmte Thetafunction im Auge zu haben, $\mu = 2\varrho+1$ setze:

$$(20)\quad (a_{2\varrho-1} - a_{2\varrho+1})\sum_{\beta\gamma}\left(\Theta(u_\alpha)\frac{\partial^2\Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta\,\partial u_\gamma} - \frac{\partial\Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta}\cdot\frac{\partial\Theta(u_\alpha)}{\partial u_\gamma}\right) a_{2\varrho-1}^{\beta-1} a_{2\varrho+1}^{\gamma-1}$$
$$+ 2\,\frac{f(a_{2\varrho-1}\,|\,a_{2\varrho+1})}{a_{2\varrho-1} - a_{2\varrho+1}}\,\Theta^2(u_\alpha) = \varepsilon\sqrt{f'(a_{2\varrho-1})f'(a_{2\varrho+1})}\;\Theta^2(u_\alpha)_{2\varrho-1},$$

so erkennt man aus der entstehenden Gleichung, da $\frac{f(a_{2\varrho-1}\,|\,a_{2\varrho+1})}{a_{2\varrho-1} - a_{2\varrho+1}}$ eine ganze Function der $a_\lambda$ (denn $f(x\,|\,a_{2\varrho+1})$ verschwindet für $x = a_{2\varrho+1}$ und ist demnach durch $x - a_{2\varrho+1}$ theilbar,) ist, dass die Coefficienten der Reihenentwicklung von $\Theta^2(u_\alpha)_{2\varrho-1}$, und dem zu Folge auch diejenige von $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$ selbst, abgesehen von einem allen gemeinschaftlichen Factor, *eine ganze Function der Verzweigungspunkte $a_\lambda$* ist.

Diese Thetafunction $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$, die nebenbei bemerkt eine ungerade Thetafunction ist, wird dadurch charakterisirt, dass sie symmetrisch ist einerseits in

$$a_1,\ a_3,\ a_5,\ \ldots\ a_{2\varrho-3}$$

und anderseits in

$$a_0,\ a_2,\ a_4,\ \ldots\ a_{2\varrho},\ a_{2\varrho-1},\ a_{2\varrho+1}. \tag{21}$$

Das erstere erkennt man unmittelbar aus der Gleichung (20), während man im übrigen aus derselben nur sieht, dass diese Thetafunction symmetrisch in

$$a_0,\ a_2,\ a_4,\ \ldots\ a_{2\varrho}$$

ist. Nun geht aber auf Grund der Gleichung (G) die Thetafunction $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$ aus $\Theta(u_\alpha)$ hervor, indem man in letzterer die Argumente $u_\alpha$ um

$$\int_{a_{2\varrho+1}}^{a_{2\varrho-1}} x^{\alpha-1}\,\frac{dx}{2y}$$

vermehrt; wenn ich nun diese Grösse

$$\int_{a_{2\varrho+1}}^{a_{2\varrho-1}} x^{\alpha-1}\,\frac{dx}{2y} = \int_{a_{2\varrho+1}}^{a_0} x^{\alpha-1}\,\frac{dx}{2y} - \int_{a_{2\varrho-1}}^{a_2} x^{\alpha-1}\,\frac{dx}{2y} + \int_{a_0}^{a_1} x^{\alpha-1}\,\frac{dx}{2y}$$

$$= \varpi_\alpha + \int_{a_0}^{a_2} x^{\alpha-1}\,\frac{dx}{2y}$$

schreibe und beachte, dass sich $\Theta(u_\alpha)$ durch Vermehrung der Argumente $u_\alpha$ um $\varpi_\alpha$ in $\Theta(u_\alpha)_{\mathrm{I}}$ verwandelt, so muss ich schliessen, dass $\Theta(u_\alpha)_{\mathrm{I}}$ in $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$ übergeht, wenn ich die $u_\alpha$ um

$$\int_{a_0}^{a_2} x^{\alpha-1}\,\frac{dx}{2y}$$

vermehre. Aus diesem Umstand geht hervor, dass zwischen $\Theta(u_\alpha)_{\mathrm{I}}$ und $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$ eine der Gleichung (20) analoge Gleichung besteht, in der nur $a_{2\varrho-1}$, $a_{2\varrho+1}$ und $\Theta(u_\alpha)$ durch $a_0$, $a_2$ und $\Theta(u_\alpha)_{\mathrm{I}}$ ersetzt sind. Da nun, wie schon oben hervorgehoben, $\Theta(u_\alpha)_{\mathrm{I}}$ symmetrisch in

$$a_4,\ a_6,\ a_8,\ \ldots\ a_{2\varrho},\ a_{2\varrho-1},\ a_{2\varrho+1}$$

ist, so folgt aus dieser Gleichung, dass $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$ ebenfalls in diesen Grössen symmetrisch sein muss. Und bringt man diese Thatsache damit in Zusammenhang, dass, wie eben angeführt $\Theta(u)_{2\varrho-1}$ auch symmetrisch in $a_0,\ a_2,\ a_4,\ \ldots\ a_{2\varrho}$ ist, so erkennt man, dass diese Thetafunction thatsächlich in den Grössen (21) symmetrisch sein muss, wie behauptet worden ist.

Vertauscht man nun die $a_\lambda$, so entstehen aus $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$ noch $\binom{2\varrho+2}{\varrho-1} - 1$ weitere Thetafunctionen, und von dieser ganzen Gruppe von Thetafunctionen ist somit *auch* bewiesen, dass die Coefficienten ihrer Reihenentwicklung, abgesehen von einem constanten Factor, *ganze Functionen der Verzweigungspunkte $a_\lambda$ sind.* —

So fährt man weiter fort: Indem man, wenn $\varrho > 2$, in der Gleichung (20) die Argumente $u_\alpha$ um

$$\int_{a_{2\varrho-3}}^{a_{2\varrho-5}} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y}$$

vermehrt und die Formel (G) benutzt, tritt auf der linken Seite eine Thetafunction dieser letzteren Gruppe auf, und in der eben ausgeführten Weise schliesst man, dass die rechtsstehende Thetafunction bei ihrer Reihenentwicklung, abgesehen von einem constanten Factor, eine ganze Function der $a_\lambda$ ist, und dass sie ungeändert bleibt bei den Vertauschungen von

$$a_1, a_3, a_5, \ldots a_{2\varrho-7},$$

bez. von

$$a_0, a_2, a_4, \ldots a_{2\varrho}, a_{2\varrho-5}, a_{2\varrho-3}, a_{2\varrho-1}, a_{2\varrho+1}. —$$

Und indem man so fortfährt, kommt man dazu den Beweis für alle Thetafunctionen zu liefern.

Halle a/S., November 1887.

# Die irreducibeln Syzyganten zweier simultanen cubischen Formen.

Von

Frhr. v. GALL in Oppenheim.

## § 1.

### Die Grundformen zweier cubischen binären Formen $a_x^3$ und $\alpha_x^3$.

Das volle System zweier cubischen Formen besteht aus folgenden Grundformen

1) $A = (\Delta\Delta)^2$; $B = (\nabla\nabla)^2$; $C = (\Delta\nabla)^2$; $D = (\Delta\Theta)^2$; $E = (\nabla\Theta)^2$;
(400) (040) (220) (310) (130)

$J = (f\varphi)^3$; $\omega = \frac{(p\pi)}{2}$;
(110) (330)

2) $p = (\alpha\Delta)^2$; $\pi = (a\nabla)^2$; $s = (\Delta p)$; $t = (\Delta\pi)$; $\sigma = (\nabla p)$;
(211) (121) (411) (321) (231)

$\tau = (\nabla\pi)$;
(141)

3) $\Delta = (ab)^2$; $\nabla = (\alpha\beta)^2$; $\Theta = (a\alpha)^2$; $\lambda = (ap)$; $\mu = (\alpha\pi)$;
(202) (022) (112) (312) (132)

$\nu = (a\pi) = -(\alpha p) = -(\Delta\nabla)$;
(222)

4) $f = a_x^3$; $\varphi = \alpha_x^3$; $Q = (a\Delta)$; $K = (\alpha\nabla)$; $\xi = (a\nabla)$; $\zeta = (\alpha\Delta)$;
(103) (013) (303) (033) (123) (213)

5) $\vartheta = (a\alpha)$.
(114)

Hierbei bezeichnen wir mit $(ikl)$ eine Form $l^{ter}$ Ordnung und vom Grade $i$, $k$ von $f$ und $\varphi$. Zwischen diesen 26 Formen bestehen im allgemeinen unendlich viele Beziehungen. Die meisten von diesen werden aber *zusammengesetzt* sein. Wir verstehen unter „Zusammen-

gesetzter Syzygante" eine solche, die entweder eine „einfach theilbare Grundsyzygante", d. h. eine durch eine Potenz oder ein Product der Grundformen theilbare ist — oder als eine lineare Function einfach theilbarer Syzyganten erscheint. (Vergl. in Bezug auf diese Definition die Abhandlung Hammonds über die Syzygies of the Binary Sextic: American Journal. Vol. VII, pag. 2). Bis jetzt sind die einfachen oder *Grundsyzyganten* der binären Formen $a_x^5$ und $a_x^6$, sowie des simultanen Systems $(a_x^3, a_x^2)$ und zwar von Herrn Hammond im American Journal untersucht; und es hat sich herausgestellt, dass keine Grundsyzygante bei diesen gefunden wurde, die nicht eine binäre Combination der Grundformen unter ihren Gliedern enthält. Alle von Herrn Cayley früher für Grundsyzyganten gehaltenen Relationen, die solche Terme nicht enthalten, sind nun als zusammengesetzt erwiesen worden. Während aber zweifellos alle Syzyganten mit einem Gliede $G_i G_k$ Grundsyzyganten sind, so kann man umgekehrt doch mit Herrn Hammond (Siehe dessen Abh. On Perpetuants. Vol. VIII des Am. Jour. pag. 126) den Satz:

„Every irreducible syzygy must contain among its terms at least one binary combination of the groundforms."

als wahr, wenn auch noch nicht erwiesen ansehen.

Nachfolgend wurden alle Relationen zwischen den 26 Grundformen aufgestellt, die durch *eine* solche binäre Combination zweier Grundformen bestimmt und charakterisirt sind. Die $\frac{26 \cdot 27}{1 \cdot 2}$ möglichen binären Combinationen derselben entsprechen ungefähr zur Hälfte wirklich einer irreduciblen Syzygante. Zu den übrigen Combinationen gelang es mir nicht eine zugehörige Syzygante zu finden. Die allgemeine Gültigkeit des oben genannten Satzes vorausgesetzt, wäre daher hiermit das System der Grundsyzyganten abgeschlossen.

Ich will nicht versäumen, zum Schlusse zu bemerken, dass es nach Sylvester und Hammond auch mehrfach zusammengetzte Syzyganten giebt. Nennen wir die oben definirten, zusammengesetzte Syzyganten 2. *Grades*, so sind z. B. *zusammengesetzte Syzyganten* 3. *Grades* lineare Functionen der einfach theilbaren Syzyganten 2. Grades u. s. w.

## § 2.

### Gegenbilder und der $\delta$ und $\partial$ Process.

Vertauschen wir $f$ mit $\varphi$, so gehen je 2 der 26 Grundformen in einander über und zwar:

in

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} A & C & D & J & \omega & p & s & t & \Delta & \Theta & \lambda & \nu \\ B & C & E & -J & -\omega & \pi & \tau & \sigma & \nabla & \Theta & \mu & -\nu \end{array}\right\}$$

in $\left.\begin{matrix} f & Q & \xi & \vartheta \\ \varphi & K & \zeta & -\vartheta \end{matrix}\right\}$.

Grosse Dienste leisten bei der Untersuchung dieses simultanen Systems die beiden Processe:

$$\partial\Psi = \sum a_i \frac{\partial\Psi}{\partial a_i} \quad \text{und} \quad \delta\Psi = \sum \alpha_i \frac{\partial\Psi}{\partial a_i}$$

zur Bildung neuer Relationen. Leicht findet man die Gleichungen

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\partial f = 0,$ | $\partial K = 3\xi - J\varphi,$ | $\partial A = 0,$ | $\partial p = 0,$ |
| $\partial\varphi = f,$ | $\partial Q = 0,$ | $\partial B = 4E,$ | $\partial\pi = -p,$ |
| $\partial\Delta = 0,$ | $\partial\xi = Q,$ | $\partial C = 2D,$ | $\partial\tau = -J\pi - 3\sigma,$ |
| $\partial\nabla = 2\Theta,$ | $\partial\xi = 2\zeta + Jf,$ | $\partial E = 3C - J^2,$ | $\partial\sigma = +Jp - 2t,$ |
| $\partial\mu = 2\nu,$ | $\partial\vartheta = 0,$ | $\partial D = A,$ | $\partial t = -s,$ |
| $\partial\lambda = 0,$ | | $\partial J = 0,$ | $\partial s = 0$ |
| $\partial\nu = -\lambda,$ | | $\partial\omega = 0,$ | |
| $\partial\Theta = \Delta,$ | | $\partial G = 2D,$ | |

und entsprechende Formeln für $\delta G$ z. B. $\delta s = Jp - 3t$ u. s. w.

## § 3.

### Relationen und Reductionen von Ueberschiebungen.

Lassen wir jede Beziehung aus, wenn sie einfach durch Vertauschung von $f$ mit $\varphi$ in eine der folgenden übergeht, so genügen zur Aufstellung der Syzyganten unseres simultanen Systems die unten gegebenen Identitäten:

A) $p^2 = A\nabla - 2D\Theta + (C - J^2)\Delta + J\lambda,$

$-p\pi = D\nabla - 2\Theta C + E\Delta - J\nu,$

$(f\Theta)^2 = -\frac{1}{2}p;\ (\vartheta p) = \frac{1}{2}(\Delta\pi + \Theta p),$

$(fp^2)^2 = A\pi + Dp + Js;\ (\varphi p^2) = -(f, p\pi)^2 = D\pi + Cp - Jt,$

$(\Theta\Theta')^2 = G = C - \frac{J^2}{2};$

B) $(sp) = 2U_{33};\ (tp) = U_{23};\ (\sigma p) = \frac{1}{2}U_{22};\ (\tau p) = U_{12},$

$(st) = A\omega;\ (s\sigma) = -2\omega D - JU_{23};\ (s\tau) = 3\omega C - \frac{1}{2}JU_{22},$

$(t\sigma) = \omega C - \frac{1}{2}JU_{22};$

C) $(p\Delta) = -s$; $(p\nabla) = -\sigma$; $(s\Delta) = \frac{1}{2}Ap$; $(s\nabla) = D\pi + \frac{3}{2}Cp - Jt$;

$(t\Delta) = \frac{1}{2}A\pi$; $(t\nabla) = -Ep - \frac{1}{2}C\pi - J\sigma$; $(\Theta p) = \frac{1}{2}Jp - t$;

$(s\Theta) = \frac{1}{2}(A\pi + 2Dp + Js)$; $(t\Theta) = \frac{1}{2}(-Cp + Jt)$;

D) $(\Theta\Delta) = -\frac{1}{2}\lambda$; $(\lambda\Delta) = A\Theta - D\Delta$; $(\lambda\nabla) = C\Theta - E\Delta$;
$(\lambda\Theta) = D\Theta - G\Delta$,

$(\Theta\Delta)^2 = D$; $(\lambda\Delta)^2 = \mathfrak{0}$; $(\lambda\nabla)^2 = -2\omega$; $(\lambda\Theta)^2 = \mathfrak{0}$;

$(\nu\Delta) = \frac{1}{2}(C\Delta - A\nabla)$; $(\nu\Theta) = \frac{1}{2}(E\Delta - D\nabla)$;

$(\nu\Delta)^2 = \mathfrak{0}$; $(\nu\Theta)^2 = -\omega$;

E) $(f\Delta)_1 = Q$; $(f\nabla)_1 = \xi$; $(f\Theta)_1 = \zeta + \frac{1}{2}Jf$; $(fQ)_1 = -\frac{1}{2}\Delta^2$;
$(fk)_1 = \frac{1}{2}(\varphi\pi - \nabla\Theta)$;

$(f\Delta)_2 = \mathfrak{0}$; $(f\nabla)_2 = \pi$; $(f\Theta)_2 = -\frac{1}{2}p$; $(fQ)_2 = \mathfrak{0}$;
$(fk)_2 = -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}J\nabla$;

$(fQ)_3 = A$; $(fk)_3 = E$;

$(q\Delta)_1 = -\frac{1}{2}Af$; $(q\nabla)_1 = \frac{1}{2}\Delta\pi - \frac{1}{2}Cf$; $(q\Theta)_1 = -\frac{1}{4}p\Delta - \frac{1}{2}Df$;

$(q\Delta)_2 = \mathfrak{0}$; $(q\nabla)_2 = -t$; $(q\Theta)_2 = \frac{1}{2}s$;

$(\xi\Delta)_1 = \frac{1}{6}\pi\Delta - \frac{1}{2}Cf$; $(\xi\nabla)_1 = \frac{2}{3}\pi\nabla - \frac{1}{2}Bf$;

$(\xi\Delta)_2 = \frac{2}{3}t$; $(\xi\nabla)_2 = -\frac{1}{3}\tau$;

$(\xi\Theta)_1 = \frac{1}{6}\pi\Theta - \frac{1}{4}p\nabla - \frac{1}{2}Ef$;

$(\xi\Theta)_2 = -\frac{1}{6}\sigma - \frac{1}{3}J\pi$;

F) $(ap) = \lambda$: $(Qp) = A\Theta - D\Delta$; $(\xi p) = C\Theta - E\Delta - \frac{1}{3}p\pi$;

$(\alpha p) = -\nu$; $(kp) = \frac{1}{2}(C\nabla - B\Delta)$; $(\xi p) = \frac{1}{2}[A\nabla - C\Delta] - \frac{1}{3}p^2$.

Ferner verstehen wir nachfolgend stets unter $[(ab)c] = 0$ die bekannte Identität

$$(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x = 0.$$

## § 4.

## Aufstellung der Syzyganten.

### I. Syzyganten $(ik0)$.

(660): $$2\omega^2 - \begin{vmatrix} A & D & C \\ D & G & E \\ C & E & B \end{vmatrix} = 0.$$

Die Unterdeterminanten der vorstehenden dreigliedrigen Determinante bezeichnen wir mit $U_{ik}$; dann ist

(440): $$4\omega \,.\, J - U_{22} - 4U_{13} = 0.$$

### II. Syzyganten $(ik1)$.

Aus der Identität

$$((\Delta\nabla)\tau_x)\cdot(\Delta\nabla) = 0$$

oder

$$C\tau + [(\tau\nabla)\Delta] + [(\tau\Delta)\nabla] = 0$$

erhält man mit Benutzung der Ausdrücke von $(\tau\Delta)$ und $(\tau\nabla)$

(361) $$C\tau + Bt + 2E\sigma - JBp = 0;$$

durch Vertauschung von $a$ und $\alpha$ liefert diese:

(631) $$Cs + A\sigma + 2Dt + JA\pi = 0.$$

Aus

$$[(\Delta\nabla)\sigma]\cdot(\Delta\nabla) = 0$$

findet man

$$C\sigma + (\sigma\nabla)\Delta + (\sigma\Delta)\nabla = 0;$$

mit Berücksichtigung der obigen Relationen

$(451)_1$: $$\sigma\left[\tfrac{3}{2}C - J^2\right] - \tfrac{1}{2}Bs + D\tau - J\left(Ep + \tfrac{1}{2}C\pi\right) = 0$$

und

$(541)_1$: $$t\left[\tfrac{3}{2}C - J^2\right] - \tfrac{1}{2}A\tau + Es + J\left(D\pi + \tfrac{1}{2}Cp\right) = 0.$$

Aus der Identität $\begin{pmatrix} \pi & \pi & p \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat man $(\pi^2, p) = -2\omega\pi$. Schiebt man daher $\pi^2$ über $p$ und bedenkt, dass $(\mu, p) = (\varphi, p\pi)$ ist, so findet man:

$(451)_2$: $$2\omega\pi + Bs + 2Et + C\sigma + JC\pi = 0$$

und

$(541)_2$: $$-2\omega p + A\tau + 2D\sigma + Ct - JCp = 0.$$

$$[(p\pi)\tau] = 0$$

giebt sofort:

(471): $$\omega\tau + p(\pi\tau) + \pi(\tau p) = 0$$

und

(741): $$-\omega s + \pi(ps) + p(s\pi) = 0.$$

Aus $[(p\pi)\sigma] = 0$ erhält man

(561): $$2\omega\sigma + p(\pi\sigma) + \pi(\sigma p) = 0$$

und

(651): $$2\omega t + p(t\pi) + \pi(pt) = 0.$$

## III. Syzyganten $(ik2)$.

(242): $$\pi^2 - [B\Delta - 2E\Theta + (C - J^2)\nabla - J\mu] = 0,$$

(422): $$p^2 - [A\nabla - 2D\Theta + (C - J^2)\Delta + J\lambda] = 0.$$

Aus $(\pi^2, \nabla)_1 = -\tau \cdot \pi$ erhält man sofort:

(262): $$\tau \cdot \pi - Bv + E\mu - J(B\Theta - E\nabla) = 0$$

und

(622): $$sp + Av + D\lambda + J(A\Theta - D\Delta) = 0.$$

Die Identität:

$$[(\nabla\pi)\tau] = 0$$

liefert

(282): $$\tau^2 + \nabla(\pi\tau) + \pi(\tau\nabla) = 0$$

und

(822): $$s^2 + \Delta(ps) + p(s\Delta) = 0.$$

(332): $$p\pi + D\nabla - 2C\Theta + E\Delta - Jv = 0$$

Aus $[(p\pi)\nabla] = 0$ findet man:

$(352)_1$: $$2\omega\nabla - p\tau + \pi\sigma = 0$$

und

$(532)_1$: $$-2\omega\Delta - \pi s + pt = 0.$$

Die Identität

$$[(\Delta\nabla)\mu] \cdot (\Delta\nabla) = 0$$

giebt

$$C\mu + (\mu\nabla)(\nabla\Delta)\Delta_x + (\mu\Delta)(\Delta\nabla)\nabla_x = 0.$$

Aus den Polarenbildungen $(\mu\nabla)\mu_x\nabla_y$ und $(\mu\Delta)\mu_x\Delta_y$ findet man für die beiden letzten Summanden leicht die bezüglichen Werthe:

$$-\left(\tfrac{1}{2}B\lambda + Ev\right) \quad \text{und} \quad -\left(\tfrac{1}{2}C\mu + \omega\nabla\right)$$

und die Syzygante

$(352)_2$: $$C\mu - B\lambda - 2\omega\nabla - 2Ev = 0$$

und

$(532)_2$: $$C\lambda - A\mu + 2\omega\Delta + 2Dv = 0.$$

Aus $[(\Delta p)t] = 0$ hat man:

(372): $$\sigma\tau + (\pi\sigma)\cdot\nabla + \tfrac{1}{2}Bp = 0$$

und

(732): $$st + (pt)\cdot\Delta + \tfrac{1}{2}A\pi = 0.$$

Da $(\pi^2, \Delta)^1 = -t\pi$ ist, so hat man:

$(442)_1$: $$t\pi + E\lambda + \nu(C - J^2) - J(C\Theta - D\nabla) = 0$$

und

$(442)_2$: $$\sigma p + D\mu - \nu(C - J^2) + J(C\Theta - E\Delta) = 0.$$

Aus $[(p\pi)\Theta] = 0$ findet man

$(442)_3$: $$2\omega\Theta + Jp\pi + p\sigma - t\pi = 0.$$

Aus $[(\nabla p)\pi] = 0$ hat man:

$(462)_1$: $$\sigma^2 + \nabla\cdot(p\sigma) + \tfrac{1}{2}Bp^2 = 0$$

und

$(642)_1$: $$t^2 + \Delta\cdot(\pi t) + \tfrac{1}{2}A\pi^2 = 0.$$

Berücksichtigt man, dass $(\mu\pi) = (\alpha, \pi^2)$ und $(\mu p) = (\alpha, p\pi)$ ist, so giebt $[(p\pi)\mu] = 0$:

$(462)_2$: $$2\omega\mu - Bp^2 - C\pi^2 - 2Ep\pi + J(p\tau - \pi\sigma) = 0$$

und

$(642)_2$: $$-2\omega\lambda - A\pi^2 - Cp^2 - 2Dp\pi - J(\pi s - pt) = 0.$$

Aus $[(\Delta\pi)\tau] = 0$ findet man:

$(462)_3$: $$t\tau + \Delta(\pi\tau) + \pi\left(Ep + \tfrac{3}{2}C\pi + J\sigma\right) = 0$$

und

$(642)_3$: $$s\sigma + \nabla(ps) + p\left(D\pi + \tfrac{3}{2}Cp - Jt\right) = 0.$$

Man erhält weiter aus $[(\nabla p)t] = 0$

$(552)_1$: $$t\sigma + \nabla\cdot(pt) + \tfrac{1}{2}A\pi^2 = 0$$

und

$(552)_2$: $$s\tau + \Delta(\pi\sigma) + \tfrac{1}{2}Bp^2 = 0.$$

$[(p\pi)\nu] = 0$ giebt aber

$(552)_3$: $$2\omega\nu - Ep^2 - 2Cp\pi - D\pi^2 - J(ps - t\pi) = 0.$$

## IV. Syzyganten ($ik3$).

Die Polarenentwickelungen $(\alpha\Theta)\alpha_x^2\Theta_y$ und $(\alpha\nabla)\alpha_x^2\nabla_y$ geben mit Hilfe der Gleichungen des § 3 durch die Identität:

$$[(\nabla\Theta)\alpha]\cdot(\nabla\Theta) = 0$$

die Syzyganten

(143): $E\varphi + \frac{3}{2}\pi\nabla - Bf - JK = 0$

und

(413): $Df + \frac{3}{2}p\Delta - A\varphi + JQ = 0.$

Aus $[(\nabla\Theta)K]\cdot(\nabla\Theta) = 0$ erhält man:

$$E\,.\,K + (\Theta K)(\nabla\Theta)\nabla_x K_x^2 + (K\nabla)(\nabla\Theta)K_x^2\Theta_x = 0.$$

Für die beiden letzten Glieder liefern die Reihenentwickelungen $(K\Theta)K_x^2\Theta_y$ und $(K\nabla)K_x^2\nabla_y$, mittelst der Relation

$$(\pi\nabla, \nabla) = -\frac{1}{3}\tau\nabla,$$

die Werthe:

$$-\frac{1}{4}\tau\nabla - \frac{1}{2}EK \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}B\left(\xi - \frac{1}{2}J\varphi\right).$$

Man hat daher

(163): $EK - B\xi - \frac{1}{2}\tau\nabla + \frac{1}{2}BJ\varphi = 0$

und

(613): $DQ - A\xi - \frac{1}{2}s\Delta - \frac{1}{2}AJf = 0.$

Ersetzt man in der Identität $[(\nabla\Theta)a]\cdot(\nabla\Theta) = 0$ die Ausdrücke $(f\Theta)(\Theta\nabla)f_x^2\nabla_x$ und $(f\nabla)(\nabla\Theta)f_x^2\Theta_x$ durch die Werthe

$$\frac{1}{2}p\nabla - \frac{1}{2}C\varphi + \frac{1}{2}J\xi \quad \text{resp.:} \quad -\frac{1}{2}\pi\Theta - \frac{1}{4}p\nabla - \frac{1}{2}Ef$$

so findet man:

(233): $Ef + \frac{1}{2}p\nabla - C\,.\,\varphi + J\,.\,\xi - \pi\Theta = 0,$

was sich auch durch den $\partial$ Process aus (143) ergiebt, und

(323): $D\varphi + \frac{1}{2}\pi\Delta - C\,.\,f - J\,.\,\zeta - p\Theta = 0.$

Durch den $\partial$ Process erhält man weiter aus (163)

$$\begin{cases} (253)_1': & -E\xi + EJ\alpha - 2B\zeta + (3C - J^2)K - \frac{1}{2}BJf \\ & + \frac{1}{2}\nabla(J\pi + 3\sigma) - \tau\Theta = 0, \\ (523)_1': & = -D\zeta - DJf - 2A\xi + (3C - J^2)Q + \frac{1}{2}AJ\varphi \\ & + \frac{1}{2}\Delta(-Jp + 3t) - s\Theta = 0. \end{cases}$$

Aus $[(\nabla\pi)\Theta] = 0$ findet man:

$(253)_2$: $\tau\Theta + \nabla\left(\frac{1}{2}J\pi + \sigma\right) - \frac{1}{2}\pi\mu = 0$

und

$(523)_2$: $s\Theta + \Delta\left(-\frac{1}{2}Jp + t\right) - \frac{1}{2}p\lambda = 0.$

Es giebt weiter $((\Delta\nabla)K)\cdot(\Delta\nabla)=0$ mit Hilfe der Polarenentwickelungen: $(K\Delta)K^2\Delta_y$ und $(K\nabla)K_x^2\nabla_y$:

$(253)_3$: $$CK - B\xi + \sigma\nabla = 0,$$

(523): $$CQ - A\xi + t\Delta = 0.$$

Zählt man aber von $(253)_1'$ die Syzyganten $[(143).\ J]$ ab und addirt zu dem Reste $-3$ mal $(253)_3$, so erhält man $(253)_1$ in der einfacheren Form

$(253)_1$: $$-E\xi + B\xi - \tau\Theta - J\pi\nabla - \tfrac{3}{2}\sigma\nabla + \tfrac{1}{2}BJf = 0,$$

$(523)_1$: $$-D\xi + A\xi - s\Theta + Jp\Delta - \tfrac{3}{2}t\Delta - \tfrac{1}{2}AJ\varphi = 0.$$

Die Identität

$$[(\Theta\nabla)\tau] = 0$$

führt uns auf:

(273): $$\mu\tau + B\Theta\pi - \nabla(Bp + 2E\pi - J\tau) = 0$$

und

(723): $$\lambda s + A\Theta p - \Delta(A\pi + 2Dp + Js) = 0.$$

$[(\nabla\pi)\Delta] = 0$ giebt:

$(343)_1$: $$\nu\pi - \tau\Delta + t\nabla = 0,$$

$(433)_1$: $$-\nu p - s\nabla + \sigma\Delta = 0$$

und $[(\Theta\nabla)p] = 0$:

$(343)_2$: $$p\mu - 2\sigma\Theta + Jp\nabla + 2\nabla t = 0,$$

$(433)_2$: $$\pi\lambda - 2t\Theta - J\pi\Delta + 2\Delta\sigma = 0.$$

Eine weitere liefert $[(p\pi)\alpha] = 0$:

$(343)_3'$: $$2\omega\varphi - p\mu - \nu\pi = 0,$$

$(433)_3'$: $$-2\omega f - \pi\lambda + \nu p = 0,$$

die wir mit Hilfe der beiden vorhergehenden in die Form bringen

$(343)_3$: $$2\omega\varphi - \tau\Delta + 3\nabla t - 2\sigma\Theta + Jp\nabla = 0,$$

$(433)_3$: $$-2\omega f - s\nabla + 3\Delta\sigma - 2t\Theta - J\pi\Delta = 0.$$

Entwickeln wir $[(\Delta\nabla)\xi]\cdot(\Delta\nabla) = 0$ mit Hilfe der Polarenbildungen $(\xi\nabla)\xi_x^2\nabla_y$ und $(\xi\Delta)\xi_x^2\Delta_y$ und der Relationen:

$$(\pi\nabla,\ \Delta) = -t\nabla + \tfrac{2}{3}\tau\Delta,$$

$$(\pi\Delta,\ \nabla) = -\tau\Delta + \tfrac{2}{3}t\nabla,$$

so finden wir

$(343)_4$: $$C\xi - 2t\nabla + \tau\Delta - BQ = 0,$$

$(433)_4$: $$C\zeta - 2\sigma\Delta + s\nabla - AK = 0.$$

Wenden wir auf $(433)_4$ den $\delta$ Process an und dividiren das erhaltene Resultat durch 4, so gelangen wir zu

$$(343)_5'\colon\ DK-\tfrac{1}{2}E\xi+\tfrac{3}{4}t\nabla-\tfrac{1}{2}\tau\Delta-\tfrac{1}{4}Jp\nabla+\Theta\sigma-\tfrac{1}{2}C\xi+\tfrac{1}{4}CJ\varphi=0,$$

$$(433)_5'\colon\ EQ-\tfrac{1}{2}D\xi+\tfrac{3}{4}\sigma\Delta-\tfrac{1}{2}s\nabla+\tfrac{1}{4}J\pi\Delta+\Theta t-\tfrac{1}{2}C\zeta-\tfrac{1}{4}CJf=0.$$

Dagegen giebt der $\partial$ Process auf $[CK-B\xi+\sigma\nabla=0]$ angewandt:

$$2DK+C(3\xi-J\varphi)-4E\xi-BQ+(Jp-2t)\nabla+2\sigma\Theta=0.$$

Zählen wir hiervon $\frac{1}{2}\cdot(343)_4$ ab und dividiren den Rest durch $-4$, so finden wir endlich

$$(343)_6'\colon\ -\tfrac{1}{2}DK+E\xi+\tfrac{1}{4}\tau\Delta-\tfrac{1}{4}Jp\nabla-\tfrac{1}{2}\sigma\Theta-\tfrac{1}{2}C\xi+\tfrac{1}{4}CJ\varphi.$$

Durch Verbindung von $(343)_5'$ und der letzteren erhalten wir schliesslich:

$$(343)_5\colon\ E\xi+\tfrac{1}{2}J(C\varphi-p\nabla)+\tfrac{1}{2}t\nabla-C\xi=0$$

und

$$(343)_6\colon\ DK+\tfrac{1}{2}J(C\varphi-p\nabla)+\sigma\Theta-\tfrac{1}{2}\tau\Delta+t\nabla-C\xi=0$$

und:

$$(433)_5\colon\ D\xi-\tfrac{1}{2}J(Cf-\pi\Delta)+\tfrac{1}{2}\sigma\Delta-C\zeta=0,$$

$$(433)_6\colon\ EQ-\tfrac{1}{2}J(Cf-\pi\Delta)+t\Theta-\tfrac{1}{2}s\nabla+\sigma\Delta-C\zeta=0.$$

Aus den Identitäten:

$$[(p\pi)K]=0;\quad[(\nabla p)\mu]=0;\quad[(\nabla\Delta)\tau]=0$$

erhält man:

$$(363)_1\colon\ 2\omega K+p(E\nabla-B\Theta)+\tfrac{1}{2}\pi(C\nabla-B\Delta)=0,$$

$$(633)_1\colon\ -2\omega Q+\pi(D\Delta-A\Theta)+\tfrac{1}{2}p(C\Delta-A\nabla)=0,$$

$$(363)_2\colon\ \sigma\mu+C\pi\nabla+Bp\Theta+J\sigma\nabla=0,$$

$$(633)_2\colon\ t\lambda+Cp\Delta+A\pi\Theta-Jt\Delta=0,$$

$$(363)_3\colon\ -\nu\tau-\tfrac{1}{2}B\pi\Delta+\nabla\left(Ep+\tfrac{3}{2}C\pi+J\sigma\right)=0,$$

$$(633)_3\colon\ \nu s-\tfrac{1}{2}Ap\nabla+\Delta\left(D\pi+\tfrac{3}{2}Cp-Jt\right)=0.$$

Desgleichen geben die Identitäten:

$$[(p\pi)\xi]=0;\quad[(\Delta\nabla)\sigma]=0;\quad[(\Theta\Delta)\tau]=0;\quad[(\Theta\nabla)t]=0$$

$$(453)_1\colon\ 2\omega\xi-\tfrac{1}{2}p(B\Delta-C\nabla)+\pi(C\Theta-E\Delta)=0,$$

$$(543)_1\colon\ -2\omega\zeta-\tfrac{1}{2}\pi(A\nabla-C\Delta)+p(C\Theta-D\nabla)=0,$$

$$(453)_2: \quad \nu\sigma + \tfrac{1}{2} Bp\Delta - \nabla\left(-D\pi - \tfrac{1}{2} Cp + Jt\right) = 0,$$

$$(543)_2: \quad -\nu t + \tfrac{1}{2} A\pi\nabla - \Delta\left(-Ep - \tfrac{1}{2} C\pi - J\sigma\right) = 0,$$

$$(453)_3: \quad \lambda\tau + 2\Theta\left(Ep + \tfrac{3}{2} C\pi + J\sigma\right) - \Delta(Bp + 2E\pi - J\tau) = 0,$$

$$(543)_3: \quad \mu s + 2\Theta\left(D\pi + \tfrac{3}{2} Cp - Jt\right) - \nabla(A\pi + 2Dp + Js) = 0,$$

$$(453)_4: \quad \mu\tau + 2\Theta\left(-Ep - \tfrac{1}{2} C\pi - J\sigma\right) - \nabla(-Cp + Jt) = 0,$$

$$(543)_4: \quad \lambda s + 2\Theta\left(-D\pi - \tfrac{1}{2} Cp + Jt\right) - \Delta(-C\pi - J\sigma) = 0,$$

## V. Syzyganten ($ik4$).

$[(\nabla\pi)\alpha] = 0$ giebt:

$$(154)_1: \quad \tau\,.\,\varphi - \mu\nabla + K\pi = 0,$$

$$(514)_1, \quad s\,.\,f - \lambda\Delta + Qp = 0.$$

Schieben wir ferner (143) über $f$, so erhalten wir

$$E\vartheta + \tfrac{3}{2}\nu\nabla - \tau f - \tfrac{J}{2}(\varphi\pi - \nabla\Theta) = 0.$$

Der $\delta$ Process verwandelt diese in:

$$(154)_2': \quad 2B\vartheta + 3\mu\nabla - 2\tau\varphi + J\nabla^2 = 0$$

oder in Verbindung mit $(154)_1$,

$$(154)_2: \quad 2B\vartheta + 2K\pi + \mu\nabla + J\nabla^2 = 0,$$

$$(514)_2: \quad -2A\vartheta + 2Qp + \lambda\Delta - J\Delta^2 = 0.$$

Man hat ferner aus $[(\alpha\nabla)\tau] = 0$

$$(174): \quad K\tau - \tfrac{1}{2} B\pi\alpha + \nabla(E\nabla - B\Theta) = 0,$$

$$(714): \quad Qs - \tfrac{1}{2} Ap\alpha + \Delta(D\Delta - A\Theta) = 0.$$

Unterwirft man die Relationen $(fQ) = -\frac{1}{2}\Delta$ dem $\delta$ Process, so erhält man die absolute Identität

$$(\alpha Q) + 3(a\zeta) = -2\Delta\Theta.$$

Wenden wir hierauf nochmals den $\delta$ Process an und berücksichtigen die leicht zu erweisenden Beziehungen

$$(\xi\alpha) = -\tfrac{1}{3}\alpha p + \tfrac{1}{2}\Delta\nabla,$$

$$(\xi a) = -\tfrac{1}{2} a\pi + \tfrac{1}{2}\Delta\nabla,$$

so ergiebt sich die Syzygante

(224): $\quad 2J\vartheta - 2\Theta^2 + 2\Delta\nabla - \alpha p - a\pi = 0.$

Der $\partial$ Process verwandelt weiter $(154)_2$ in:

$(244)_1'$: $\quad 2E\vartheta + \frac{3}{2}\pi\xi - \frac{1}{2}J\alpha\pi - \frac{1}{2}Kp + \frac{1}{2}\mu\Theta + \frac{1}{2}\nu\nabla + J\nabla\Theta = 0.$

Entsprechend ist:

$(424)_1'$: $\quad -2D\vartheta + \frac{3}{2}p\zeta + \frac{1}{2}Jap - \frac{1}{2}Q\pi + \frac{1}{2}\lambda\Theta - \frac{1}{2}\nu\Delta - J\Delta\Theta = 0.$

Die Identitäten

$$[(a\nabla)\pi] = 0; \quad [(\alpha\nabla)p] = 0; \quad [(\alpha\pi)\Theta] = 0$$

geben weiter

$(244)_2$: $\quad \pi\xi + f\tau - \nu\nabla = 0,$

$(424)_2$: $\quad p\zeta + \alpha s + \nu\Delta = 0;$

$(244)_3$: $\quad Kp + \alpha\sigma + \nu\nabla = 0,$

$(424)_3$: $\quad Q\pi + at - \nu\Delta = 0;$

$(244)_4$: $\quad \mu\Theta + \alpha\sigma - \pi\xi + J\alpha\pi = 0,$

$(424)_4$: $\quad \lambda\Theta + at - p\zeta - Jap = 0.$

Eliminiren wir in $(244)_1$: $\pi\xi$, $\alpha\sigma$ und $Kp$ mit Hilfe der drei andern $(244)_3$, so erhalten wir $(244)'$ in der schon oben gefundenen einfacheren Form:

$(244)_1$: $\quad E\vartheta + \frac{3}{2}\nu\nabla - \tau f - \frac{J}{2}(\alpha\pi - \nabla\Theta) = 0,$

und

$(424)_1$: $\quad -D\vartheta - \frac{3}{2}\nu\Delta - s\alpha + \frac{J}{2}(ap - \Delta\Theta) = 0.$

Aus $[(\nabla p)K] = 0$; $[(\nabla\pi)\xi] = 0$ und $(\Theta\nabla)^1 \times (\Theta'\nabla')^1$ erhält man:

$(264)_1$: $\quad \sigma K + \frac{1}{2}\nabla(B\Delta - C\nabla) - \frac{1}{2}Bp\alpha = 0,$

$(624)_1$: $\quad tQ + \frac{1}{2}\Delta(A\nabla - C\Delta) - \frac{1}{2}A\pi f = 0;$

$(264)_2$: $\quad \tau\xi - \frac{1}{2}\nabla(B\Delta - C\nabla) - \frac{1}{2}B\pi f + \pi^2\nabla = 0,$

$(624)_2$: $\quad s\zeta - \frac{1}{2}\Delta(A\nabla + C\Delta) - \frac{1}{2}Ap\varphi + p^2\Delta = 0;$

$(264)_3$: $\quad \mu^2 + 2[G\nabla^2 - 2E\Theta\nabla + B\Theta^2] = 0,$

$(624)_3$: $\quad \lambda^2 + 2[G\Delta^2 - 2D\Theta\Delta + A\Theta^2] = 0.$

Aus den Identitäten

$$[(a\pi)\Theta] = 0 \quad \text{und} \quad [(\nabla p)f) = 0$$

findet man:

$(334)_1$: $\nu\Theta + f\sigma - \pi\xi = 0,$

$(334)_2$: $-\nu\Theta + \varphi t - p\xi = 0,$

$(334)_3$: $f\sigma - \lambda\nabla + p\xi = 0,$

$(334)_4$: $\varphi t - \mu\Delta + \pi\xi = 0.$

Aus $[(\Delta\nabla)\Theta] = 0$ oder durch $(334)_1 - (334)_2 - (334)_3 + (334)_4 = 0$ erhält man die zusammengesetzte (334):

$$\dot{\nu}\Theta - \tfrac{1}{2}\mu\Delta + \tfrac{1}{2}\lambda\nabla = 0 = \Phi.$$

Alsdann ist

$$\sum a_i \frac{\partial(244)_1}{\partial\alpha_i} + J\cdot(224) - \tfrac{1}{3}\Phi = 0$$

oder

$(334)_5$: $C\vartheta + \frac{1}{2}(\pi\xi - p\xi) + \frac{1}{4}(\mu\Delta - \lambda\nabla) + \frac{1}{2}J\Delta\nabla = 0.$

Dieselbe erhält man auch durch $[(\Delta\nabla)\vartheta] = 0$ mit Benützung der Gleichungen:

$$(\vartheta\nabla) = \tfrac{1}{2}\alpha\pi, \qquad (\vartheta\nabla)_2 = -\tfrac{1}{3}J\nabla - \tfrac{1}{2}\mu;$$

$$(\vartheta\Delta) = -\tfrac{1}{2}ap; \qquad (\vartheta\Delta)_2 = -\tfrac{1}{3}J\Delta + \tfrac{1}{2}\lambda;$$

Weil $\mu$ und $\nu$ Functionaldeterminanten sind und aus den Identitäten

$$[(\Delta\pi)K] = 0,\ [(\nabla p)\xi] = 0 \text{ und } [(\nabla\pi)\xi] = 0$$

hat man weiter

$(354)_1$: $\mu\nu + D\nabla^2 - E\Delta\nabla - C\Theta\nabla + B\Theta\Delta = 0,$

$(354)_2$: $tK - \Delta(B\Theta - E\nabla) + \frac{\pi}{2}(\nabla p - C\varphi) = 0,$

$(354)_3$: $\sigma\xi - \nabla(C\Theta - E\Delta - p\pi) - \frac{1}{2}Bpf = 0,$

$(354)_4$: $\tau\zeta - \nabla\left(C\Theta - D\nabla - \frac{1}{2}p\pi\right) - \frac{1}{2}C\varphi\pi = 0$

und

$(534)_1$: $-\lambda\nu + E\Delta^2 - D\Delta\nabla - C\Theta\Delta + A\Theta\nabla = 0,$

$(534)_2$: $\sigma Q - \nabla(A\Theta - D\Delta) + \frac{p}{2}(\Delta\pi - Cf) = 0,$

$(534)_3$: $t\zeta - \Delta(C\Theta - D\nabla - p\pi) - \frac{1}{2}A\pi\varphi = 0,$

$(534)_4$: $s\xi - \Delta\left(C\Theta - E\Delta - \frac{1}{2}p\pi\right) - \frac{1}{2}Cfp = 0.$

Weil $\lambda$, $\mu$ und $\nu$ Functionaldeterminanten sind, hat man:

$(444)_1$: $2\lambda\mu + G\Delta\nabla - E\Delta\Theta - D\nabla\Theta + C\Theta^2 = 0,$

$(444)_2$: $2\nu^2 + A\nabla^2 - 2C\nabla\Delta + B\Delta^2 = 0.$

Aus den Identitäten

$$[(\Delta\pi)\xi] = 0; \quad [(\nabla\pi)Q] = 0; \quad [(p\pi)\vartheta] = 0$$

und ihren Gegenbildern erhält man weitere fünf (444):

$(444)_3$: $\quad 2t\xi - \Delta(B\Delta - C\nabla - \pi^2) - Ca\pi = 0,$

$(444)_4$: $\quad 2\sigma\xi - \nabla(A\nabla - C\Delta - p^2) - Cap = 0,$

$(444)_5$: $\quad 2sK - \Delta(C\nabla - B\Delta) + p(p\nabla - Ca) = 0,$

$(444)_6$: $\quad 2\tau Q - \nabla(C\Delta - A\nabla) + \pi(\pi\Delta - Ca) = 0,$

$(444)_7$: $\quad 4\omega\vartheta + p^2\nabla + 2p\pi\Theta + \pi^2\Delta = 0.$

## VI. Syzyganten ($ik5$).

Leicht ergeben sich aus den Identitäten

$$[(a\Theta)\nabla] = 0; \; [(a\pi)K] = 0; \; [(a\alpha)\pi] = 0; \; [(\Theta\nabla)f] = 0; \; [(\Delta\nabla)\alpha] = 0;$$
$$[(a\alpha)\tau] = 0; \; [(\alpha\pi)\xi] = 0 \text{ und } [(\Delta\nabla)K] = 0$$

die Syzyganten:

(145): $\quad \nabla\xi - \frac{1}{2}J\varphi\nabla - \frac{1}{2}\varphi\mu - K\Theta = 0,$

(165): $\quad \mu K - \varphi(B\Theta - E\nabla) + \frac{1}{2}\pi\nabla^2 = 0,$

$(235)_1$: $\quad \vartheta\pi + \mu f - \nu\varphi = 0,$

$(235)_2$: $\quad \Theta\xi + \frac{1}{2}\mu f - \nabla\left(\xi + \frac{1}{2}Jf\right) = 0,$

$(235)_3$: $\quad \Delta K + \nu\varphi - \xi\nabla = 0,$

$(255)_1$: $\quad \vartheta\tau - f(E\nabla - B\Theta) + \varphi\left[\frac{C\nabla - B\Delta}{2} + \pi^2\right] = 0,$

$(255)_2$: $\quad 2\mu\xi - \varphi[B\Delta - C\nabla - \pi^2] + \pi\nabla\Theta = 0,$

$(255)_3$: $\quad 2\nu K - \varphi(B\Delta - C\nabla) - \nabla^2 p = 0;$

und deren Gegenbilder

(415): $\quad \Delta\xi + \frac{1}{2}Jf\Delta - \frac{1}{2}f\lambda - Q\Theta = 0,$

(615): $\quad \lambda Q - f(A\Theta - D\Delta) + \frac{1}{2}p\Delta^2 = 0,$

$(325)_1$: $\quad -\vartheta p + \lambda\varphi + \nu f = 0,$

$(325)_2$: $\quad \Theta\xi + \frac{1}{2}\lambda\varphi - \Delta\left(\xi - \frac{1}{2}J\varphi\right) = 0,$

$(325)_3$: $\quad \nabla Q - \nu f - \xi\Delta = 0,$

$(525)_1$: $\quad -\vartheta s - \varphi(D\Delta - A\Theta) + f\left[\frac{C\Delta - A\nabla}{2} + p^2\right] = 0$

$(525_2)$: $\quad 2\lambda\xi - f[A\nabla - C\Delta - p^2] + p\Delta\Theta = 0,$

$(525)_3$; $\quad 2\nu Q + f(A\nabla - C\Delta) - \Delta^2\pi = 0.$

Zur Entwickelung der weiter hierher gehörenden Syzyganten

bedürfen wir einiger leicht zu erweisenden Relationen. Es sind dies die Ueberschiebungszerlegungen

$$(\mu\varphi) = \tfrac{1}{2}\nabla\pi;\quad (\nu f) = \tfrac{1}{2}\Delta\pi;\quad (\lambda\varphi) = \tfrac{1}{2}\Delta\pi + \Theta p.$$

Mit Hilfe dieser geben die Identitäten

$$[(\nabla p)\vartheta] = 0;\ [(\varphi\nabla)\mu] = 0,\ [(f\nabla)\nu] = 0,\ [(\varphi\nabla)\lambda] = 0.$$

$(345)_1$: $\quad 2\sigma\vartheta - \nabla(\pi\Delta + p\Theta) + \varphi p\pi = 0,$

$(345)_2$: $\quad \zeta\mu - \varphi(B\Theta - E\nabla) + \tfrac{1}{2}\nabla^2\pi = 0,$

$(345)_3$: $\quad 2\xi\nu - f(B\Delta - C\nabla) + \Delta\nabla\pi = 0,$

$(345)_4$: $\quad K\lambda - (C\Theta - E\Delta) + \nabla\left(\tfrac{1}{2}\Delta\pi - \Theta p\right) = 0;$ und

$(435)_1$: $\quad 2t\vartheta + \Delta(p\nabla + \pi\Theta) + fp\pi = 0,$

$(435)_2$: $\quad \xi\lambda - f(A\Theta - D\Delta) + \tfrac{1}{2}\Delta^2 p = 0,$

$(435)_3$: $\quad -2\xi\nu - \varphi(A\nabla - C\Delta) + \Delta\nabla p = 0,$

$(435)_4$: $\quad Q\mu - f(C\Theta - D\nabla) + \Delta\left(\tfrac{1}{2}\nabla p - \Theta\pi\right) = 0.$

## VII. Syzyganten ($ik6$).

Der Theorie der cubischen Formen entnehmen wir:

(066): $\quad 2K^2 + \nabla^3 + Ba^2 = 0,$

(606): $\quad 2Q^2 + \Delta^3 + Aa^2 = 0.$

$[(\alpha\nabla)f] = 0$ giebt sofort:

(136): $\quad Kf - \xi\varphi + \vartheta\nabla = 0,$

(316): $\quad Q\varphi - \zeta f - \vartheta\Delta = 0.$

Mit Ausnahme von (226) erhält man die folgenden ($ik6$) bis ($ik8$) aus der bekannten Eigenschaft der Functionaldeterminanten, dass ihre Quadrate und Producte Syzyganten liefern. Jene aber ergiebt sich ohne weiteres aus: $[(a\alpha)\Theta] = 0.$

(156): $\quad 2\xi K + \Theta\nabla^2 - \pi\nabla\varphi + Bf\varphi = 0,$

(516): $\quad 2\zeta Q + \Theta\Delta^2 - p\Delta f + Af\varphi = 0,$

(226): $\quad \vartheta\Theta + f\xi - \varphi\zeta - Jf\varphi = 0.$

$(246)_1$: $\quad 2\xi^2 + \nabla^2\Delta - 2\pi f\nabla + Bf^2 = 0,$

$(246)_2$: $\quad 2\zeta K + \nabla^2\Delta - p\varphi\nabla + C\varphi^2 = 0,$

$(246)_3$: $\quad 2\vartheta\mu - f\nabla\pi + \varphi\nabla p + 2\varphi\Theta\pi = 0,$

$(426)_1$: $\quad 2\zeta^2 + \Delta^2\nabla - 2p\varphi\Delta + A\varphi^2 = 0,$

$(426)_2$: $\quad 2\xi Q + \Delta^2\nabla - \pi f\Delta + Cf^2 = 0,$

$(426)_3$: $\quad -2\vartheta\lambda - \varphi\Delta p + f\Delta\pi + 2f\Theta p = 0,$

$(336)_1$: $2\vartheta\nu + \varphi\pi\Delta + fp\nabla = 0,$
$(336)_2$: $2\xi\zeta + \Theta\Delta\nabla + Cf\varphi = 0,$
$(336)_3$: $2QK + \Theta\Delta\nabla - \varphi\pi\Delta - fp\nabla + Cf\varphi = 0,$

VIII, IX. Syzyganten $(ik7)$ und $(ik8)$.

(147): $2\vartheta K + \Theta\varphi\nabla - \pi\varphi^2 - \nabla^2 f = 0,$
(417): $-2\vartheta Q + \Theta f\Delta - pf^2 - \Delta^2\varphi = 0,$
(237): $2\vartheta\xi + \varphi\Delta\nabla - \pi f\varphi - \Theta f\nabla = 0,$
(327): $-2\vartheta\zeta + f\Delta\nabla - p\varphi f - \Theta\varphi\Delta = 0,$
(228): $2\vartheta^2 + \Delta\varphi^2 - 2\Theta f\varphi + \nabla f^2 = 0.$

## § 5.

## Tabelle der Syzyganten.

1) $(ik0)$.

(440) (660).

2) $(ik1)$.

(361) $(451)^2$ $(541)^2$ (631) (741),
(471) (561) (651).

3) $(ik2)$.

(242) (332) (422) $(532)^2$ (622) (732) (822),
(262) $(352)^2$ $(442)^3$ $(552)^3$ $(642)^3$,
(282) (372) $(462)^3$.

4) $(ik3)$.

(143) (233) (323) (413) $(523)^3$ (613) (723),
(163) $(253)^3$ $(343)^6$ $(433)^6$ $(543)^4$ $(633)^3$,
(273) $(363)^3$ $(453)^4$.

5) $(ik4)$.

$(154)^2$ (224) $(334)^5$ $(424)^4$ $(514)^2$ $(624)^3$ (714),
(174) $(244)^4$ $(354)^4$ $(534)^4$,
$(264)^3$.

6) $(ik5)$.

(145) $(235)^3$ $(325)^3$ (415) $(525)^3$ (615),
(165) $(255)^3$ $(345)^4$ $(435)^4$.

7) $(ik6)$.

$$(066)\quad (136)\quad (226)\quad (316)\quad (426)^3\quad (516)\quad (606),$$
$$(156)\quad (246)^3\quad (336)^3.$$

8) $(ik7)$.

$$(147)\quad (237)\quad (327)\quad (417).$$

9) $(ik8)$.

$$(228).$$

Oppenheim, 20. December 1887.

# Ueber einen Satz der Formentheorie.

Von

E. Stroh in München.

Dass der Cayley'sche Satz über die Anzahl der zu einer binären Form gehörigen linear unabhängigen Covarianten, der neuerdings von Hilbert*) auf Grund mehrerer Reihenentwicklungen bewiesen wurde, aus der Gordan'schen Theorie ohne jede Rechnung sich ergiebt, soll in gegenwärtiger Note gezeigt werden.

Zunächst ist evident, dass die aus $g$ verschiedenen binären Formen $f_1 = a_x^{n_1}$, $f_2 = b_x^{n_2}$, $\cdots$, $f_g = h_x^{n_g}$ und einer weiteren Form $\varphi = \varphi_x^m$, deren Ordnung nicht beschränkt sein soll, gebildeten Covarianten

$$A_i = (\varphi a)^{\lambda_1}(\varphi b)^{\lambda_2} \cdots (\varphi h)^{\lambda_g} a_x^{n-\lambda_1} b_x^{n_2-\lambda_2} \cdots h_x^{n_g-\lambda_g} \cdot \varphi_x^{m-\Sigma\lambda}$$

vom gleichen Gewicht $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_g = p$ von einander *linear unabhängig* sind. Denn jede lineare Function dieser Formen wird, sobald alle Formen zu Potenzen *linearer Formen* specialisirt sind und ausserdem durch das Product aller Formen dividirt ist, übergehen in eine ganze homogene Function der Grössen $\frac{(\varphi a)}{\varphi_x a_x}$, $\frac{(\varphi b)}{\varphi_x b_x}$, $\cdots$, $\frac{(\varphi h)}{\varphi_x h_x}$, die wegen der Unabhängigkeit dieser Grössen von einander niemals verschwinden kann. Unter den Formen $A_i$ heben wir nun diejenigen heraus, bei denen die Indices $\lambda$ eine fallende Reihe bilden, für welche also $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \cdots \geqq \lambda_g$ und nennen sie *Normalformen*. Aus denselben entstehen dann, vorausgesetzt dass alle Formen $f$ von gleicher Ordnung sind, alle übrigen Formen $A$ durch Permutation der $\lambda$ oder auch der $f$. Bildet man nun aus jeder Normalform und den aus ihr durch Permutation der $\lambda$ hervorgehenden Formen eine Summe, dann sind diese Summen in Bezug auf die Formen $f$ symmetrisch und sie seien daher kurz *symmetrische Covarianten* genannt. Es ist dann selbstverständlich, dass diese auch linear unabhängig sein müssen.

*) Math. Annalen Bd. 30, pag. 20.

Es kann nun weiterhin nachgewiesen werden, dass diese symmetrischen Covarianten auch dann noch *linear unabhängig bleiben*, wenn alle Formen $f$ *einander gleich* gesetzt werden. Dabei ist es offenbar gleichgültig, ob man diese Veränderung in den symmetrischen Covarianten oder in den Normalformen ausführt, da die resultirenden Formen, die durch $B_i$ bezeichnet seien, nur durch Zahlencoefficienten sich unterscheiden. Zum Beweise sei daran erinnert, dass jede lineare Relation zwischen den Formen $B_i$ mit Hülfe des von Clebsch (binäre Formen pag. 6) angegebenen Prozesses in eine lineare Relation zwischen den symmetrischen Covarianten umgeformt werden kann. Da diese aber linear unabhängig sind, so folgt dasselbe auch für die Formen $B_i$.

Nach einem bekannten Satze der Gordan'schen Theorie (Formensystem pag. 9) kann nun jede der Formen $B_i$ durch Ueberschiebungen $(C_i\varphi)_\lambda = \Phi_i$ linear ausgedrückt werden, wobei $C_i$ Covarianten von $f$ sind und zwar vom Grade $g$ und dem Gewicht $p - \lambda$. Aber auch umgekehrt kann jede Ueberschiebung $\Phi_i$ durch die Formen $B_i$ linear ausgedrückt werden. Denn in allen symbolischen Producten, aus denen sich eine solche Ueberschiebung zusammensetzt, können die Klammerfactoren $(ab)$, $(ac)$, ... vermöge der Beziehungen $(ab)\varphi_x = (\varphi b)a_x - (\varphi a)b_x$ etc. entfernt resp. durch lauter Factoren $(\varphi a)$, $(\varphi b)$ etc. ausgedrückt werden. In Bezug auf die linear unabhängigen Ueberschiebungen $\Phi_i$ ergiebt sich demnach, dass deren Gesammtzahl gleich derjenigen der Formen $B_i$ sein muss, da sonst diese Formen nicht gegenseitig linear ausdrückbar sein könnten. Uebrigens gilt der analoge Satz auch schon, bevor die Formen $f$ einander gleich gesetzt wurden.

Bezeichnen wir die betreffende Anzahl durch $N_p$, dann kann schliesslich noch nachgewiesen werden, dass unter allen Covarianten $g^{\text{ten}}$ Grades von $f$, deren Gewicht $p$ nicht übersteigt, nur $N_p$ *linear unabhängige* sein können. Denn wären es weniger als $N_p$, dann müssten zwischen den $N_p$ Formen $C_i$ lineare Relationen stattfinden, die sogleich ebensoviele Relationen zwischen den Ueberschiebungen $\Phi_i$ nach sich ziehen würden. Nehmen wir andrerseits an, dass es mehr als $N_p$ Formen seien, dann müssten passende Ueberschiebungen dieser überzähligen Formen $C'_x$ über $\varphi$ durch die $\Phi_i$ linear ausdrückbar sein. Jeder solche Ausdruck für $(C'_x\varphi)^\mu$ geht aber in einen Ausdruck für $C'_k$ selbst über, sobald für $\varphi$ die besondere Form einer Potenz $(xy)^m$ angenommen wird und die Variablen nach Entfernung einer etwa als Factor vorkommenden Potenz von $(xy)$ einander gleich gesetzt werden. Daher sind die Formen $C_i$ die einzigen linear unabhängigen Covarianten der angegebenen Art.

Es giebt demnach $N_p$ linear unabhängige Covarianten von $f$, deren Grad $g$ ist und deren Gewicht $p$ nicht übersteigt. Analog giebt es $N_{p-1}$ Covarianten von demselben Grade aber von einem Gewichte,

das $p-1$ nicht übersteigt. Die Differenz $N_p - N_{p-1}$ ist folglich die Zahl der linear unabhängigen Covarianten vom Grade $g$ und dem Gewichte $p$.

Um die Zahl $N_p$ d. i. die Anzahl der Normalformen noch näher zu bestimmen, bemerke man, dass sie gleich der Zahl derjenigen ganzzahligen Lösungen der Gleichung $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_g = p$ ist, welche die Bedingungen $n \geqq \lambda_1$ und $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \cdots \geqq \lambda_g$ erfüllen. Setzt man $\lambda_i = \mu_i + \mu_{i+1} + \cdots + \mu_g$, so fallen die letzten Bedingungen weg und $N_p$ ist die Zahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots + g\mu_g = p$$

mit der Bedingung

$$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_g = n$$

in Uebereinstimmung mit dem Cayley'schen Satze.

Wenn man von den Formen $f$ nur einen Theil derselben einander gleichsetzt und übrigens alle Schlüsse wiederholt, so ergiebt sich der entsprechende Beweis für *simultane* Covarianten mehrerer binärer Formen.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass im Vorstehenden zugleich ein Weg vorgezeichnet ist, um auch zu den *symbolischen Ausdrücken* der Formen zu gelangen, deren *Anzahl* durch den Cayley'schen Satz blos angegeben ist.

München, am 27. November 1887.

Anm. Als „Gewicht" einer Covariante habe ich in Vorstehendem — abweichend von der gewöhnlichen Bedeutung dieser Zahl — das Gewicht ihres ersten Coefficienten, oder, symbolisch, die Anzahl der in der Covariante auftretenden Klammerfactoren bezeichnet.

# Ueber die asyzygetischen Covarianten dritten Grades einer binären Form.

Von

E. Stroh in München.

Die von Clebsch begründete symbolische Methode gestattet bekanntlich, zu einer binären Form eine beliebige Menge Covarianten ohne Schwierigkeit anzugeben, während die von Gordan entdeckten Criterien aus dieser Menge von Formen alle diejenigen zu entfernen suchen, welche durch die übrigen rational und ganz ausgedrückt werden können. Man hat jedoch bis jetzt kein Criterium dafür, dass eine zurückbleibende Form nicht mehr reducibel ist und es herrscht deshalb bei Aufstellung eines vollständigen Formensystems völlige Unklarheit darüber, ob auch alle überflüssigen Formen entfernt worden sind oder nicht. Dieser Fall tritt insbesondere bei Covarianten ein, die von hohem Grade in den Coefficienten sind — wie dies bei der Covariante $i'_f$ einer binären Form achter Ordnung der Fall war — allein eine genauere Untersuchung hat mir ergeben, dass sogar schon bei den *Covarianten dritten Grades* die Gordan'schen Criterien (Formensystem pag. 12 und 13) nicht mehr durchweg ausreichen.

Im Folgenden werden daher *neue Criterien* aufgestellt und zugleich der Nachweis geführt, dass dieselben *in allen Fällen* ausreichen. Von den zurückbleibenden Formen kann nämlich bewiesen werden, dass dieselben asyzygetisch sind und auch für die *Anzahl* dieser Formen ergiebt sich ein ganz einfacher Ausdruck.

## § 1.

### Gruppen aus Ueberschiebungen dreier verschiedener Formen.

Die vorliegende Aufgabe kann auf eine andere *allgemeinerer* Art zurückgeführt werden. Jede Covariante dritten Grades, welche zu einer binären Form $f$ gehört, kann bekanntlich als Aggregat von Ueberschiebungen $U_i = ((ff)^{\alpha_i}f)^{\mu}$ dargestellt werden und es können

daher solche Ueberschiebungen als *Grundformen* gewählt werden. Aus sämmtlichen Ueberschiebungen $U_i$, die das gleiche Gewicht*) $2\lambda+\mu=g$ haben und die man sich in eine *Gruppe* nach steigendem $\mu$ geordnet denken kann, sollen nun diejenigen ausgeschieden werden, welche durch die übrigen linear ausgedrückt werden können. Jede derartige lineare Relation

$$(1) \qquad \sum_{i,\lambda,\mu} c_i ((ff)^{2\lambda} f)^{\mu} = 0 \qquad 2\lambda+\mu=g$$

hängt nun aber mit der allgemeinen Relation

$$(2) \qquad \sum_{i,\lambda,\mu} c_i [((f_1f_2)^{2\lambda} f_3)^{\mu} + ((f_2f_3)^{2\lambda} f_1)^{\mu} + ((f_3f_1)^{2\lambda} f_2)^{\mu}] = 0$$

wo $f_1$, $f_2$, $f_3$ *verschiedene* Formen von gleicher Ordnung wie $f$ sind, und $i$, $\lambda$, $\mu$ dieselben Werthe wie in (1) durchlaufen, derart zusammen, dass eine aus der anderen gefolgert werden kann. Setzt man in (2) die Formen $f_i$ einander gleich, dann folgt die Relation (1). Wird andrerseits in (1) statt $f$ die Combination $k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3$ eingeführt, nach Potenzen von $k_1$, $k_2$ und $k_3$ entwickelt, dann liefert der Coefficient von $k_1.k_2.k_3$, der wie alle übrigen für sich verschwinden muss, die Relation (2). Sind demnach *alle* Relationen letzterer Art gefunden, dann ergeben sich daraus durch Gleichsetzen der Formen auch *alle* Relationen der ersteren Art.

Wir werden demnach die aus drei beliebigen Formen $f_1$, $f_2$, $f_3$, deren Ordnungen auch verschieden angenommen werden sollen, gebildeten Ueberschiebungen einer genaueren Untersuchung unterziehen und in dieser Hinsicht zunächst den Satz beweisen:

*Ordnet man die sämmtlichen aus drei binären Formen zu bildenden einfachen Ueberschiebungen vom Gewicht g in drei Gruppen* (nach steigendem äusseren Index):

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\text{I.} \quad ((f_1f_2)^{\alpha_1} f_3)^{\beta_1},\ ((f_1f_2)^{\alpha_1-1} f_3)^{\beta_1+1},\ \ldots \text{ etc.} \\ &\text{II.} \quad ((f_2f_3)^{\alpha_2} f_1)^{\beta_2},\ ((f_2f_3)^{\alpha_2-1} f_1)^{\beta_2+1},\ \ldots \text{ etc.} \\ &\text{III.} \quad ((f_3f_1)^{\alpha_3} f_2)^{\beta_3},\ ((f_3f_1)^{\alpha_3-1} f_2)^{\beta_3+1},\ \ldots \text{ etc.} \end{aligned}$$

*dann enthält jede Gruppe* $N=g+1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3$ *Formen, wobei* $\varepsilon_i=g-n_i$ *statt negativ stets Null, zu nehmen ist; und die Formen jeder Gruppe sind unter sich linear unabhängig.*

Der erste Theil des Satzes ergiebt sich am einfachsten mit Hilfe des Cayley'schen Satzes über die Anzahl der linear unabhängigen

*) Unter „Gewicht" einer Covariante wird stets dasjenige ihrer ersten Coefficienten oder symbolisch die Anzahl der darin vorkommenden Klammerfactoren verstanden.

Covarianten. Danach wird die gesuchte Zahl $N$ durch den Coefficienten von $x^g$ in der Entwicklung

$$(1 - x^{n_1+1})(1 - x^{n_2+1})(1 - x^{n_3+1})(1 - x)^{-2}$$
$$= (1 - x^{n_1+1} - x^{n_2+1} - x^{n_3+1} + \cdots) \sum_{\lambda} (\lambda + 1) x^{\lambda}$$

angegeben. Da nun $g$ die Summe zweier Ordnungszahlen z. B. $n_1 + n_2$ nicht überschreiten darf, weil sonst alle Ueberschiebungen identisch verschwinden würden, so kommen die weggelassenen Glieder des ersten Factors nicht in Betracht und die Entwicklung nimmt die einfache Form an

$$\sum_{g} (g + 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) x^g,$$

worin die Zahlen $\varepsilon$ die im Satze angegebene Bedeutung haben. Führt man statt $g$ das *reducirte Gewicht* $\gamma = g - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ ein, dann wird die Zahl der linear unabhängigen Covarianten *in allen Fällen* durch $\gamma + 1$ angegeben.

Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, wodurch die Zahl $N$ eigentlich erst ihre Bedeutung für die Gruppen erlangt, sei bemerkt, dass jede lineare Relation zwischen den Ueberschiebungen der ersten Gruppe ebensolche Relationen zwischen den Ueberschiebungen $(f_1 f_2)^{\lambda}$ nach sich ziehen würde, die offenbar nicht existiren können. Diese würden sich nämlich ergeben, sobald $f_3$ zu einer Potenz einer linearen Function $(xy)$ specialisirt und die Variabeln $x$ und $y$ nach Entfernung eines gemeinsamen Factors $(xy)^{\varrho}$ einander gleich gesetzt würden. Um nun zeigen zu können, dass die linear unabhängigen Covarianten auch aus *verschiedenen* Gruppen gewählt werden dürfen, muss zunächst eine Formel entwickelt werden, die als eine Erweiterung der wichtigen Gordan'schen Formel III (Formensystem pag. 11) zu betrachten ist.

## § 2.

## Ableitung einer elementaren Hilfsformel.

Wenn zwischen drei Grössen $u_1$, $u_2$ und $u_3$ die einzige Relation $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ stattfindet, dann bestehen zwischen den Producten derselben von der allgemeinen Form $u_1^{\varrho_1} u_2^{\varrho_2} u_3^{\varrho_3}$ ebenfalls lineare Relationen, von welchen eine hier entwickelt werden soll. Zunächst hat man unmittelbar die Beziehung:

$$u_1^{g-i} u_2^{i} = (-1)^{g-i} \sum_{\lambda} \binom{g-i}{\lambda} u_2^{g-\lambda} u_3^{\lambda} = (-1)^{g-i} \sum_{\lambda} \frac{\binom{g}{\lambda}\binom{g-\lambda}{i}}{\binom{g}{i}} u_2^{g-\lambda} u_3^{\lambda}.$$

Multiplicirt man beiderseits mit $(-1)^{k_1-i}\cdot\binom{g}{i}\binom{-k_1-1}{k_2-i}$, wo $k_1, k_2$ beliebige ganze Zahlen kleiner als $g$ sein sollen, und bildet die Summe von $i=0$ bis $i=k_2$, so ergiebt sich nach einer leichten Umformung:

$$\sum_{i=0}^{k_2}(-1)^{k_2-i}\binom{g}{i}\binom{-k_1-1}{k_2-i}u_1^{g-i}u_2^{i}$$

$$=(-1)^{g+k_2}\sum_{\lambda=0}^{g}\binom{g}{\lambda}\binom{g-\lambda-k_1-1}{k_2}u_2^{g-\lambda}u_3^{\lambda}.$$

Diese letztere Summe zerfällt nun in zwei Theile. Da nämlich diejenigen Terme, für welche $\lambda$ der Bedingung

$$g-k_1 \geqslant \lambda > g-k_1-k_2-1$$

genügt, verschwinden, so lässt sich für diese Summe auch schreiben:

$$\sum_{i=0}^{k_2}\binom{g}{i}\binom{k_2+k_3-i}{k_2}u_2^{g-i}u_3^{i}+(-1)^{k_2}\sum_{i=0}^{k_1}\binom{g}{i}\binom{k_1+k_2-i}{k_2}u_3^{g-i}u_2^{i},$$

worin zur Abkürzung $g-k_1-k_2-1=k_3$ gesetzt ist. Um die Formel noch symmetrisch zu machen, kann in der letzten Theilsumme $u_2$ durch $-(u_1+u_3)$ ersetzt und sodann nach Potenzen von $u_1$ und $u_3$ entwickelt werden. Dann ergiebt sich die gesuchte Formel:

$$\begin{aligned}&(-1)^{k_2}\sum_{i=0}^{k_1}\binom{g}{i}\binom{k_1+k_3-i}{k_3}u_3^{g-i}u_1^{i}\\ &+(-1)^{k_3}\sum_{i=0}^{k_2}\binom{g}{i}\binom{k_2+k_1-i}{k_1}u_1^{g-i}u_2^{i}\\ &+(-1)^{k_1}\sum_{i=0}^{k_3}\binom{g}{i}\binom{k_3+k_2-i}{k_2}u_2^{g-i}u_3^{i}=0\end{aligned}\tag{4}$$

durch welche im ganzen, da $k_1+k_2+k_3=g-1$ ist, $g+2$ Producte der Grössen $u_1, u_2, u_3$ linear verbunden sind. Auch lässt sich zeigen, dass dies die einzige Relation zwischen diesen Producten ist; doch ist es wichtiger, diesen Beweis erst zu führen, wenn die Relation (4) in eine solche zwischen Ueberschiebungen umgewandelt ist.

## § 3.

### Relationen zwischen den einfachen Ueberschiebungen dreier Formen.

Die bekannte Beziehung $a_x(bc)+b_x(ca)+c_x(ab)=0$ führt darauf, in der soeben entwickelten Formel an Stelle von $u_1, u_2$ und $u_3$ bez. $a_x(bc)$, $b_x(ca)$ und $c_x(ab)$ zu setzen und mit $a_x^{n_1-g}\,b_x^{n_2-g}\,c_x^{n_3-g}$ zu

multipliciren. Dann kann die erhaltene Gleichung als eine Beziehung zwischen Covarianten der Formen $f_1 = a_x^{n_1}$, $f_2 = b_x^{n_2}$, $f_3 = c_x^{n_3}$ aufgefasst werden. Geht man in bekannter Weise von den symbolischen Producten zu Ueberschiebungen über, dann ergiebt sich die Formel:

$$(5)\quad \begin{aligned}&(-1)^{k_2}\sum_{i=0}^{k_1} a_i^{(1)}\,((f_1f_2)^{g-i}f_3)^i + (-1)^{k_3}\sum_{i=0}^{k_2} a_i^{(2)}\,((f_2f_3)^{g-i}f_1)^i\\ &+(-1)^{k_1}\sum_{i=0}^{k_3} a_i^{(3)}\,((f_3f_1)^{g-i}f_2)^i = 0 \qquad (k_1+k_2+k_3=g-1)\end{aligned}$$

worin die Zahlencoefficienten $a_i^{(1)}$ die Bedeutung haben:

$$a_i^{(1)} = \binom{g}{i}\sum_{\lambda=0}^{k_1-i}(-1)^\lambda \binom{k_1+k_3-i-\lambda}{k_3}\frac{\binom{n_1-g+i+\lambda}{\lambda}\binom{g-i}{\lambda}}{\binom{n_1+n_2-2g+2i+\lambda+1}{\lambda}}.$$

während $a_i^{(2)}$ und $a_i^{(3)}$ durch cyklische Vertauschung der $k$ und $n$ hieraus hervorgehen.

Diese Formel ist jedoch nur so lange brauchbar, als das Gewicht $g$ nicht grösser ist als eine der Ordnungen $n$. Sollte dies der Fall sein, so hat dies auf die Entwicklung der analogen Formel nur insoferne Einfluss, als die Gleichung des vorigen Paragraphen mit einem andern Factor zu multipliciren ist, während $g$ durch das reducirte Gewicht $\gamma$ zu ersetzen ist. Nehmen wir beispielsweise $g > n_3 > n_2 > n_1$ an, so wäre mit $(bc)^{g-n_1}(ca)^{g-n_2}(ab)^{g-n_3}$ zu multipliciren. Nun lassen sich aber alle so entstehenden Specialformeln in *eine einzige* Formel zusammenfassen. Führen wir nämlich die Differenzen

$$g - n_1 = \varepsilon_1, \quad g - n_2 = \varepsilon_2, \quad g - n_3 = \varepsilon_3$$

mit der schon erwähnten Bedingung ein, dass dieselben statt negativ stets Null sein sollen, sowie auch an Stelle von $g$ das *reducirte* Gewicht

$$\gamma = g - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$

dann kann die gesuchte Formel in folgender allgemeinen Form geschrieben werden:

$$(6)\quad \begin{aligned}&(-1)^{k_2+\varepsilon_2}\sum_{i=0}^{k_1} a_i^{(1)}\,((f_1f_2)^{\gamma+\varepsilon_3-i}f_3)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+i}\\ &+(-1)^{k_3+\varepsilon_3}\sum_{i=0}^{k_2} a_i^{(2)}\,((f_2f_3)^{\gamma+\varepsilon_1-i}f_1)^{\varepsilon_2+\varepsilon_3+i}\\ &+(-1)^{k_1+\varepsilon_1}\sum_{i=0}^{k_3} a_i^{(3)}\,((f_3f_1)^{\gamma+\varepsilon_2-i}f_2)^{\varepsilon_3+\varepsilon_1+i} = 0\end{aligned}$$

worin die Zahlencoefficienten die Bedeutung haben:

$$a_i^{(1)} = \sum_{\lambda=0}^{k_1-i} (-1)^\lambda \binom{k_1+k_3-i-\lambda}{k_3} \binom{\gamma}{i+\lambda} \frac{\binom{n_1-\gamma-\varepsilon_2-\varepsilon_3+i+\lambda}{\lambda}\binom{\varepsilon_1+i+\lambda}{\lambda}}{\binom{n_1+n_2-2\gamma-2\varepsilon_3+2i+\lambda+1}{\lambda}}$$

nebst ähnlichen durch cyklische Vertauschung der $n$, $k$ und $\varepsilon$ hieraus hervorgehenden Ausdrücken für $a_i^{(2)}$ und $a_i^{(3)}$. Die Zahlen $k$ haben auch hier die Bedingung

$$k_1 + k_2 + k_3 = \gamma - 1$$

zu erfüllen.

Um die *Bedeutung* der gefundenen Formel zu erkennen, sei bemerkt, dass in derselben Ueberschiebungen aus allen drei Gruppen vorkommen und zwar aus der ersten $k_1 + 1$, aus der zweiten $k_2 + 1$ und aus der dritten $k_3 + 1$ Formen. Sind die Ueberschiebungen innerhalb jeder Gruppe nach steigendem äusseren Index geordnet, dann befinden sich die in der Formel auftretenden Formen gleich im Anfange jeder der drei Gruppen und sie mögen daher kurz *Anfangsformen* genannt werden. *Es sind demnach je $\gamma + 2$ Anfangsformen der drei Gruppen durch eine lineare Relation verbunden.*

Wählt man diese Anfangsformen *nur aus zwei* Gruppen, dann ergiebt sich die bekannte Gordan'sche Formel III. In der That geht für $k_3 = -1$ die Formel (6) in die Gordan'sche Formel über.

## § 4.

### Eine Eigenschaft der $\gamma + 1$ Anfangsformen dreier Gruppen.

Die entwickelte Formel kann nun dazu dienen, eine wichtige Eigenschaft der $(\gamma + 1)$ Anfangsformen nachzuweisen. Seien diese durch

$$A_0 A_1 \ldots A_{k_1}, \quad B_0 B_1 \ldots B_{k_2}, \quad C_0 C_1 \ldots C_{k_3-1}$$

bezeichnet, dann lässt sich mittelst Formel (6) die Form $C_{k_3}$, die den Coefficienten $(\gamma_{k_3})$ hat, stets durch die Anfangsformen linear ausdrücken. Dasselbe gilt von den Formen $A_{k_1+1}$ und $B_{k_2+1}$, wenn nur die Werthe der $k_i$ derart modificirt werden, dass diese Formen in Formel (6) auftreten. Weiterhin lässt sich durch eine ähnliche Veränderung in den Werthen der $k_i$ eine Formel herstellen, welche $C_{k_3+1}$ durch $C_{k_3}$ und Anfangsformen auszudrücken gestattet, und da $C_{k_3}$ schon vorher durch die Anfangsformen ausgedrückt wurde, so folgt, dass auch $C_{k_3+1}$ durch diese linear darstellbar sein muss. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens können dann schliesslich *alle Formen* der drei Gruppen durch die $\gamma + 1$ Anfangsformen linear ausgedrückt werden.

Wählen wir diese Anfangsformen *nur aus einer Gruppe*, dann

folgt also auch, dass alle Formen der andern beiden Gruppen durch die $\gamma + 1$ Formen der ersten Gruppe linear darstellbar sind.

Wie oben bewiesen wurde, sind nun aber die Ueberschiebungen *einer* Gruppe linear unabhängig. Da nun diese und $\gamma + 1$ beliebige Anfangsformen gegenseitig linear ausdrückbar sind, so überträgt sich diese Eigenschaft auch auf letztere und wir haben den Satz:

(7) *Wählt man $\gamma + 1$ beliebige Anfangsformen aus den drei Gruppen, dann sind dieselben linear unabhängig und alle übrigen Formen können mittelst Formel* (6) *durch sie linear ausgedrückt werden.*

Dass die Formel (6) eindeutig ist, versteht sich dann von selbst und ganz ebenso hätte dies auch schon für die Formel (4) bewiesen werden können. An Stelle der Ueberschiebungen wären dort die Producte der Grössen $u$ getreten und es ist merkwürdig, wie der vorstehende formentheoretische Satz auf einen ganz elementaren Satz zurückführbar ist.

## § 5.

### Die Covarianten dritten Grades einer binären Form.

Alle Eigenschaften der Covarianten dritten Grades einer binären Form ergeben sich nun durch *Specialisirung* der gewonnenen allgemeinen Sätze.

Vor Allem sind die Ordnungen $n_1, n_2, n_3$ der drei Formen $f_1 f_2 f_3$ als gleich anzunehmen. Ferner wählen wir die linear unabhängigen Anfangsformen aus den drei Gruppen derart, dass aus jeder Gruppe womöglich die *gleiche Zahl* Anfangsformen darunter enthalten ist. Sei $\gamma = 3\mu + \delta_1 + \delta_2$, wo $\delta_1$ und $\delta_2$ nur Null oder 1 sein können, dann werden wir demnach aus der ersten Gruppe $\mu + 1$ Formen, aus der zweiten $\mu + \delta_1$ und aus der dritten $\mu + \delta_2$ Formen wählen, so dass ihre Summe $\gamma + 1$ ausmacht. Nehmen wir aber aus jeder Gruppe $\mu + 1$ Formen, dann bestehen zwischen denselben $2 - \delta_1 - \delta_2$ lineare Relationen, die sich aus Formel (6) unmittelbar ergeben.

Diese Relationen vermehren sich nun nicht, wenn die Formen $f_i$ einander gleich gesetzt werden. Denn nach § 1 ist jede Relation letzterer Art (1) aus einer solchen zwischen den entsprechenden Anfangsformen (2) entstanden und es können daher nach Gleichsetzen der Formen höchstens $2 - \delta_1 - \delta_2$ lineare Relationen zwischen denjenigen Covarianten dritten Grades existiren, welche aus den $3\mu + 3$ Anfangsformen hervorgehen. Jedoch nur, wenn $\delta_2 = 0$, $\delta_1 = 1$ und $\varepsilon$ ungerade ist, ergiebt sich eine brauchbare Relation, in allen übrigen Fällen verschwindet die Formel (6) identisch. Daher ist auch nur in ersterem Falle eine der Formen, am besten die letzte, reducibel und kann weggelassen werden. Die *letzte* der *linear unabhängigen* Formen, die noch bleiben, kann dann allgemein durch

$$((ff)^{2k+\varepsilon}f)^{2\varepsilon+k-\delta} \quad \text{wenn } \varepsilon \text{ gerade ist}$$

und

$$((ff)^{2k+\varepsilon+1}f)^{2\varepsilon+k-1-\delta} \quad \text{wenn } \varepsilon \text{ ungerade ist}$$

dargestellt werden, wobei $\gamma = 3k - \delta$, $\delta < 3$ gesetzt ist.

Um die *Anzahl* dieser Formen zu bestimmen, bezeichne $\left[\frac{a}{b}\right]$ die grösste in $\frac{a}{b}$ enthaltene ganze Zahl. In ersterem Falle, wenn $\varepsilon$ gerade ist, beträgt dann diese Zahl $\left[\frac{k-\delta}{2}\right]+1 = \left[\frac{\gamma+2}{2}\right]-\left[\frac{\gamma+2}{3}\right]$, im andern Falle: $\left[\frac{k+1-\delta}{2}\right]+1 = \left[\frac{\gamma-1}{2}\right]-\left[\frac{\gamma-1}{3}\right]$.*) Ist $\varepsilon = 0$ und $g$ gerade, dann ist die erste der linear unabhängigen Covarianten ein Product und kann auch weggelassen werden. Es bleiben dann noch $\left[\frac{g-1}{2}\right]-\left[\frac{g-1}{3}\right]$ nicht zerfallende Formen, welche Zahl auch für ein ungerades $g$ den richtigen Werth liefert.

Diese Resultate lassen sich in folgendem kurzen Satze zusammenfassen:

(8) *Unter den Covarianten dritten Grades* $((ff)^{2\alpha}f)^{\beta}$ *sind alle diejenigen, für welche* $\alpha \gtreqless \beta - 3\left[\frac{\varepsilon}{2}\right]$ *ist, linear unabhängig (asyzygetisch) und alle übrigen sind durch sie linear ausdrückbar.*

*Die Zahl ersterer Formen vom reducirten Gewichte* $\gamma$ *ist*

*für ein gerades* $\varepsilon$: $\left[\frac{\gamma+2}{2}\right]-\left[\frac{\gamma+2}{3}\right]$

*und für ein ungerades* $\varepsilon$, $\left[\frac{\gamma-1}{2}\right]-\left[\frac{\gamma-1}{3}\right]$

*wobei* $\varepsilon$ *und* $\gamma$ *die früher angegebene Bedeutung haben, während die* [ ] *eine ganzzahlige Abrundung anzeigt.*

Ein entsprechendes Criterium dafür, dass eine Form *reducibel* ist, ergiebt sich hieraus ohne Weiteres. Doch ist die angegebene Fassung vorzuziehen, weil sie die *geringere* Anzahl von Covarianten umfasst.

## § 6.

### Vergleich mit den Gordan'schen Criterien. Besondere Fälle.

Der Grund, warum die Gordan'schen Criterien nicht in allen Fällen ausreichend sind, ist nun darin zu suchen, dass die linear unabhängigen Anfangsformen nicht aus drei, sondern blos aus zwei

*) Auch lassen sich beide Zahlen durch $\left[\frac{g+2}{2}\right]-\left[\frac{g+2}{3}\right]-\left[\frac{\varepsilon+1}{2}\right]$ darstellen, wobei $\varepsilon$ einen beliebigen Werth haben kann. Diese Zahl ergiebt sich auch aus der Cayley'schen Formel, doch ist diese besondere Form der Zahl bis jetzt nicht bekannt geworden.

Gruppen gewählt wurden. Wenn die Gruppen nicht sehr gross sind, dann hat dies keinen bedeutenden Einfluss, allein bei grösseren Gruppen würden viele Formen zurückbleiben, die noch reducibel wären. So würde dies beispielsweise für die Covariante $((ff)^6f)^4$ einer Form $10^{ter}$ Ordnung der Fall sein.

Diejenigen Fälle, in denen die in (8) angegebene Anzahl verschwindet, bieten ein besonderes Interesse. Es tritt dies ein für

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 \text{ und } \varepsilon \text{ beliebig}, \\ \gamma &= 2 \quad \text{„} \quad \varepsilon \text{ ungerade}, \\ \gamma &= 4 \quad \text{„} \quad \varepsilon \text{ ungerade}, \end{aligned}$$

abgesehen von dem Falle $\gamma = 0$, $\varepsilon$ ungerade, der kein Interesse bietet. In den entsprechenden allgemeinen Gruppen, die bez. 2, 3 und 5 Ueberschiebungen enthalten, müssen demnach beim Gleichsetzen der Formen $f_1 f_2 f_3$ *alle* Ueberschiebungen identisch verschwinden. Darunter befinden sich insbesondere auch die folgenden:

$$(9)\quad \begin{aligned} &((ff)^{2\lambda}f)^{n-1} = 0 \quad \text{für} \quad n = 4\lambda,\ n = 4\lambda - 1,\ n = 4\lambda + 2, \\ &((ff)^{2\lambda}f)^{n} = 0 \quad \text{für} \quad n = 4\lambda + 1 \\ &\text{und} \\ &((ff)^{2\lambda+2}f)^{n-3} = 0 \quad \text{für} \quad n = 4\lambda + 2 \end{aligned}$$

und es geht daraus hervor, dass jede *binäre Form beliebiger Ordnung eine verschwindende Covariante dritten Grades besitzt*, deren Ordnung in den Variablen entweder 1, 2 oder 4 ist. Dieser Satz war nur für eine Form von der Ordnung $n = 4\lambda - 1$ bis jetzt allgemein bewiesen worden (Gordan, Formensystem pag. 13). Zugleich folgt aus Satz (8), dass ausser den genannten keine anderen Gruppen existiren, welche beim Gleichsetzen der Formen $f_1 f_2 f_3$ im Ganzen verschwinden. In den besonderen Fällen $n = 8, 9, 10, 11, \ldots$ existiren z. B. nur die folgenden verschwindenden Covarianten:

$$((ff)^4f)^7 = 0; \quad ((ff)^4f)^9 = 0; \quad ((ff)^4f)^9 = ((ff)^6f)^7 = 0;$$

und

$$((ff)^6f)^{10} = 0.$$

## § 7.

### Anwendung des Criteriums (8) auf Formen höheren Grades.

Zum Schlusse soll noch gezeigt werden, wie der Satz (8), der zunächst nur für Covarianten *dritten Grades* gilt, leicht zu einem Satz erweitert werden kann, der für Covarianten höheren Grades von Wichtigkeit ist.

Bekanntlich kann jede Covariante $K$, welche den symbolischen Factor $(ab)^{2\mu}(bc)^{\nu}(ca)^{\lambda}$ besitzt, durch Ueberschiebungen der Formen dritten Grades

$$A_{ik} = ((ff)^{2\mu+2i}f)^{\nu+\lambda+k} \quad i, k = 0, 1, 2, \ldots$$

über fremde Formen linear ausgedrückt werden. Wenn es nun gelingt, die Formen

$$A_{0k} = ((ff)^{2\mu}f)^{\nu+\lambda+k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

durch die übrigen Formen, für welche $i > 0$, linear auszudrücken, dann ist die Covariante $K$ durch ein Aggregat anderer Covarianten dargestellt, die mindestens den symbolischen Factor $(ab)^{2\mu+2}$ enthalten. Ersetzen wir $\nu+\lambda$ durch $\varrho$, dann können nun mit Hilfe des Criteriums (8) in der Reihe

(10) $$((ff)^{2\mu}f)^{\varrho}, ((ff)^{2\mu}f)^{\varrho+1}, \ldots ((ff)^{2\mu}f)^{\varrho+l}, \text{ etc.}$$

leicht diejenigen Covarianten namhaft gemacht werden, welche zu den asyzygetischen gehören. Man hat für die $(l+1)^{te}$ Form dieser Reihe die Bedingung

(11) $$\mu \overline{\geq} \varrho + l - 3\left[\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

die, wenn $\varepsilon$ die Werthe 0 oder 1 hat, in die einfachere

$$\mu \overline{\geq} \varrho + l$$

übergeht. In diesem *ersten* Theil der Reihe, der bis zur $(n-2\mu-\varrho+2)^{ten}$ Form reicht, sind demnach alle Formen von der ersten bis zur $(\mu-\varrho+1)^{ten}$ asyzygetische. Wenn also dieser Theil der Formenreihe überhaupt vorhanden ist, was für $n > 2\mu+\varrho-2$ stattfindet, und es soll *keine* asyzygetische Form darin vorkommen, dann muss $\varrho > \mu$ sein.

In Bezug auf den zweiten Theil der Reihe (10), der alle Formen von der $(n-2\mu-\varrho+3)^{ten}$ bis zur letzten umfasst, kann nun zunächst gezeigt werden, dass, wenn eine Form derselben asyzygetisch ist, auch die zweite, dritte etc. der folgenden es sein muss. Denn wenn die $(l+1)^{te}$ Form die Bedingung (11) erfüllt, dann wird dieselbe auch erfüllt sein, wenn für $l$ die Werthe $l+2$, $l+3$, etc. eingesetzt werden, da zugleich für $\varepsilon$ die entsprechenden Werthe $\varepsilon+2$, $\varepsilon+3$, etc. einzusetzen sind. Die $(l+2)^{te}$ Form dagegen kann möglicherweise nicht zu den asyzygetischen Formen gehören. Es ist dies dann der Fall, wenn $\varepsilon$ gerade ist und zugleich

(12) $$\mu = \varrho + l - 3\left[\frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Dann wird bei einer Zunahme des $l$ um 1 die rechte Seite der Gleichung zunächst auch um 1 zunehmen, daher das Criterium (11) nicht mehr erfüllt sein. Dasselbe gilt auch von den Formen, welche dieser

ausgezeichneten Form vorangehen. *Diese Form muss demnach die erste asyzygetische Form im zweiten Theile der Reihe* (10) *sein.* Aus Gleichung (12) ergiebt sich für dieselbe:

$$l = 3n - 8\mu - \varrho \quad \text{und} \quad \varepsilon = 2n - 6\mu.$$

Der grösste Werth, den $l$ überhaupt annehmen kann, ist gleich der kleineren der beiden Zahlen $n - \varrho$ und $2n - 4\mu - \varrho$. Soll also auch im zweiten Theile der Reihe (10) keine asyzygetische Form vorkommen, dann muss

$$3n - 8\mu - \varrho > n - \varrho \quad \text{bez.} \quad 3n - 8\mu - \varrho > 2n - 4\mu - \varrho$$

oder übereinstimmend

$$n > 4\mu$$

sein. Ist $n = 4\mu$, dann ist zwar die letzte Form der Reihe (10) eine asyzygetische, allein dieselbe ist eine Invariante, über welche keine Ueberschiebungen gebildet werden können und die folglich in der Entwicklung von $K$ nur als Factor eines Gliedes auftreten kann.

Das Resultat ist also folgendes: *Ist* $\varrho > \mu$ *und zugleich* $n \gtreqless 4\mu$, *so ist in der Reihe* (10) *höchstens eine asyzygetische Form vorhanden, die aber dann die Invariante* $(ab)^{2\mu}(bc)^{2\mu}(ca)^{2\mu}$ *ist.*

Hieraus ergiebt sich dann der folgende allgemeine Satz:

*Jede Covariante beliebigen Grades mit dem symbolischen Factor* $(ab)^{2\mu}(bc)^{\nu}(ca)^{\lambda}$, *für welche die Bedingungen*

$$\lambda + \nu > \mu \quad \text{und} \quad n \gtreqless 4\mu$$

*erfüllt sind, kann durch ein Aggregat anderer Covarianten ausgedrückt werden, welche entweder den symbolischen Factor* $(ab)^{2\mu+2}$ *oder den wirklichen Factor* $(ab)^{2\mu}(bc)^{2\mu}(ca)^{2\mu}$, *letzteren nur für* $n = 4\mu$, *enthalten.*

So ergeben sich beispielsweise für $n = 8, 12, 16, \ldots$ u. a. die reducirenden Factoren

$$(ab)^4(bc)^3, \quad (ab)^6(bc)^4, \quad (ab)^8(bc)^5, \text{ etc.}$$

Setzt man $\nu = 2\mu$ und $\lambda = 0$, wodurch die Bedingung $\lambda + \nu > \mu$ selbstverständlich wird, dann folgt als besonderer Fall der von Gordan in seinen Vorlesungen über Invariantentheorie II. Theil, pag. 105—108 bewiesene Satz.

Auch mag schliesslich noch besonders darauf hingewiesen werden, dass der gefundene Satz eine weitere Vervollständigung in dem Sinne, dass noch mehr Covarianten durch ihn betroffen werden, nicht mehr zulässt.

München, den 21. December 1887.

# Zur Theorie der Gamma-Functionen.

Von

ALFRED PRINGSHEIM in München.

Die Theorie derjenigen Transcendenten, welche man heute zumeist als *Gamma-Functionen* (sonst auch als *Analytische Facultäten* oder $\Pi$-*Functionen*) bezeichnet, lässt sich entweder nach den Methoden der älteren Analysis auf der Grundlage eines definirenden analytischen Ausdruckes oder — mehr im Sinne der neueren Functionentheorie — mit Benutzung von definirenden Functionalgleichungen und allgemeinen Functionaleigenschaften aufbauen. Sieht man von dieser letzteren Methode hier ab*), so bieten sich als Ausgangspunkt noch zwei

*) Zu den verhältnissmässig wenig zahlreichen Arbeiten, welche diese functionentheoretische Methode befolgen, gehört ausser der berühmten Abhandlung des Herrn Weierstrass über die „*Analytischen Facultäten*" (Crelle's Journal, Bd. 51) ein sehr beachtenswerther Aufsatz von Herrn Prym: „*Zur Theorie der Gamma-Functionen*" (Crelle's Journal, Bd. 82, S. 165 ff.); ferner die Hankel'sche Habilitations-Schrift: „*Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments*" (Leipzig 1863), welche jedoch zum Theil auf falschen Praemissen beruht und in Folge dessen in ihren Hauptresultaten hinfällig ist. Der Grundfehler des Ganzen liegt in der Benutzung des folgenden Satzes zum Beweise der *eindeutigen* Bestimmtheit von $\Gamma(x)$ durch gewisse Grundeigenschaften:

„*Eine monodrome, stetige, für alle endlichen Werthe des Argumentes von Null und Unendlich verschiedene Function von $x$, die den Gleichungen $\varphi(x+1)=\varphi(x)$ $\varphi(0)=1$ genügt und auf einer endlichen Strecke der reellen Axe reell bleibt, ist eine Constante $\varphi(x)=1$.*" (a. a. O. S. 15. 16). Dieser Satz ist falsch: den Bedingungen desselben genügt nämlich offenbar jede Exponentialgrösse der Form: $\varphi(x)=e^{\psi(x)}$, wo $\psi(0)=0$ und $\psi(x)$ im übrigen eine monodrome, im Endlichen stets endliche und stetige Function bedeutet, die für reelle $x$ selbst reell ist und die Periode 1 besitzt — wie z. B. $\psi(x)=G(\sin 2\pi x)$, wo $G(x)$ eine algebraische oder transcendente ganze Function ohne constantes Glied bezeichnet. — Soll der obige Satz richtig sein, so muss zu den angegebenen Voraussetzungen noch die hinzukommen, dass auch $\varphi(\infty)$ endlich und bestimmt sein soll: hierdurch verliert aber dann der Satz vollständig seine Brauchbarkeit für den vorliegenden Zweck. Hankel, der seinen Irrthum später selbst erkannt hat, gesteht dies auch ausdrücklich zu. (Schlömilch, Zeitschr. für Math. Jahrg. IX, S. 5). Dagegen hat es keinerlei Schwierigkeit, das Hankel'sche Verfahren mit Benützung derjenigen Principien zu rectificiren, welche Herr Weierstrass in seiner Abhandlung: „*Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*" (Abh. der Berl. Academie 1876) gegeben hat.

fundamental verschiedene Definitionen dar: die (beiläufig bemerkt, um ein Jahr ältere) Gauss'sche durch ein schon bei Euler vorkommendes unendliches Product*) und die Legendre'sche durch ein ebenfalls von Euler herrührendes bestimmtes Integral**). Hat nun auch die Gauss'sche Definition auf die oben erwähnte *functionentheoretische* Behandlung unserer Transcendenten zweifellos einen sehr wesentlichen Einfluss ausgeübt, so ist in der gesammten übrigen, äusserst umfangreichen Literatur über diesen Gegenstand die Legendre'sche Definition nicht nur bevorzugt, sondern — mit verschwindenden Ausnahmen***) — geradezu ausschliesslich acceptirt worden; ja es scheint sogar, dass Gauss selbst späterhin die Integraldefinition als zweckmässiger erachtet hat: wenigstens enthält das in seinem Nachlasse vorgefundene gedruckte Handexemplar der Abhandlung *Disquisitiones generales circa seriem etc.*, wie Herr Schering als Herausgeber des bezüglichen Nachlasses mittheilt†), die ausdrückliche Aufzeichnung: „*Die beste Definition von* $\Pi m$ *ist, dass*

$$\Pi m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(m+1)x} e^{-e^x} dx.“$$

(NB. Dieselbe geht aus der entsprechenden Legendre'schen

$$\int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^m dx$$

hervor, wenn man $e^{-e^x}$ an Stelle der Integr.-Variablen $x$ einführt.)

Der Grund dieser Erscheinung dürfte darin zu suchen sein, dass die *wesentlichste* Bedeutung der $\Gamma$-Functionen in ihren mannigfaltigen

---

*) Euler giebt das betreffende Product als Lösung der Aufgabe, die Reihe $1, 1.2, 1.2.3, \ldots$ zu interpoliren, d. h. also als Verallgemeinerung von $z!$ — für andere als ganzzahlige positive Werthe von $n$ — und zwar im *Cap. XVII* seiner *Instit. Calc. diff.* (S. 834); bei Gauss erscheint es dann als Definition einer neuen Transcendenten $\Pi(z)$ (welche mit dem Legendre'schen $\Gamma(z+1)$ identisch ist) in der 1813 publicirten Abhandlung: *Disquisitiones generales circa seriem etc.* (Ges. W. Bd. III, S. 145, Art. 20).

**) Legendre definirt das von Euler lediglich für *rationale* Werthe von $a$ behandelte Integral $\int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{a-1} dx$ für *beliebige* positive $a$ als eine Function der reellen Variablen $a$, welche er mit $\Gamma(a)$ bezeichnet: zum ersten Male in dem 1814 veröffentlichten 4ten Theile seiner *Exercices de Calcul intégral* (T. II, p. 4)

***) Trotz der grossen Zahl von Abhandlungen und Compendien, welche ich über diesen Gegenstand consultirt habe, ist mir nur ein kleiner Aufsatz des Herrn Liouville (Journal de Mathématiques, T. XVII p. 448) begegnet, welcher von der Gauss'schen Definition ausgeht (a. a. O. p. 451).

†) Ges. W. Bd. III, S. 230.

Beziehungen zur Integralrechnung und deren unmittelbaren Anwendungen liegt. Auf der anderen Seite ist aber nicht zu verkennen, dass die Gauss'sche Definition nicht nur den Vorzug grösserer Allgemeinheit besitzt (wegen der Möglichkeit, der Variablen alle möglichen reellen und complexen Werthe beizulegen), sondern — was noch stärker in's Gewicht fällt — dass sie auch gestattet, die gesammte Theorie weit kürzer und einheitlicher darzustellen, als dies mit den Mitteln der Integralrechnung allein möglich ist: an die Stelle einer Reihe von Kunstgriffen, durch welche die einzelnen Sätze der Theorie völlig unvermittelt neben einander gestellt werden, tritt bei consequenter Anwendung der Productdefinition eine allgemeine und durchsichtige Methode*).

Wägt man auf diese Weise die Vorzüge jener beiden Definitionen gegen einander ab, so dürfte vom didaktischen Standpunkt es sich am meisten empfehlen, zwar von der Integraldefinition auszugehen, sodann aber vor allem die Productentwicklung daraus abzuleiten und nunmehr die übrige Theorie auf den gewonnenen Productausdruck zu gründen. Obschon dieser Gedanke keinerlei Anspruch auf Neuheit erhebt, so ist derselbe, glaube ich, bisher nirgends mit hinreichender Consequenz durchgeführt worden; namentlich aber scheint mir von den bisher üblichen Methoden, die unendliche Productentwicklung für $\Gamma(x)$ aus der Integraldefinition herzuleiten, keine einzige mit vollkommener Natürlichkeit aus der Integraldefinition herauszuwachsen und jenes Ziel ohne Umwege zu erreichen. Ich hoffe nun, dass von den beiden bezüglichen Methoden, welche ich im Folgenden mittheile (§ 1 und § 3), besonders die erste den obigen Anforderungen möglichst entspricht, während die zweite als erhebliche Abkürzung einer bisher vielfach angewendeten, aber etwas umständlichen Herleitungsweise vielleicht ebenfalls nicht ganz ohne Interesse erscheinen mag. An die erste Methode knüpfe ich zugleich die Ableitung der wichtigeren Sätze und Formeln in übersichtlicher und den neueren analytischen Anschauungen möglichst Rechnung tragender Darstellung (§§ 1, 2). Schliesslich wird die im § 1 zur Entwicklung von $\Gamma(x)$ benutzte Methode auch auf das Euler'sche Integral erster Gattung angewendet und dessen Zusammenhang mit der Gamma-Function daraus hergeleitet (§ 4). —

*) Damit soll keineswegs gesagt sein, dass die betreffenden, lediglich auf Integraltransformationen etc. gegründeten Beweise der theoretischen Berechtigung und des Interesses entbehren: nur erscheinen dieselben bei weitem künstlicher und besitzen in Folge dessen auch geringere Ueberzeugungskraft.

## § 1.

### Erste Methode zur Entwicklung der Γ-Function in ein unendliches Product und Ableitung der daraus resultirenden Hauptformeln.

Die Γ-Function (das Euler'sche Integral zweiter Gattung) wird definirt durch die Gleichung:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha}\,\alpha^{x-1}\,d\alpha \quad (1)$$ *)

und ist hiernach für jedes endliche $x > 0$ eine eindeutige, endliche und stetige Function ihres Arguments. Durch partielle Integration ergiebt sich:

$$\Gamma(x) = \left[\frac{e^{-\alpha}\cdot\alpha^x}{x}\right]_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\alpha}\,\alpha^x\,d\alpha = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

oder:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2)$$

und durch $n$ malige Anwendung dieser Recursionsformel:

$$\Gamma(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)\,\Gamma(x) = \prod_1^n{}_\nu\,(x+\nu-1)\cdot\Gamma(x), \quad (3)$$

woraus speciell für $x = 1$ folgt:

$$\Gamma(n+1) = 1\cdot 2\cdots n \quad \text{— da: } \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-\alpha}\,d\alpha = 1. \quad (4)$$

Setzt man die Gleichung (3) in die Form

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\,\Gamma(x+n), \quad (5)$$

(wo also $n$ jede beliebig grosse ganze positive Zahl bedeutet), so wird dieselbe offenbar dazu benützt werden können, $\Gamma(x)$ durch ein unendliches Product darzustellen, sobald es gelingt $\Gamma(x+n)$ für $n = \infty$ durch bekannte Functionen von $n$ darzustellen und sodann nachzuweisen, dass die rechte Seite der Gl. (5) für $n = \infty$ convergirt. Dabei genügt es, die positive Grösse $x$ zunächst $< 1$ anzunehmen, da $\Gamma(1)$

*) Diese Form des Integrals, welche aus der bei Legendre ausschliesslich vorkommenden:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\lg\frac{1}{\beta}\right)^{x-1} d\beta$$

durch die Substitution $\beta = e^{-\alpha}$ hervorgeht, findet sich, soviel ich feststellen konnte, zum ersten Mal bei Poisson: *Mémoire sur les Intégrales définies etc.* (Journal de l'Ecole polyt. Cah. 19, p. 477).

bereits bestimmt ist, und die Formel (3) lehrt, wie man jedes Argument, das $> 1$ ist, auf ein solches zwischen 0 und 1 reduciren kann. Zerlegt man $\Gamma(x+n)$ folgendermassen:

$$\Gamma(x+n) = \int_0^n e^{-\alpha}\,\alpha^{n-1}\,\alpha^x\,d\alpha + \int_n^\infty e^{-\alpha}\alpha^{n-1}\alpha^x\,d\alpha,$$

so hat man im ersten Theilintegrale $\alpha^x < n^x$, dagegen $\alpha^x > \alpha \cdot n^{-1+x}$ (letzteres, weil $x$ ein pos. ächter Bruch und daher für $\alpha < n : \left(\frac{\alpha}{n}\right)^x > \frac{\alpha}{n}$); dagegen im zweiten Theilintegrale $\alpha^x < \alpha \cdot n^{-1+x}$ und $\alpha^x > n^x$. In Folge dessen erhält man an Stelle der obigen Gleichung die beiden Ungleichungen

$$\Gamma(x+n)\begin{cases} < n^x \int_0^n e^{-\alpha}\alpha^{n-1}\,d\alpha + n^{-1+x}\int_n^\infty e^{-\alpha}\alpha^n\,d\alpha, \\ > n^{-1+x}\int_0^n e^{-\alpha}\alpha^n\,d\alpha + n^x\int_n^\infty e^{-\alpha}\alpha^{n-1}\,d\alpha, \end{cases}$$

oder:

$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x}\begin{cases} < \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^n\,d\alpha + \int_0^n e^{-\alpha}\alpha^{n-1}\,d\alpha - \frac{1}{n}\int_0^n e^{-\alpha}\alpha^n\,d\alpha, \\ > \int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{n-1}\,d\alpha - \int_0^n e^{-\alpha}\alpha^{n-1}\,d\alpha + \frac{1}{n}\int_0^n e^{-\alpha}\alpha^n\,d\alpha. \end{cases}$$

Nun ist

$$\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{n-1}\,d\alpha = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^n\,d\alpha = \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\int_0^n e^{-\alpha}\alpha^{n-1}\,d\alpha = \left[\frac{e^{-\alpha}\alpha^n}{n}\right]_0^n + \frac{1}{n}\int_0^n e^{-\alpha}\alpha^n\,d\alpha,$$

also:

$$\int_0^n e^{-\alpha}\alpha^{n-1}\,d\alpha - \frac{1}{n}\int_0^n e^{-\alpha}\alpha^n\,d\alpha = \frac{n^{n-1}}{e^n}$$

und daher:

$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x}\begin{cases} < (n-1)! + \frac{n^{n-1}}{e^n}, \\ > (n-1)! - \frac{n^{n-1}}{e^n}, \end{cases}$$

sodass man setzen kann

(6) $$\Gamma(x+n) = (n-1)!\, n^x \{1 + \vartheta \varepsilon_n\},$$

wo $\vartheta$ einen positiven oder negativen ächten Bruch bedeutet und die Grösse

$$\varepsilon_n = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!\, e^n} = \frac{n^n}{n!\, e^n},$$

wie sich leicht zeigen lässt, für $n = \infty$ verschwindet*). Man hat nämlich

$$e^n = \sum_0^\infty{}' \frac{n^\nu}{\nu!} > \frac{n^n}{n!} + \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{n^{n+k}}{(n+k)!} + \cdots,$$

also

$$(n-1)!\, e^n > n^{n-1}\sigma_n,$$

wo

$$\sigma_n = 1 + \frac{n}{n+1} + \cdots + \frac{n^k}{(n+1)\cdots(n+k)} + \cdots$$

d. h.: $$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!\, e^n} = \varepsilon_n < \frac{1}{\sigma_n}.$$

Andererseits ist aber für jedes noch so grosse $k$

$$\sigma_n > k\, \frac{n^k}{(n+1)\cdots(n+k)} > k \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^k}$$

und somit, wenn man zunächst $k$ beliebig gross und sodann $n \geqq k^2$, also $\frac{1}{k} \geq \frac{k}{n}$, annimmt:

$$\sigma_n > k \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} > \frac{k}{e},$$

---

*) Ich bemerke beiläufig, dass der ganz ähnlich gebildete Ausdruck

$$\xi_n = \frac{n^n}{n!\, 2^n},$$

bei dem also lediglich an Stelle von $e = 2{,}718\ldots$ die Zahl 2 tritt, mit $n = \infty$ *nicht* verschwindet, sondern unendlich gross wird. Man hat nämlich

$$k(n+1-k) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad \left(1 \leq k \leq \frac{n}{2}\right),$$

also

$$(n-1)! = (2 \cdot \overline{n-1})\,(3 \cdot \overline{n-2}) \cdots < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n-2}$$

$$n!\, 2^n < 4(n+1)^{n-1}$$

$$\xi_n > \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n (n+1) > \frac{n+1}{4e}$$

d. h.

$$\xi_\infty = \infty.$$

wird also mit $k \leqq \sqrt{n}$ beliebig gross, sodass in der That $\lim \sigma_n = \infty$ und somit

$$\lim \varepsilon_n = 0 \quad (\text{für } n = \infty).$$

Mit Berücksichtigung von Gl. (6)*) geht nun die Formel (5) in die folgende über:

$$(7) \quad \Gamma(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdots n-1}{x \cdot (x+1) \cdots (x+n-1)} n^x (1 + \vartheta \varepsilon_n) \quad (-1 < \vartheta < +1),$$

in welcher $n$ beliebig gross genommen werden darf, während $\varepsilon_n$ durch Wahl hinlänglich grosser $n$ beliebig klein gemacht werden kann. Lässt man jetzt $n$ in's Unendliche wachsen, so wird

$$(8) \quad \Gamma(x) = \frac{1}{x} \lim \frac{1 \cdot 2 \cdots n-1}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)} n^x \quad (n = \infty),$$

oder indem man bemerkt, dass

$$n^x = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{n-1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{1}\right)^x \left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x$$

gesetzt werden kann:

$$(9) \quad \Gamma(x) = \frac{1}{x} \lim_{n=\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x \left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right) \cdots \left(1+\frac{x}{n-1}\right)} = \frac{1}{x} \prod_1^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^x}{1+\frac{x}{\nu}},$$

sofern dieses unendliche Product convergirt. Dass dies in der That der Fall ist — und zwar für jedes reelle oder complexe $x$ mit Ausschluss der Null und der ganzen negativen Zahlen**) — ergiebt sich am leichtesten, wenn man bildet:

$$(10) \quad \lg \Gamma(x) = -\lg x + \sum_1^\infty \left\{x \lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right) - \lg\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right\},$$

$$(10\,a) \qquad = -\lg x - x \sum_1^\infty \left\{\frac{1}{\nu} - \lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right\} + \sum_1^\infty \left\{\frac{x}{\nu} - \lg\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right\}.$$

---

*) Schreibt man Gl. (6) folgendermassen:

$$\lim \frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!\, n^x} = 1,$$

so bestimmt dieselbe mit der Gleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

zusammen offenbar die $\Gamma$-Function *vollständig*, denn man erhält aus diesen beiden Gleichungen ohne Weiteres die Product-Entwickelung (8). In dem oben citirten Aufsatze des Herrn Prym wird dieser Satz in etwas verallgemeinerter Form auf functionentheoretischem Wege bewiesen.

**) Für verschwindende oder ganzzahlige negative Werthe von $x$ wird *ein* Factor des Productes unendlich, während das Product im übrigen convergent bleibt.

Da nun für $|x| < \nu$

$$\frac{x}{\nu} - \lg\left(1+\frac{x}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{\nu^3} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{\nu^4} - \cdots,$$

also

$$\left|\frac{x}{\nu} - \lg\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right| < \frac{1}{2}\frac{|x|^2}{\nu^2}\left\{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{|x|}{\nu}+\frac{2}{4}\frac{|x|^2}{\nu^2}+\cdots\right\}$$
$$< \frac{1}{2}\cdot\frac{|x|^2}{\nu^2}\left\{1+\frac{|x|}{\nu}+\frac{|x|^2}{\nu^2}+\cdots\right\}$$
$$< \frac{1}{2}\cdot\frac{|x|^2}{\nu(\nu-|x|)},$$

so hat man für $m > |x|$

$$\sum_m^\infty{}_\nu \left|\frac{x}{\nu} - \lg\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right| < \frac{|x|^2}{2}\sum_m^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu\cdot(\nu-|x|)},$$

sodass also die Reihe $\sum\left\{\frac{x}{\nu} - \lg\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right\}$ unbedingt convergirt für alle reellen oder complexen $x$ — mit Ausschluss der negativen ganzzahligen, weil für einen Werth $x$ von der Form $(-\nu)$ ein Glied der Reihe unendlich wird. Da hieraus insbesondere auch die Convergenz der Reihe für $x = 1$ folgt, so wird man setzen können

$$(11)\quad \sum_1^\infty{}_\nu\left\{\frac{1}{\nu} - \lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right\} = \lim_{n=\infty}\left\{\sum_1^n{}_\nu \frac{1}{\nu} - \lg(n+1)\right\} = C,$$

wo $C$ einen bestimmten endlichen Werth hat und bekanntlich als die Euler'sche oder Mascheroni'sche *Constante* bezeichnet wird (man findet $C = 0{,}577215\ldots$). Durch Einführung dieser Constanten $C$ nimmt die Gl. (10a) die Form an

$$(10\text{b})\qquad \lg\Gamma(x) = -\lg x + \sum_1^\infty{}_\nu\left\{\frac{x}{\nu} - \lg\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right\} - Cx$$

und aus ihrer unbedingten Convergenz (wobei zu den bereits ausgeschlossenen negativen ganzzahligen Werthen für $x$ jetzt auch noch der Werth $x = 0$, wegen des Gliedes $\lg x$, hinzukommt) folgt unmittelbar auch diejenige der ursprünglichen Reihe (10), sowie des unendlichen Productes (9) bezw. (8). Zugleich ergiebt sich für letzteres aus (10b) noch die weitere Form*):

$$(12)\qquad \Gamma(x) = \frac{1}{e^{Cx}\cdot x\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}}} = \frac{1}{Fc(x)},$$

*) Die einzelnen Factoren sind hier *Primfunctionen* im Sinne des Herrn Weierstrass (Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen — Art. 1).

wenn man — nach Herrn Weierstrass' Vorgange für das im Nenner stehende, für $x = 0, -1, -2, \cdots$ verschwindende, für alle übrigen endlichen $x$ gegen einen endlichen Werth unbedingt convergirende Product eine besondere Bezeichnung: *Factorielle* von $x$ einführt, so dass also

$$Fc(x) = e^{Cx} x \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = \frac{1}{\Gamma(x)} \tag{13}$$

gesetzt wird.

Die Gültigkeit der in den Gleichungen (8) bis (11) enthaltenen Product- bezw. Reihenentwicklungen für $\Gamma(x)$ bezw. $\lg \Gamma(x)$ erstreckt sich ihrer Herleitung gemäss zunächst auf positive Werthe $x < 1$. Die Gültigkeit für $x = 1$ ergiebt sich ohne Weiteres aus Gl. (8) durch Vergleichung mit dem früher gefundenen Resultate $\Gamma(1) = 1$. Sodann lässt sich aber zeigen, dass das unendliche Product in Gl. (8) — und folglich auch die damit identischen in Gl. (9) und (11) — bei Vermehrung des Argumentes um ganze Zahlen derselben Recursionsformel genügt, wie die $\Gamma$-Function. Setzt man etwa für den Augenblick

$$\frac{1}{x} \lim \frac{1 \cdot 2 \cdot (n-1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} n^x = P(x),$$

so wird

$$\begin{aligned} P(x+1) &= \frac{1}{x+1} \lim \frac{1 \cdot 2 \cdots n-1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+n)} n^{x+1} \\ &= \lim \frac{1 \cdot 2 \cdots n-1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} n^x \left(\frac{n}{x+n}\right), \end{aligned}$$

also wegen $\lim \left(\frac{n}{x+n}\right) = 1$

$$P(x+1) = xP(x)$$

und allgemein

$$P(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1) \cdot P(x),$$

woraus dann die Identität von $P(x)$ und $\Gamma(x)$, da sie für $0 < x \leqq 1$ bereits feststeht, für alle positiven endlichen $x$ gefolgert werden kann. Das Product $P(x)$, dessen Convergenzgebiet, wie bemerkt, auch auf alle negativen und complexen endlichen Werthe von $x$ sich erstreckt, kann sodann dazu dienen, um die ursprünglich nur für positive $x$ definirte $\Gamma$-Function auf jenes erweiterte Gebiet fortzusetzen. (N.B. Die ursprüngliche Integraldefinition verliert ihren Sinn für alle negativen Werthe von $x$ und alle complexen mit negativem reellen Theil; für complexe $x$ mit positivem reellen Theil*) bleibt das Integral, wie sich leicht nachweisen lässt, bestimmt, endlich und gleich $P(x)$ **). —

*) Die Zulassung solcher Werthe findet sich zuerst in dem oben bereits citirten Aufsatze von Poisson. (Journ. de l'Ecole polyt. Cah. 19, p. 477).

**) Vgl. Scheeffer, Ueber einige bestimmte Integrale, betrachtet als Functionen eines complexen Parameters. (Habilitationsschrift, 1883).

Die durch Gl. (12) eingeführte Factorielle genügt — als reciproker Werth der $\Gamma$-Function — offenbar der Recursionsformel

$$Fc(x+1) = \frac{1}{x} Fc(x),$$

sodass

$$Fc(x+n) = \frac{Fc(x)}{x \cdot (x+1) \cdots (x+n-1)} \qquad Fc(n+1) = \frac{1}{n!}.$$

Man hat hiernach

$$Fc(1-x) = -\frac{1}{x} Fc(-x) = e^{-Cx} \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{\nu}\right)^{\frac{x}{\nu}}$$

und daher

$$(14) \qquad Fc(x) \cdot Fc(1-x) = x \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi},$$

oder, wenn man statt der Factoriellen $\Gamma$-Functionen einführt:

$$(15) \qquad \Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

eine weitere Hauptformel zur Berechnung der $\Gamma$-Functionen, mit deren Hülfe sich alle Argumente zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 auf solche zwischen 0 und 1 reduciren lassen

Auch die sog. Legendre'sche Reihe d. h. die Potenzreihe für $\lg \Gamma(1+x)$ lässt sich aus den bisherigen Resultaten fast ohne Rechnung herleiten*). Es ist nämlich

$$\lg \Gamma(1+x) = \lg \{x \cdot \Gamma(x)\} = \lg x + \lg \Gamma(x),$$

also nach Gl. (10b)

$$\lg \Gamma(1+x) = -\lg x + \sum_1^\infty{}_\nu \left\{\frac{x}{\nu} - \lg\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)\right\}.$$

Da $\nu \geqq 1$, so kann man unter der Voraussetzung, dass $|x| < 1$ die Logarithmen nach Potenzen von $\frac{x}{\nu}$ entwickeln:

$$\lg \Gamma(1+x) = -Cx + \sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{\nu^3} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{\nu^4} - \cdots\right)$$

und da die so entstehende Doppelreihe absolut convergirt — denn man hat ähnlich wie oben:

---

*) Dagegen verzichte ich hier auf die Herleitung des sog. Gauss'schen Theorems:

$$\prod_0^{n-1}{}_\nu \Gamma\left(x + \frac{\nu}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-nx+\frac{1}{2}} \Gamma(nx),$$

da dasselbe bereits von Gauss in der denkbar kürzesten Weise abgeleitet wurde (a. a. O. Art. 26; vgl. auch: Serret, Diff.- und Int.-Rechn., Bd. II, Art. 528).

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{2}\frac{|x|^2}{\nu^2}+\frac{1}{3}\frac{|x|^3}{\nu^3}+\frac{1}{4}\frac{|x|^4}{\nu^4}+\cdots\right)$$

$$<\sum_1^\infty \frac{1}{2}\frac{|x|^2}{\nu^2}\left(1+\frac{|x|}{\nu}+\frac{|x|^2}{\nu^2}+\cdots\right)$$

$$<\frac{|x|^2}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{\nu(\nu-|x|)},$$

so kann man sie nach Potenzen von $x$ ordnen, sodass sich ergiebt

$$(16)\quad \lg\Gamma(1+x)=-Cx+\sum_2^\infty (-1)^k\frac{1}{k}\cdot S_k x^k \quad (|x|<1),$$

wenn

$$(17)\quad \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^k}=S_k \quad (k\geqq 2)$$

gesetzt wird*). Da diese Reihe keine andere sein kann als die Maclaurin'sche, so folgt, dass:

$$(18)\quad \left(\frac{d\lg\Gamma(1+x)}{dx}\right)_{x=0}=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=\Gamma'(1)=-C,$$

$$(19)\quad \left(\frac{d^k\lg\Gamma(1+x)}{dx^k}\right)_{x=0}=(-1)^k(k-1)!\,S_k.$$

Im übrigen hätte man diese letzten Gleichungen auch durch Differentiation der unbedingt und — wie leicht zu ersehen — auch gleichmässig convergenten Reihe (10) bezw. (10b) herleiten können. Man erhält auf diese Weise die Beziehungen:

$$(20a)\quad \frac{d\lg\Gamma(x)}{dx}=-\frac{1}{x}+\sum_1^\infty\left\{\lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-\frac{1}{x+\nu}\right\}$$

$$=\sum_1^\infty\left\{\lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-\frac{1}{x+\nu-1}\right\}$$

(aus Gl. (10))

*) Die Reihe (16) ist für $x=+1$ — als alternirende Reihe mit beständig abnehmenden Gliedern — noch bedingt convergent und stellt dann — nach dem Abel-Dirichlet'schen Stetigkeitssatze — auch noch $\lg\Gamma(2)=0$ dar. In Folge dessen ergiebt sich die interessante Beziehung:

$$C=\sum_2^\infty (-1)^k\frac{1}{k}S_k=\frac{1}{2}S_2-\frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4-\cdots.$$

(20b) $$= -\frac{1}{x} + \sum_1^\infty \left\{\frac{1}{\nu} - \frac{1}{x+\nu}\right\} - C$$

$$= \sum_1^\infty \left\{\frac{1}{\nu} - \frac{1}{x+\nu-1}\right\} - C$$

(aus Gl. (10b))

und

(21) $$\frac{d^k \lg \Gamma(x)}{dx^k} = (-1)^k (k-1)! \sum_1^\infty \frac{1}{(x+\nu-1)^k},$$

welche für $x = 1$ in die Gleichungen (18), (19) übergehen und in die Maclaurin'sche Formel für $\lg \Gamma(1+x)$ eingesetzt ebenfalls die Reihe (16) liefern*). Diese letztere kann man nun bekanntlich noch stärker convergent machen, indem man zunächst schreibt:

$$\lg \Gamma(1+x) = -\lg(1+x) + (1-C)\,x + \sum_2^\infty (-1)^k \frac{1}{k} (S_k - 1)\, x^k$$

und hierauf die Reihe

$$\lg \Gamma(1-x) = -\lg(1-x) - (1-C)\,x + \sum_2^\infty \frac{1}{k} (S_k - 1)\, x^k$$

davon subtrahirt. Da nun:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(1+x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \text{(Gl. (15))}$$

und daher:

$$\lg \Gamma(1-x) = -\lg \Gamma(1+x) + \lg \frac{\pi x}{\sin \pi x},$$

so erhält man schliesslich, nachdem man noch mit dem Factor 2 dividirt:

(22) $$\lg \Gamma(1+x) = \frac{1}{2} \lg \frac{\pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x} + (1-C)\,x$$

$$- \frac{1}{2} \sum_1^\infty \frac{1}{2k+1} (S_{2k+1} - 1)\, x^{2k+1}$$

(für $|x| < 1$) — als diejenige Reihe, welche man speciell als die Legendre'sche zu bezeichnen pflegt**).

---

*) Für ein ganzzahliges Argument $x = n$ ergiebt sich noch aus Gl. (20b):

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - C$$

d. h. der logarithm. Differentialquotient von $\Gamma(x)$ ist für pos. ganzzahlige $x$ durch eine *endliche* Reihe darstellbar.

**) Legendre, *Traité des Fonctions Elliptiques et des Intégrales Eulériennes* T. II, p. 433, Art. 85.

## § 2.

### Das Gauss'sche und Dirichlet'sche Integral für $\frac{d \lg \Gamma(x)}{dx}$. — Das Cauchy'sche Integral für $\lg \Gamma(x+1)$.

Die Gleichung (20b) lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{d \lg \Gamma(x)}{dx} = -\frac{1}{x} + \lim \sum_{1}^{n-1} \left\{ \lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right) - \frac{1}{x+\nu} \right\}$$

$$= \lim \left\{ \lg n - \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{x+\nu} \right\} \quad (n = \infty).$$

Es möge jetzt wiederum $x$ reell und $> 0$ angenommen werden.

Um nun zunächst $\lg n$ und $\sum_{0}^{n-1} \frac{1}{x+\nu}$ durch bestimmte Integrale auszudrücken, hat man aus der Identität:

$$\frac{1}{z} = \int_{0}^{1} \alpha^{z-1} \, d\alpha,$$

wenn man dieselbe mit $dz$ multiplicirt und in den Grenzen 1 bis $n$ integrirt

$$\lg n = \int_{0}^{1} d\alpha \int_{1}^{n} \alpha^{z-1} \, dz = \int_{0}^{1} \frac{\alpha^{n-1} - 1}{\lg \alpha} \, d\alpha \text{ *)}$$

und andrerseits, wenn man statt $z$ $x+\nu$ schreibt und über den Index $\nu$ von 0 bis $n-1$ summirt

$$\sum_{0}^{n-1} \frac{1}{k+\nu} = \int_{0}^{1} \sum_{0}^{n-1} \alpha^{\nu+x-1} \cdot d\alpha = \int_{0}^{1} \frac{\alpha^{x-1}(1-\alpha^{n})}{1-\alpha} \, d\alpha.$$

*) Dieses Integral nimmt, wenn man $e^{-\alpha}$ statt $\alpha$ und $x$ statt $n$ schreibt, die bek. Form an:

$$\lg x = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha} - e^{-x\alpha}}{\alpha} \, d\alpha.$$

Integrirt man diese Gleichung, nachdem man mit $dx$ multiplicirt, nach $x$ in den Grenzen 1 und $x$, so wird:

$$x(\lg x - 1) + 1 = \int_{0}^{\infty} \left\{ (x-1)\, e^{-\alpha} + \frac{e^{-x\alpha} - e^{-\alpha}}{\alpha} \right\} \frac{d\alpha}{\alpha},$$

wie ich des Späteren wegen hier gleich bemerken will.

Hieraus ergiebt sich aber:

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lg\Gamma(x)}{dx} = \lim\limits_{n=\infty} \int\limits_0^1 \left\{ \dfrac{\alpha^n - 1}{\lg\alpha} - \dfrac{\alpha^{x-1}(1-\alpha^n)}{1-\alpha} \right\} d\alpha \\ \qquad = \int\limits_0^1 \left\{ \dfrac{1}{\lg\frac{1}{\alpha}} - \dfrac{\alpha^{x-1}}{1-\alpha} \right\} d\alpha - \lim\limits_{n=\infty} \int\limits_0^1 \alpha^{n-1} \left\{ \dfrac{1}{\lg\frac{1}{\alpha}} - \dfrac{\alpha^x}{1-\alpha} \right\} d\alpha \\ \qquad = P + \lim\limits_{n=\infty} R_n. \end{cases}$$

Als möglicherweise kritische Stellen für die hierbei auftretenden Integralfunctionen sind lediglich die beiden Werthe $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ zu untersuchen. Von diesen scheidet indessen der Werth $\alpha = 0$ sofort aus, da wegen $x > 0$ $\alpha^{x-1}$ (welches in $P$ vorkommt) von niedrigerer als der ersten Ordnung unendlich wird, also das betreffende Integral dadurch nicht alterirt wird, während $\alpha^x$ (in $R_n$) überhaupt nicht unendlich wird, sondern verschwindet. Um ferner das Verhalten der zu integrirenden Functionen in der Nähe von $\alpha = 1$ zu untersuchen, hat man, wenn $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet:

$$\left(\frac{1}{\lg\frac{1}{\alpha}}\right)_{\alpha=1-\varepsilon} = (-\lg(1-\varepsilon))^{-1} = \varepsilon^{-1}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \vartheta\varepsilon^2\right)^{-1}$$
$$= \varepsilon^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \vartheta'\varepsilon^2\right),$$

$$\left(\frac{\alpha^{x-1}}{1-\alpha}\right)_{\alpha=1-\varepsilon} = \varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)^{x-1} = \varepsilon^{-1}\left(1 + (x-1)\varepsilon + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}\vartheta''\varepsilon^2\right)$$

$$\left\{\frac{1}{\frac{1}{\alpha}} - \frac{\alpha^{x-1}}{1-\alpha}\right\}_{\alpha=1-\varepsilon} = \left(\frac{1}{2} - x\right) + \left(\vartheta' - \frac{(x-1)(x-2)}{2}\vartheta''\right)\varepsilon$$

d. h. die betrachtete Function bleibt bei der Annäherung von $\alpha$ an den Werth 1 endlich, und zwar convergirt sie für $\alpha = 1$ gegen den Werth $\frac{1}{2} - x$. Hieraus folgt aber zunächst, dass das Integral $P$ endlich und bestimmt ist.

Da ferner die soeben benützte Reihenentwicklung — wenn man dabei $x$ statt $x - 1$ setzt — auch auf den in $R_n$ auftretenden Factor $\left\{\frac{1}{\lg\frac{1}{\alpha}} - \frac{\alpha^x}{1-\alpha}\right\}$ Bezug hat, so ergiebt sich, dass derselbe im ganzen Integrationsintervalle nirgends unendlich wird, sodass man — wenn $M$ einen endlichen Mittelwerth bezeichnet — setzen kann:

$$R_n = M\int_0^1 \alpha^{n-1}\,d\alpha = \frac{M}{n}.$$

also $$\lim R_n = 0 \quad (n = \infty).$$

Somit liefert die Gleichung (23) die folgende — soviel ich weiss, zuerst von Gauss abgeleitete*) Integral-Darstellung

$$\frac{d \lg \Gamma(x)}{dx} = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\lg \frac{1}{\alpha}} - \frac{\alpha^{x-1}}{1-\alpha} \right\} d\alpha. \tag{24a}$$

Setzt man darin $\alpha$ statt $\lg \frac{1}{\alpha}$, also $e^{-\alpha}$ statt $\alpha$, so nimmt dieselbe die ebenfalls von Gauss**) gegebene Form an:

$$\frac{d \lg \Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-x\alpha}}{1-e^{-\alpha}} \right\} d\alpha. \tag{24b}$$

Schliesslich ergiebt sich, wenn man den zweiten Bestandtheil dieses Integrals in der Weise transformirt, dass man $(1+\alpha)$ statt $e^{\alpha}$ setzt, die von Dirichlet herrührende Gleichung:***)

$$\frac{d \lg \Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha(1+\alpha)^x} \right\} d\alpha \tag{24c}$$

$$= \int_0^\infty \left\{ e^{-\alpha} - (1+\alpha)^{-x} \right\} \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Obschon die einzelnen Bestandtheile der Integrale (24b), (24c) wegen der unteren Grenze 0 divergent sind, so ist diese Transformation doch gestattet. Man kann nämlich zunächst, wenn $\delta$ beliebig klein gegeben wird, eine endliche Grösse $\varepsilon$ so bestimmen, dass

$$\int_0^\varepsilon \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-x\alpha}}{1-e^{-\alpha}} \right\} d\alpha$$

und

$$\int_0^\varepsilon \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{(1+\alpha)^{-x}}{\alpha} \right\} d\alpha$$

absolut genommen kleiner als $\delta$ werden. Die Integrale

*) Ges. W. Bd. 3 S. 159, Gleichung [77]. Gauss setzt bekanntlich:

$$\frac{d \lg \Pi(x)}{dx} = \frac{d \lg \Gamma(x+1)}{dx} = \Psi(x).$$

**) a. a. O. S. 160, Gleichung [78].

***) Crelle's Journal, Bd. 15, S. 260, Gleichung 10. Dort ist auch die Zulässigkeit dieser Transformation (oder vielmehr der inversen, welche Gleichung (24c) in (24b) überführt) besonders motivirt.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x\alpha}}{1-e^{-\alpha}} d\alpha \quad \int_0^\infty \frac{(1+\alpha)^{-x}}{\alpha} d\alpha$$

sind dann sämmtlich endlich und bestimmt. Man hat nun, wenn man in dem mittleren dieser Integrale $1 + \alpha$ für $e^\alpha$ schreibt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x\alpha}}{1-e^{-\alpha}} d\alpha = \int_{e^\varepsilon-1}^\infty \frac{(1+\alpha)^{-x}}{\alpha} d\alpha = \int_{\varepsilon+\vartheta\varepsilon^2}^\infty \frac{(1+\alpha)^{-x}}{\alpha} d\alpha \qquad (0<\vartheta<1)$$

und daher

$$\int_0^\infty \left\{\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-x\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\right\} d\alpha = \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{(1+\alpha)^{-x}}{\alpha}\right\} d\alpha + \int_0^{\varepsilon+\vartheta\varepsilon^2} \frac{(1+\alpha)^{-x}}{\alpha} d\alpha$$

oder da:

$$\int_0^{\varepsilon+\vartheta\varepsilon^2} \frac{(1+\alpha)^{-x}}{\alpha} d\alpha < \vartheta \cdot \varepsilon^2 \cdot \frac{(1+\varepsilon)^{-x}}{\varepsilon} < \vartheta\varepsilon$$

mit $\varepsilon$ selbst beliebig klein wird, schliesslich:

$$\int_0^\infty \left\{\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-x\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\right\} d\alpha = \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{(1+\alpha)^{-x}}{\alpha}\right\} d\alpha,$$

womit die Richtigkeit der Gleichung (24c) streng erwiesen ist.

Jedes der drei Integrale (24a, b, c) besteht aus zwei heterogenen und, einzeln genommen, divergenten Bestandtheilen: einer unendlich grossen Constanten und einer ebenfalls unendlich grossen Function von $x$. Die hier gegebene Ableitung dieser Integrale hat nun den Vorzug, dass sie die Provenienz dieser beiden Bestandtheile deutlich erkennen lässt: der constante Theil entspricht nämlich genau dem divergenten Bestandtheile $\sum_1^\infty \lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$, der veränderliche dem ebenfalls divergenten Bestandtheile $\sum_0^\infty \frac{1}{x+\nu}$ in der Reihenentwicklung von $\frac{d \lg \Gamma(x)}{dx}$.

Setzt man in den Gleichungen (24a, b, c) $x = 1$, so ergeben sich, da nach Gleichung (18) $\left(\frac{d \lg \Gamma(x)}{dx}\right)_{x=1} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = -C$, für die Euler'sche Constante die Integralausdrücke

$$(25)\qquad C = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \left\{ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\lg \frac{1}{\alpha}} \right\} d\alpha, \\ \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right\} e^{-\alpha}\, d\alpha, \\ \displaystyle\int_0^\infty \left\{ (1+\alpha)^{-1} - e^{-\alpha} \right\} \frac{d\alpha}{\alpha}. \end{cases}$$

Durch Addition dieser Gleichungen zu den bezüglichen Gleichungen (24a, b, c) nehmen dieselben diejenige Form an, welche der Reihendarstellung

$$\frac{d \lg \Gamma(x)}{dx} = \sum_1^\infty \left( \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu + x - 1} \right) - C \quad \text{(Gl. (20b))}$$

entspricht, und die man auch — analog wie oben — direct daraus herleiten könnte, nämlich:

$$(26)\qquad \frac{d \lg \Gamma(x)}{dx} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\alpha^{x-1}}{1-\alpha}\, d\alpha - C, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - \alpha^{-x\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\, d\alpha - C, \\ \displaystyle\int_0^\infty \left\{ (1+\alpha)^{-1} - (1+\alpha)^{-x} \right\} \frac{d\alpha}{\alpha} - C. \end{cases}$$

Durch $(k-1)$-malige Differentiation der Gleichungen (26) ergiebt sich (für $k \geq 2$):

$$(27)\qquad \frac{d^k \lg \Gamma(x)}{dx^k} = -\int_0^1 \frac{\lg^{k-1} \alpha \cdot \alpha^{x-1}}{1-\alpha}\, d\alpha = (-1)^k \int_0^\infty \frac{\alpha^{k-1} \cdot e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\, d\alpha$$

$$= (-1)^k \int_0^\infty \frac{\lg^{k-1}(1+\alpha)}{\alpha (1+\alpha)^x}\, d\alpha$$

und hieraus für $x = 1$, mit Berücksichtigung von Gleichung (19):

$$(28)\qquad \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^1 \frac{\lg^{k-1}\alpha}{1-\alpha}\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \frac{\alpha^{k-1}}{e^\alpha - 1}\,d\alpha.$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \frac{\lg^{k-1}(1+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)}\,d\alpha$$

welche letzteren Gleichungen, sobald man darin $\Gamma(k)$ statt $(k-1)!$ schreibt, übrigens nicht nur für ganzzahlige $k \geq 2$, sondern für alle positiven $k > 1$ gelten. Dies zeigt sich sofort, wenn man aus

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-\alpha}\cdot\alpha^{k-1}\,d\alpha = \nu^k\int_0^\infty e^{-\nu\alpha}\alpha^{k-1}\,d\alpha$$

bildet

$$\sum_1^n \frac{1}{\nu^k} = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty\left(\alpha^{k-1}\,d\alpha\sum_1^n e^{-\nu\alpha}\right),$$

woraus sich unter der Voraussetzung, dass $k > 1$, für $n = \infty$ in der That ergiebt

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^k} = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^\infty \frac{\alpha^{k-1}\cdot e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\,d\alpha = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^\infty \frac{\alpha^{k-1}}{e^\alpha - 1}\,d\alpha.$$

Ich übergehe die verschiedenen Integraldarstellungen für $\lg\Gamma(x)$, welche sich unmittelbar durch Integration der Gleichungen (24) und (26) nach $x$ ergeben.*) Hingegen will ich noch das Cauchy'sche Integral für $\lg\Gamma(k+1)$ hier ableiten, da sich die hierbei vorkommende Constantenbestimmung etwas kürzer und übersichtlicher gestalten lässt, wie dieselbe durch Cauchy und Stern gegeben worden ist.**) Schreibt man in Gleichung (24b) $x+1$ statt $x$, so wird:

$$\frac{d\lg\Gamma(k+1)}{dx} = \int_0^\infty\left\{\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-x\alpha-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\right\}d\alpha = \int_0^\infty\left\{\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-x\alpha}}{e^\alpha - 1}\right\}d\alpha$$

oder:

---

*) Cf. G. F. Meyer, Vorlesungen über best. Integrale, S. 131.

**) Cauchy, Exerc. d'Analyse et de Physique Math., T. II, p. 386. Stern, in den Göttinger Studien, 1847, S. 306. — G. F. Meyer, a. a. O. S. 133 ff. —

$$\frac{d \lg \Gamma(x+1)}{dx} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x\alpha} d\alpha + \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-x\alpha}}{\alpha} d\alpha$$

$$+ \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right\} e^{-x\alpha} d\alpha$$

$$= \frac{1}{2x} + \lg x - \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right\} e^{-x\alpha} d\alpha$$

und mithin, wenn man nach $x$ in den Grenzen 1 und $x$ integrirt:

$$\lg \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \lg x + x(\lg x - 1) + \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right\} \frac{e^{-x\alpha}}{\alpha} d\alpha$$

$$+ 1 - \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right\} \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha.$$

Um das constante Integral auszuwerthen setze man $x = \frac{1}{2}$, wobei zu beachten, dass:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$\left(\text{da sich aus Gleichung (15) für } x = \frac{1}{2} \text{ ergiebt } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi\right)$, und somit:

$$\lg \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \lg \pi = \tfrac{1}{2} \lg \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\lg \tfrac{1}{2} - 1\right) + \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right\} \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\alpha} d\alpha$$

$$+ 1 - \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right\} \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha$$

oder, wenn man in dem letzten Integrale $\frac{\alpha}{2}$ statt $\alpha$ einführt und

$\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + 1}{e^\alpha - 1}$ setzt:

$$0 = \frac{1}{2} \lg \pi - \frac{1}{2} + \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\alpha} \right\} d\alpha.$$

Addirt man diese Gleichung zu der oben gefundenen für $\lg \Gamma(x+1)$, so nimmt das constante Glied darin die Form an:

$$\frac{1}{2}\lg\pi+\frac{1}{2}+\int_0^\infty\left\{\frac{1-e^{-\alpha}}{e^\alpha-1}+\frac{e^{-\alpha}-e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\alpha}-\frac{1}{2}e^{-\alpha}\right\}\frac{d\alpha}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\lg\pi+\frac{1}{2}-\int_0^\infty\left\{-\frac{1}{2}e^{-\alpha}+\frac{e^{-\frac{\alpha}{2}}-e^{-\alpha}}{\alpha}\right\}\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Das letzte Integral hat aber den Werth

$$\frac{1}{2}\left(\lg\frac{1}{2}-1\right)+1=-\frac{1}{2}\lg 2+\frac{1}{2}$$

(s. die Anmerkung zu Anfang dieses Paragraphen, wo in dem letzten Integral nur $x=\frac{1}{2}$ zu setzen ist), mithin ergiebt sich als Gesammtwerth dieser Constanten $\frac{1}{2}\lg\pi+\frac{1}{2}\lg 2=\frac{1}{2}\lg 2\pi$, und man erhält schliesslich die Cauchy'sche Gleichung:

$$\lg\Gamma(x+1)=\frac{1}{2}\lg 2\pi x+x(\lg x-1)+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{e^\alpha-1}-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}\right\}\frac{e^{-x\alpha}}{\alpha}d\alpha. \tag{29}$$

Dieselbe liefert bekanntlich durch Einsetzen der Partialbruchentwicklung

$$\frac{1}{e^\alpha-1}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}+2\sum_1^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2+4\nu^2\pi^2}$$

die sogenannte Stirling'sche Reihe zur Berechnung von $\lg\Gamma(x+1)$.*)

## § 3.

### Andere Methode zur Herleitung der Productentwicklung für $\Gamma(x)$.

Den Ausgangspunkt dieser zweiten Methode bildet wiederum — wie in § 1 — die Recursionsformel Gleichung (5):

$$\Gamma(x)=\prod_1^n\nu\cdot\frac{1}{x+\nu-1}\cdot\Gamma(x+n).$$

Während jedoch dort die weitere Entwicklung auf der Grenzbestimmung von $\Gamma(x+n)$ für $n=\infty$ beruhte, so soll hier die analoge Grenzbestimmung für das logarithmische Differential von $\Gamma(x+n)$ zu

*) Cf. G. F. Meyer, a. a. O. S. 141 ff.

Grunde gelegt werden. Man hat zunächst, wenn man die obige Gleichung logarithmisch differenzirt:

$$(30) \qquad \frac{d \lg \Gamma(x)}{dx} = -\sum_{1}^{n} \frac{1}{x+\nu-1} + \frac{\Gamma'(x+n)}{\Gamma(x+n)}.$$

Andererseits lässt sich das logarithmische Differential von $\Gamma(x)$ durch ein bestimmtes Integral darstellen: natürlich kann hierbei die im vorigen Paragraphen gegebene Ableitung dieser Integraldarstellung nicht benutzt werden, da dieselbe gerade auf der Productentwicklung für $\Gamma(x)$ beruhte. Man findet indessen nach Dirichlet*) aus:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \cdot \alpha^{x-1} \lg \alpha \cdot d\alpha \qquad (x>0)$$

wenn man $\lg \alpha$ durch das gleichwerthige Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-\beta} - e^{-x\beta}}{\beta} d\beta$ ersetzt und die Integrationsfolge vertauscht**) — unmittelbar:

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x) \int_0^\infty \{e^{-\beta} - (1+\beta)^{-x}\} \frac{d\beta}{\beta} \text{***)}$$

und wenn man im zweiten Theile dieses Integrales $1+\beta = e^{-\alpha}$, im ersten $\beta = \alpha$ setzt (was gestattet ist, wie im § 2 gelegentlich der Gleichungen (24b), (24c) gezeigt wurde):

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-x\alpha}}{1-e^{-\alpha}} \right\} d\alpha = \lg x + \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1-e^{-\alpha}} \right\} e^{-x\alpha} d\alpha.$$

Folglich hat man

$$(31) \qquad \frac{\Gamma'(x+n)}{\Gamma(x+n)} = \lg(x+n) + \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1-e^{-\alpha}} \right\} e^{-(x+n)\alpha} d\alpha = \lg n + \varepsilon_n,$$

wo

$$\varepsilon_n = \lg\left(1+\frac{x}{n}\right) + \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1-e^{-\alpha}} \right\} e^{-(x+n)\alpha} d\alpha.$$

---

*) Crelle's Journal, Bd. 15, S. 260.

**) Ueber die Zulässigkeit dieser Vertauschung s. Harnack, Elemente der Diff.- und Integr.-Rechnung, S. 300, § 162.

***) Bisher wurde diese Relation nur in der Weise für die Productentwicklung verwerthet, dass man daraus durch Differentiation einen Integralausdruck für $\frac{d^2 \lg \Gamma(x)}{dx^2}$ herleitete, welcher nach Einführung einer neuen Integrationsvariablen eine Reihenentwicklung gestattet; aus dieser wird dann durch zweimalige Integration und geeignete Constantenbestimmung eine Reihe für $\lg \Gamma(x)$ gewonnen u. s. f. — vgl. Serret, Diff. und Integr.-Rechnung, Bd. II, Art. 521. —

Nun ist leicht zu zeigen, dass $\varepsilon_n$ für hinlänglich grosse Werthe von $n$ beliebig klein gemacht werden kann. Zunächst hat man (da $x>0$):

$$\lg\left(1+\frac{x}{n}\right)<\frac{x}{n}.$$

Da ferner $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$ für keinen Werth $\alpha$ im ganzen Integrationsintervalle unendlich wird (auch nicht für $\alpha=0$: denn

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{1-e^{-\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\left\{1-\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2!}+\frac{\alpha^2}{3!}-\cdots}\right\}=\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{\alpha}{2}+c\alpha^2+\cdots\right\}$$

convergirt mit $\alpha$ stetig gegen $\frac{1}{2}$), so muss dieser Ausdruck innerhalb des Intervalles $(0\ldots\infty)$ ein endliches, numerisches Maximum besitzen, dessen absoluter Werth mit $M$ bezeichnet werden möge. Alsdann wird aber:

$$\text{abs.}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\right\}e^{-(x+n)\alpha}\,d\alpha<M\int_0^\infty e^{-n\alpha}\,.\,d\alpha<\frac{M}{n}.$$

Daraus ergiebt sich, dass:

$$|\varepsilon_n|<\frac{1}{n}(x+M)$$

und, wie ich des folgenden wegen gleich bemerken will:

$$\text{abs.}\int_a^x\varepsilon_n\,dx<\frac{1}{n}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{2}+M(x-a)\right)$$

d. h. man hat für jedes endliche positive $x$

$$\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0\quad\text{und}\quad\lim_{n=\infty}\int_a^x\varepsilon_n\,dx=0.$$

Mit Hülfe der Beziehung (31) lässt sich jetzt Gleichung (30) folgendermassen schreiben:

$$\frac{d\lg\Gamma(x)}{dx}=-\sum_1^n\frac{1}{x+\nu-1}+\lg n+\varepsilon_n \tag{32}$$

oder, indem man $n$ ins Unendliche wachsen lässt:

$$\frac{d\lg\Gamma(x)}{dx}=\lim_{n=\infty}\left\{-\sum_1^n\frac{1}{x+\nu-1}+\lg n\right\}.$$

Integrirt man ferner Gleichung (32) nach $x$ in den Grenzen 1 und $x$, so wird

$$\lg\Gamma(x)=\sum_1^n\{\lg\nu-\lg(x+\nu-1\}+(x-1)\lg n+\int_1^x\varepsilon_n\,dx$$

oder auch, für $n = \infty$:

$$\lg \Gamma(x) = \lim_{n=\infty}\left[\sum_1^n \{\lg \nu - \lg(x+\nu-1)\} + (x-1)\lg n\right]$$

d. h.

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty}\left\{\prod_1^n \frac{\nu}{x+\nu-1}\, n^{x-1}\right\} = \frac{1}{x}\lim_{n=\infty}\left\{\prod_1^{n-1}\frac{\nu}{\nu+x}\, n^x\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\prod_1^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^x}{1+\frac{x}{\nu}}.$$

Man kann auch die rechte Seite der Gleichung (32) von vornherein so umformen, dass sie für $n = \infty$ die Form einer unbedingt und gleichmässig convergirenden, also gliedweise integrirbaren Reihe annimmt. Man hat zunächst

$$\frac{d\lg\Gamma(x)}{dx} = -\frac{1}{x} - \sum_1^{n-1}\left(\frac{1}{x+\nu} - \frac{1}{\nu}\right) + \left(\lg n - \sum_1^{n-1}\frac{1}{\nu}\right) + \varepsilon_n$$

und wenn man wiederum (wie in Gleichung (11))

$$\lim_{n=\infty}\left\{\sum_1^{n-1}\frac{1}{\nu} - \lg n\right\} = \lim_{n=\infty}\sum_1^{n-1}\left\{\frac{1}{\nu} - \lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right\}$$

$$= \sum_1^\infty \left\{\frac{1}{\nu} - \lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right\} = C$$

setzt:

$$\frac{d\lg\Gamma(x)}{dx} = -C - \frac{1}{x} - \sum_1^\infty\left(\frac{1}{x+\nu} - \frac{1}{\nu}\right),$$

woraus durch Integration nach $x$ in den Grenzen 0 und 1:

$$\lg\Gamma(x) = -(x-1)C - \lg x - \sum_1^\infty\left\{\lg(\nu+x) - \lg(\nu+1) - (x-1)\frac{1}{\nu}\right\}$$

$$= -(x-1)C - \lg x - \sum_1^\infty\left\{\lg(\nu+x) - \lg\nu - \frac{x}{\nu}\right\}$$

$$- \sum_1^\infty\left\{\frac{1}{\nu} - \lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right\}$$

$$= -Cx - \lg x - \sum_1^\infty\left\{\lg\left(1+\frac{x}{\nu}\right) - \frac{x}{\nu}\right\}$$

und daher

$$\Gamma(x) = \frac{1}{e^{Cx}\, x \prod_1^\infty \left(1+\frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}}}$$

übereinstimmend mit Gleichung (12). —

## § 4.

## Das Euler'sche Integral erster Gattung.

Das Euler'sche Integral erster Gattung

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{\alpha^{x-1}}{(1+\alpha)^{x+y}}\, d\alpha \quad (33)$$

*) ist endlich und bestimmt, sobald $x > 0$, $y > 0$, und nimmt durch die Substitutionen $x = \frac{\beta}{1-\beta}$, $\beta = 1-\gamma$ — wenn statt $\beta$ und $\gamma$ schliesslich wieder $\alpha$ geschrieben wird, die Formen an:

$$(34)\begin{cases} \text{(a)} \quad B(x,y) = \int_0^1 \alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-1}\, d\alpha \\ \text{(b)} \quad = \int_0^1 \alpha^{y-1}(1-\alpha)^{x-1}\, d\alpha = B(y,x) = \int_0^\infty \frac{\alpha^{y-1}}{(1+\alpha)^{x+y}}\, d\alpha. \end{cases}$$

Schreibt man:

$$B(x,y) = \int_0^1 \alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-1}(1-\alpha+\alpha)\, d\alpha$$
$$= B(x,y+1) + B(x+1,y)$$

und bemerkt, dass:

$$B(x+1,y) = \int_0^1 \alpha^{x}(1-\alpha)^{y-1}\, d\alpha$$
$$= \left[\frac{-\alpha^x(1-\alpha)^y}{y}\right]_0^1 + \frac{x}{y}\int_0^1 \alpha^{x-1}(1-\alpha)^y\, d\alpha,$$
$$= \frac{x}{y} B(x,y+1)$$

so ergiebt sich die fundamentale Recursionsformel:

$$B(x,y) = \frac{x+y}{y} B(x,y+1) = \frac{x+y}{x} B(x+1,y). \quad (35)$$

*) Die Bezeichnung $B(x,y)$ stammt von Binet: *Mémoire sur les Intégrales Eulériennes.* (Journal de l'École polyt. Cah. 27, p. 131). Legendre bezeichnet das betreffende Integral mit $(x,y)$.

Durch $n$-malige Anwendung dieser Gleichung erhält man:

$$(36)\quad B(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+n-1)}{y\cdot(y+1)\cdots(y+n-1)}\cdot B(x,y+n)$$
$$= \frac{x+y}{y}\prod_{1}^{n-1}{}_{\nu}\frac{x+y+\nu}{y+\nu}\cdot B(x,y+n).$$

Um aus dieser Gleichung eine unendliche Productentwicklung für $B(x,y)$ zu gewinnen, hat man nur das Verhalten von $B(x,y+n)$ für unbegrenzt wachsende $n$ zu untersuchen.

Da nun aus der definirenden Gleichung (34a) ohne weiteres folgt, dass für jedes positive $h$

$$B(x,y) > B(x,y+h),$$

so hat man, wenn $p$ die kleinste ganze Zahl bedeutet, die $\geq y$ ist:

$$B(x,n) > B(x,y+n) > B(x,p+n)$$

oder:

$$1 > \frac{B(x,y+n)}{B(x,n)} > \frac{B(x,p+n)}{B(x,n)}.$$

Nun folgt aus Gleichung (36), wenn man dieselbe umkehrt und $y=1$, $n=m-1$ setzt:

$$B(x,m) = \frac{1\cdot 2\cdots(m-1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}\,B(x,1)$$

oder, da sich unmittelbar

$$B(x,1) = \int_0^1 \alpha^{x-1}\,d\alpha = \frac{1}{x}$$

ergiebt:

$$(37)\quad B(x,m) = \frac{1}{x}\prod_{1}^{m-1}{}_{\nu}\frac{\nu}{x+\nu}.$$

Mit Benutzung dieses Resultates geht die oben gefundene Ungleichung über in:

$$1 > B(x,y+n)\cdot x\prod_{1}^{n-1}{}_{\nu}\frac{x+\nu}{\nu} > \frac{n\cdot(n+1)\cdots(n+p-1)}{(x+n)(x+n+1)\cdots(x+n+p-1)}$$
$$> \left(\frac{n}{x+n}\right)^p = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-p} = 1-\vartheta\frac{px}{n}$$
$$(0<\vartheta<1),$$

sodass man setzen kann

$$(38)\quad B(x,y+n)\cdot x\prod_{1}^{n-1}{}_{\nu}\frac{x+\nu}{\nu} = 1-\varepsilon_n,$$

wo

$$\varepsilon_n = \vartheta' \frac{px}{n} \quad (0 < \vartheta' < \vartheta < 1),$$

also

$$\lim \varepsilon_n = 0 \ (n = \infty).$$

Mithin lässt sich jetzt Gleichung (36) folgendermassen schreiben:

$$B(x, y) = \frac{x+y}{xy} \prod_1^{n-1} {}_\nu \frac{\nu \cdot (x+y+\nu)}{(x+\nu)(y+\nu)} (1 - \varepsilon_n)$$

oder auch, indem man $n$ ins Unendliche wachsen lässt:

$$(39\text{a}) \quad B(x,y) = \frac{x+y}{xy} \prod_1^{\infty} {}_\nu \frac{\nu(x+y+\nu)}{(x+\nu)(y+\nu)} = \frac{x+y}{xy} \prod_1^{\infty} {}_\nu \frac{\left(1+\frac{x+y}{\nu}\right)}{\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\left(1+\frac{y}{\nu}\right)}.$$

Die Convergenz dieses Productes erkennt man auf Grund des in § 1 gesagten unmittelbar, wenn man dasselbe in die Form setzt:

$$(39\text{b}) \quad B(x, y) = \frac{x+y}{xy} \frac{\prod \left(1+\frac{x+y}{\nu}\right) e^{-\frac{x+y}{\nu}}}{\prod \left(1+\frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} \prod \left(1+\frac{y}{\nu}\right) e^{-\frac{y}{\nu}}} \quad (\nu = 1 \cdots \infty)$$

wo dann jedes dieser Theilproducte einzeln unbedingt convergirt — und zwar nicht nur für positive Werthe von $x$ und $y$, sondern auch für alle negativen und complexen, sofern nicht gerade $x$ oder $y$ oder $(x+y)$ der Null oder einer ganzen negativen Zahl gleich wird. (NB. Das Product hat den Werth $\infty$, wenn mindestens eine der Variablen $x, y$ verschwindet oder negativ ganzzahlig wird; es hat den Werth Null, wenn das analoge lediglich von der Summe $(x+y)$ gilt). Die Gleichung (39b) bez. (39a) kann hiernach wiederum — analog wie die Productentwicklung für $\Gamma(x)$ — als erweiterte Definition der Function $B(x, y)$ angesehen werden. Zugleich ergiebt sich aus Gleichung (39b) durch Vergleichung mit (12) (13) die wichtige Beziehung

$$(40) \qquad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{Fc(x+y)}{Fc(x)\,Fc(y)}.$$

Setzt man speciell $y = 1 - x$, so wird mit Berücksichtigung von Gleichung (15):

$$(41\text{a}) \qquad B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \text{(für beliebige complexe } x)$$

und falls $x$ und $(1-x)$ beide positiv, d. h. $x$ ein positiver echter Bruch:

$$(41\text{b}) \qquad \int_0^1 \frac{\alpha^{x-1}}{1+\alpha} d\alpha = \int_0^1 \frac{\alpha^{-x}}{1+\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (0 < x < 1).$$

Bezeichnet ferner $n$ eine positive ganze Zahl, so folgt aus Gleichung (40) mit Berücksichtigung von Gleichung (6)

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!} B(x, n) = (1 + \vartheta \varepsilon_n) \cdot n^x B(x, n)$$

oder auch:

$$\Gamma(x) = \lim n^x B(x, n) \tag{42}$$

eine Relation, die sich für $x > 0$ auch an den betreffenden Integraldefinitionen verificiren lässt und alsdann zur Ableitung der Productentwicklung von $\Gamma(x)$ aus derjenigen von $B(x, n)$ dienen kann.*) —

Berlin, October 1887.

*) Cf. G. F. Meyer, a. a. O. § 35—37, S. 97 ff.

# Ueber binäre Formen mit vorgeschriebener Discriminante.

Von

David Hilbert in Königsberg.

## Das Problem.

Betrachten wir zwei binäre Formen von der $\nu^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$\varphi = \alpha_0 x_1^{\nu} + \binom{\nu}{1} \alpha_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \cdots + \alpha_\nu x_2^{\nu},$$

$$\psi = \beta_0 x_1^{\nu} + \binom{\nu}{1} \beta_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \cdots + \beta_\nu x_2^{\nu},$$

so giebt es bekanntlich innerhalb der einfach unendlichen linearen Formenmannigfaltigkeit:

$$\varkappa\varphi + \mu\psi \tag{1}$$

genau $2\nu - 2$ Formen mit doppeltem Linearfactor. Das Product dieser $2\nu - 2$ Linearfactoren ist durch die Functionaldeterminante $(\varphi, \psi)_1$ der beiden Formen gegeben, während man die jenen Formen entsprechenden $2\nu - 2$ Parameterverhältnisse $\varkappa : \mu$ durch Nullsetzen der Discriminante $\delta(\varkappa, \mu)$ des Gebildes (1) findet. Die Frage nach den Involutionen $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung mit vorgeschriebener Functionaldeterminante hat der Verfasser*) vor Kurzem zur Lösung gebracht. *In der vorliegenden Arbeit handelt es sich darum, alle diejenigen Formengebilde* (1) *zu bestimmen, für welche jene* $2\nu - 2$ *ausgezeichneten Parameterverhältnisse* $\varkappa : \mu$ *vorgeschriebene Werthe annehmen, oder, was auf das nämliche hinausläuft, für welche die Discriminante* $\delta(\varkappa, \mu)$ *eine gegebene binäre Form von der* $2\nu - 2^{\text{ten}}$ *Ordnung in den Variablen* $\varkappa, \mu$ *wird.*

*) Vergl.: Ueber die Büschel von binären Formen mit der nämlichen Functionaldeterminante. Berichte der königl. sächs. Gesellschaft. Sitzung am 24. October 1887. Die Arbeit gelangt demnächst in diesen Annalen zum Abdruck.

## Die Discriminante als Grundform.

Die Discriminante des binären Gebildes (1) nimmt die Gestalt an:

$$(2)\quad \delta(\varkappa, \mu) = \delta_0 \varkappa^{2\nu-2} + \binom{2\nu-2}{1} \delta_1 \varkappa^{2\nu-3}\mu + \cdots + \delta_{2\nu-2}\mu^{2\nu-2}.$$

Der erste Coefficient $\delta_0$ ist die Discriminante der Form $\varphi$, der letzte Coefficient $\delta_{2\nu-2}$ ist die Discriminante der Form $\psi$. Aus jedem dieser beiden Coefficienten lassen sich unter Vermittelung der abkürzenden Symbole:

$$\psi \frac{\partial}{\partial \varphi} = \beta_0 \frac{\partial}{\partial \alpha_0} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \cdots + \beta_\nu \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu},$$

$$\varphi \frac{\partial}{\partial \psi} = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial \beta_0} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \beta_1} + \cdots + \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial \beta_\nu}$$

die übrigen Coefficienten $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{2\nu-3}$ ableiten; es ist nämlich allgemein:

$$\delta_i = \frac{(2\nu-i-2)!}{(2\nu-2)!}\left[\psi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]^i \delta_0 = \frac{i!}{(2\nu-2)!}\left[\varphi \frac{\partial}{\partial \psi}\right]^{2\nu-i-2} \delta_{2\nu-2}.$$

Die in Rede stehenden Coefficienten sind Simultaninvarianten des Formenpaares $\varphi, \psi$. Unterwerfen wir daher die Variablen $x_1, x_2$ einer linearen Transformation, bei welcher die Substitutionsdeterminante gleich der Einheit ist, so besitzen offenbar sämmtliche so entspringenden dreifach unendlichvielen Formenpaare die nämliche Discriminantenform $\delta$. Diese Thatsache ist für das oben aufgestellte Problem von Bedeutung. Wenn wir nämlich die Coefficienten $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2\nu-2}$ als gegeben ansehen, so haben wir zur Bestimmung des zugehörigen Formenpaares $2\nu - 1$ Gleichungen und diese Zahl ist gerade um 3 geringer als die Zahl $2\nu+2$ der zu bestimmenden Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ und $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Es wird daher die Widerspruchsfreiheit und Bestimmtheit des Problems ausser Zweifel stehen, sobald es gelingt, den strengen Nachweis dafür zu führen, dass die Discriminantenform $\delta$ eine allgemeine Form ihrer Ordnung darstellt, oder, genauer gesagt, dass jede beliebige binäre Form von der $2\nu - 2^{\text{ten}}$ Ordnung in den Variablen $\varkappa, \mu$ als Discriminantenform $\delta$ eines geeignet gewählten Formenpaares $\varphi, \psi$ betrachtet werden darf. Dieser Nachweis wird im Folgenden auf indirectem Wege erbracht.

Gehen wir nämlich von der Annahme aus, dass zwischen den Coefficienten $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2\nu-2}$ eine identische Relation bestehe, so würde aus der Constantenabzählung folgen, dass es für eine Discriminantenform $\delta$ stets vierfach unendlich viele zugehörige Formenpaare $\varphi, \psi$ giebt. Betrachten wir nun die Doppelverhältnisse, welche sich aus den $2\nu$ Wurzeln der beiden Gleichungen $\varphi(x, 1) = 0$ und $\psi(x, 1) = 0$ bilden lassen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. *Erstens* könnte

der Fall eintreten, dass die Werthe der Doppelverhältnisse sämmtlich ungeändert bleiben, sobald das Formenpaar $\varphi$, $\psi$ mit irgend einem anderen Formenpaare der in Rede stehenden vierfach unendlichen Mannigfaltigkeit vertauscht wird. In Folge dieser Annahme müsste es möglich sein, die vierfach unendlich vielen Formenpaare sämmtlich mittelst linearer Substitution der Variablen $x_1$, $x_2$ aus einem bestimmten Formenpaare $\varphi$, $\psi$ herzuleiten. Da ferner die Determinante jener Substitution nothwendigerweise einer Einheitswurzel gleich werden muss, so läge thatsächlich nur eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Formenpaaren vor und mit diesem beschränkenden Umstande tritt die ursprüngliche Annahme in Widerspruch. *Zweitens* werde vorausgesetzt, dass wenigstens eines jener Doppelverhältnisse sich ändert, wenn man das Formenpaar $\varphi$, $\psi$ durch ein anderes der vierfach unendlichvielen Formenpaare ersetzt. Wird dann einer der variablen Parameter in der Weise bestimmt, dass das betrachtete Doppelverhältniss den Werth Null annimmt, so sind drei Möglichkeiten zu berücksichtigen, jenachdem in Folge dieses Verfahrens die betreffende Form $\varphi$ oder die Form $\psi$ einen Doppelfactor erhält oder endlich beiden Formen $\varphi$, $\psi$ ein gemeinsamer Linienfactor zu Theil wird. Tritt einer der beiden ersten Fälle ein, so müsste die Discriminante $\delta_0$ oder $\delta_{2\nu-2}$ verschwinden; eine derartige Specialisirung der Discriminantenform $\delta$ ist aber offenbar nicht nothwendig erforderlich. Die letzte Möglichkeit würde für die Discriminantenform $\delta$ die Existenz eines Doppelfactors und somit das identische Verschwinden ihrer Discriminante bedingen. Der nächste Abschnitt zeigt, dass auch diese Folgerung der Wahrheit zuwiderläuft. Die eben bewiesene Thatsache führt unmittelbar zu dem folgenden Ergebniss:

*Ist eine binäre Form $\delta(\varkappa, \mu)$ von der $2\nu - 2^{\text{ten}}$ Ordnung in den Variablen $\varkappa$, $\mu$ vorgelegt, so giebt es stets eine endliche Anzahl von Formengebilden* (1), *deren Discriminante mit der Form $\delta(\varkappa, \mu)$ übereinstimmt. Dabei sind jedoch alle diejenigen Formengebilde* (1) *als nicht untereinander verschieden zu betrachten, welche durch lineare Transformation aus einem bestimmten Formengebilde jener Art hervorgehen.*

## Die Discriminante der Discriminantenform.

Nach den Ausführungen zu Anfang dieser Mittheilung entspricht einem jeden Linearfactor $x_2'x_1 - x_1'x_2$ der Functionaldeterminante $(\varphi, \psi)_1$ ein bestimmter Linearfactor $\mu'\varkappa - \varkappa'\mu$ der Discriminantenform (2), und umgekehrt. In der That ergiebt sich:

$$\varkappa' : \mu' = -\psi(x_1', x_2') : \varphi(x_1', x_2'),$$
$$x_1' : x_2' = \quad g(\varkappa', \mu') : h(\varkappa', \mu').$$

In letzterer Formel bedeuten $g$ und $h$ diejenigen ganzen Functionen der Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$; $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\nu$ und der beigefügten Argumente $\varkappa', \mu'$, deren man sich in bekannter Weise bedient, um den doppelten Linearfactor der binären Form $\varkappa'\varphi + \mu'\psi$ rational darzustellen. Nehmen wir nun an, die Discriminantenform (2) enthielte den Linearfactor $\mu'\varkappa - \varkappa'\mu$ doppelt, so nimmt zufolge der obigen Beziehung die Functionaldeterminante $(\varphi, \psi)_1$ den Linearfactor $x_2'x_1 - x_1'x_2$ doppelt an, es sei denn, dass die Ausdrücke $g(\varkappa', \mu')$ und $h(\varkappa', \mu')$ gleichzeitig verschwinden. Das letztere Vorkommniss erfordert aber, dass die binäre Form $\varkappa'\varphi + \mu'\psi$ entweder zwei Doppelfactoren oder einen dreifachen Linearfactor enthält. Wenn andererseits die Functionaldeterminante $(\varphi, \psi)_1$ einen Doppelfactor besitzt, so folgt nothwendig, dass entweder die Resultante A des Formenbüschels (1) verschwindet, oder in jenem Büschel eine Form mit dreifachem Linearfactor enthalten ist. Wir bezeichnen mit B und $\Gamma$ diejenigen Combinanten des Formenbüschels (1), deren Verschwinden die Bedingung dafür liefert, dass unter den Formen des Büschels eine Form mit zwei Doppelfactoren beziehungsweise mit einem dreifachen Linearfactor vorkommt. Die eben angestellten Ueberlegungen zeigen dann, dass die Discriminante der Discriminantenform (2) nothwendig die Gestalt annimmt:

$$\Delta = A^m B^n \Gamma^t, \tag{3}$$

wobei die Exponenten $m, n, t$ ganze positive Zahlen bedeuten. Die Discriminante $\Delta$ ist mithin, wie überhaupt jede Invariante der Discriminantenform, Combinante des Formenbüschels (1).

Was den Grad der beiden Combinanten B und $\Gamma$ in den Coefficienten einer jeden der beiden Formen $\varphi, \psi$ anbetrifft, so ist derselbe derjenigen Zahl gleich, welche angiebt, wie viele Formen mit zwei Doppelfactoren beziehungsweise mit einem dreifachen Linearfactor in einem Formenbündel von der $\nu^{\text{ten}}$ Ordnung enthalten sind. Diese Zahl ist $2(\nu-2)(\nu-3)$ beziehungsweise $3(\nu-2)$.*)

Zur Bestimmung der Exponenten $m, n, t$ dienen die folgenden Ueberlegungen. Wir nehmen an, dass die Formen $\varphi, \psi$ einen gemeinsamen Linearfactor enthielten und setzen demgemäss:

$$\begin{aligned} \varphi &= (x_2'x_1 - x_1'x_2)\varphi', \\ \psi &= (x_2'x_1 - x_1'x_2)\psi'. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Combinante B kann dann ihrer Bedeutung zufolge nur in zwei Fällen verschwinden, nämlich erstens, wenn die entsprechende Combinante B' für das Formenpaar $\varphi', \psi'$ verschwindet, und zweitens, wenn der Ausdruck:

*) Vergl. die Note des Verfassers: „Ueber die Singularitäten der Discriminantenfläche." Mathematische Annalen Bd. XXX, pag. 440.

$$(5) \qquad \frac{\psi'(x_1', x_2')\,\varphi'(x_1, x_2) - \varphi'(x_1', x_2')\,\psi'(x_1, x_2)}{x_2' x_1 - x_1' x_2}$$

als Form der Variablen $x_1$, $x_2$ betrachtet, einen Doppelfactor enthält. Bezeichnen wir die Discriminante des Formengebildes $\varkappa\varphi' + \mu\psi'$ mit $\delta'(\varkappa, \mu)$ und die Functionaldeterminante der beiden Formen $\varphi'(x_1', x_2')$ und $\psi'(x_1', x_2')$ mit $f$, so ist die Discriminante jenes Ausdruckes (5):

$$d = \frac{\delta'[\psi'(x_1', x_2'), -\varphi'(x_1', x_2')]}{f^2}.$$

Nach Bestimmung der Gradzahlen für die Gebilde $\mathsf{B}'$ und $d$ ergiebt sich die Formel:

$$(6) \qquad \mathsf{B} = \mathsf{B}' d^2.$$

Die nämliche Methode zeigt, dass die Combinante $\Gamma$ unter jener Annahme (4) in die Gestalt:

$$(7) \qquad \Gamma = \Gamma' f^3$$

übergeht, wo $\Gamma'$ die entsprechende Combinante des Formenpaares $\varphi'$, $\psi'$ bedeutet. Was schliesslich die Discriminantenform (2) betrifft, so gewinnt man bei der Annahme (4) für dieselbe den Ausdruck:

$$(8) \qquad \delta(\varkappa, \mu) = \delta'(\varkappa, \mu)[\varkappa\varphi'(x_1', x_2') + \mu\psi'(x_1', x_2')]^2.$$

Heben wir nunmehr die beschränkende Annahme (4) auf und setzen:

$$\varphi = (x_2' x_1 - x_1' x_2)\varphi',$$
$$\psi = (x_2'' x_1 - x_1'' x_2)\psi',$$

so sind jene Ausdrücke für $\mathsf{B}$, $\Gamma$, $\delta$ nichts anderes als die ersten Glieder in der Entwickelung dieser Grössen nach fortschreitenden Potenzen von $x_2' x_1'' - x_1' x_2''$. Bezeichnet $\mathsf{A}'$ die Resultante der beiden Formen $\varphi'$, $\psi'$, so ist:

$$(9) \qquad \mathsf{A} = (x_2' x_1'' - x_1' x_2'')\,\mathsf{A}'\varphi'(x_1'', x_2'')\,\psi'(x_1', x_2').$$

Aus der Formel (3) folgt mit Rücksicht auf (6), (7), (9), dass die Entwickelung der Discriminante $\Delta$ mit dem Gliede:

$$(x_2' x_1'' - x_1' x_2'')^m \mathsf{A}'^m \mathsf{B}'^n \Gamma'^t \varphi'^m \psi'^m d^{2n} f^{3t}$$

beginnt. Andererseits geht aus dem Ausdrucke (8) soviel hervor, dass das erste Glied in der Entwickelung der Discriminante $\Delta$ den Factor:

$$(x_2' x_1'' - x_1' x_2'')\{\delta'[\psi'(x_1', x_2'), -\varphi'(x_1', x_2')]\}^4 = (x_2' x_1'' - x_1' x_2'') d^4 f^8$$

enthalten muss. Die Exponenten $m$, $n$, $t$ müssen daher jedenfalls bezüglich die Zahlenwerthe 1, 2, 3 erreichen. Die letzteren können ferner nicht überschritten werden, da die Zahl:

$$1 \cdot \nu + 2 \cdot 2(\nu-2)(\nu-3) + 3 \cdot 3(\nu-2) = 2(\nu-1)(2\nu-3)$$

bereits den Grad der Discriminante $\Delta$ in den Coefficienten jeder der Formen $\varphi$, $\psi$ darstellt; d. h.:

*Die Discriminante der Discriminantenform* (2) *besitzt den Werth:*

$$\Delta = \mathsf{A}\mathsf{B}^2\Gamma^3.$$

## Die Lösung des Problems in den Fällen $\nu = 2, 3, 4$.

Der nachfolgende Abschnitt bringt das zu Anfang aufgestellte Problem in den Fällen $\nu = 2, 3, 4$ zur Lösung.

### $\nu = 2$.

Man erkennt leicht, dass zu einer vorgelegten Discriminantenform zweiter Ordnung nur ein einziges quadratisches Formengebilde $\varkappa\varphi + \mu\psi$ zugehört. Im übrigen bietet dieser Fall noch kein besonderes Interesse.

### $\nu = 3$.

Vorgelegt ist die biquadratische Form:

$$\delta(\varkappa, \mu) = \delta_0\varkappa^4 + 4\delta_1\varkappa^3\mu + 6\delta_2\varkappa^2\mu^2 + 4\delta_3\varkappa\mu^3 + \delta_4\mu^4;$$

es werden diejenigen cubischen Formengebilde $\varkappa\varphi + \mu\psi$ gesucht, welche $\delta$ zur Discriminante besitzen. Wir legen die beiden Formen jenes Gebildes in der bekannten typischen Darstellung:*)

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial k},$$

$$\psi = \frac{\partial F}{\partial m}$$

zu Grunde, worin:

$$F = Ak^4 + 4Bk^3m + 6Ck^2m^2 + 4Dkm^3 + Em^4$$

eine biquadratische Form bedeutet, deren Coefficienten Simultaninvarianten und deren Variable $k$, $m$ lineare Simultancovarianten des Formenpaares $\varphi$, $\psi$ sind. Bilden wir dann die Discriminante des cubischen Gebildes:

$$\varkappa\varphi + \mu\psi = \varkappa\frac{\partial F}{\partial k} + \mu\frac{\partial F}{\partial m}$$

und setzen in dem erhaltenen Ausdruck nachträglich an Stelle der Variablen $\varkappa$, $\mu$ die Variablen $k$, $m$, so geht derselbe in eine Covariante der Form $F$ über, welche die Ordnung und den Grad 4 besitzt und in Folge dessen die Gestalt $c_1 j F + c_2 i H$ annehmen muss. Dabei gelten für die invarianten Formen der biquadratischen Grundform $F$ die üblichen Bezeichnungen:

$$H = (F, F)_2;\ i = (F, F)_4;\ j = (F, H)_4.$$

Die Zahlen $c_1$, $c_2$ ergeben sich ohne Schwierigkeit gleich 2 beziehungsweise $-3$.

---

*) Vergl. P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. 2, pag. 348.

*Die angestellten Ueberlegungen führen das in Rede stehende Problem auf die Bestimmung aller derjenigen biquadratischen Formen $F$ zurück, für welche die Covariante:*

$$2jF - 3iH$$

*den vorgeschriebenen Werth $\delta(k, m)$ erhält.* Die letztere Aufgabe wird, wie folgt, gelöst.

Setzen wir der obigen Bezeichnungsweise entsprechend:

$$\eta = (\delta, \delta)_2; \quad \iota = (\delta, \delta)_4; \quad \gamma = (\delta, \eta)_4$$

und bedeutet ferner $\varepsilon$ eine willkürliche Grösse, so gelten für die invarianten Bildungen der biquadratischen Form $\varepsilon\delta + \eta$ die bekannten Formeln:*)

$$H_{\varepsilon\delta+\eta} = \tfrac{1}{3}(\iota\varepsilon+\gamma)\delta + \left(\varepsilon^2 - \tfrac{1}{6}\iota\right)\eta,$$

$$i_{\varepsilon\delta+\eta} = \iota\varepsilon^2 + 2\gamma\varepsilon + \tfrac{1}{6}\iota^2,$$

$$j_{\varepsilon\delta+\eta} = \gamma\varepsilon^3 + \tfrac{1}{2}\iota^2\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\iota\gamma\varepsilon - \tfrac{1}{36}\iota^3 + \tfrac{1}{3}\gamma^2.$$

Der Ansatz:

$$F = \varepsilon\delta + \eta \tag{10}$$

führt nothwendig zu der Gleichung:

$$2j_{\varepsilon\delta+\eta}(\varepsilon\delta+\eta) - 3i_{\varepsilon\delta+\eta}H_{\varepsilon\delta+\eta} = C\delta,$$

wo $C$ eine Proportionalitätsconstante bedeutet. Diese Gleichung ist offenbar identisch erfüllt, sobald der Factor von $\eta$ auf ihrer linken Seite verschwindet d. h. sobald die Grösse $\varepsilon$ der biquadratischen Gleichung:

$$3\iota\varepsilon^4 + 4\gamma\varepsilon^3 - \iota^2\varepsilon^2 - 2\iota\gamma\varepsilon - \tfrac{1}{36}\iota^3 - \tfrac{2}{3}\gamma^2 = 0 \tag{11}$$

genügt. Die gefundene Gleichung für $\varepsilon$ ist eine Tetraedergleichung und besitzt überdies die Eigenschaft, dass ihre Discriminante der vierten Potenz der Discriminante der vorgelegten Form $\delta$ gleich wird. Betrachten wir nämlich die linke Seite der fraglichen Gleichung (11) als Grundform, so nehmen die beiden Invarianten derselben die Werthe an:

$$I = 0, \quad J = \left(\tfrac{1}{3}\iota^3 - 2\gamma^2\right)^2.$$

*Es giebt mithin vier cubische Formengebilde $\varkappa\varphi + \mu\psi$ mit der vorgeschriebenen Discriminante $\delta$. Die Formen $\varphi$, $\psi$ für ein jedes*

*) Vergl. l. c. Bd. 2, § 16.

*dieser Gebilde sind die ersten Differentialquotienten einer biquadratischen Form F, welche sich nach Auflösung der Tetraedergleichung* (11) *mit Hülfe der Formel* (10) *bestimmen lässt.*

Ein Ausnahmefall tritt nur dann ein, wenn für einen Wurzelwerth $\varepsilon$ der Tetraedergleichung (11) gleichzeitig der Ausdruck:

$$C = 2\gamma\varepsilon^4 - 2\iota\gamma\varepsilon^2 - \left(\tfrac{2}{9}\iota^3 + \tfrac{4}{3}\gamma^2\right)\varepsilon - \tfrac{1}{6}\iota^2\gamma$$

zu Null wird. Man erkennt leicht, dass dies Vorkommniss durch das Verschwinden der Discriminante $\iota^3 - 6\gamma^2$ der vorgelegten Discriminantenform $\delta$ bedingt wird.

Um dem behandelten Problem die bekannte Frage nach den cubischen Formenbüscheln mit vorgeschriebener Functionaldeterminante gegenüberzustellen, so sei daran erinnert, dass die letztere Frage auf die Bestimmung der biquadratischen Grundformen mit vorgeschriebener Hesse'schen Covariante hinausläuft und diesem Umstande entsprechend nur zwei Lösungen gestattet.

## $\nu = 4.$

Um die biquadratischen Gebilde $\varkappa\varphi + \mu\psi$ mit der vorgeschriebenen Discriminante:

$$\delta(\varkappa,\mu) = \delta_0\varkappa^6 + 6\delta_1\varkappa^5\mu + 15\delta_2\varkappa^4\mu^2 + 20\delta_3\varkappa^3\mu^3 + 15\delta_4\varkappa^2\mu^4 + 6\delta_5\varkappa\mu^5 + \delta_6\mu^6$$

zu bestimmen, betrachten wir die beiden Invarianten jener biquadratischen Gebilde:

$$i(\varkappa, \mu) = i_0\varkappa^2 + 2i_1\varkappa\mu + i_2\mu^3,$$
$$j(\varkappa, \mu) = j_0\varkappa^3 + 3j_1\varkappa^2\mu + 3j_2\varkappa\mu^2 + j_3\mu^3.$$

Die Coefficienten der beiden so erhaltenen Ausdrücke sind offenbar Simultaninvarianten des Formenpaares $\varphi$, $\psi$. In Folge der bekannten Darstellungsweise der Discriminante einer biquadratischen Form haben wir:

$$\delta(\varkappa, \mu) = [i(\varkappa, \mu)]^3 - 6[j(\varkappa, \mu)]^2.$$

Es ist nun von Cayley*) und Clebsch**) die Aufgabe behandelt worden, eine vorgeschriebene binäre Form von der 6ten Ordnung in zwei Summanden zu zerlegen, von denen der erstere der vollständige Cubus einer quadratischen Form, der zweite das vollständige Quadrat einer cubischen Form wird. Die Aufgabe lässt 40 verschiedene Lösungen zu. *Sind diese bekannt, so ist unser ursprüngliches Problem auf die Frage nach denjenigen biquadratischen Formengebilden* $\varkappa\varphi + \mu\psi$ *zurück-*

*) Quaterly Journal of mathematics. vol. 9, pag. 210.
**) Mathematische Annalen. Bd. 2, pag. 193.

*geführt, deren Invarianten $i(x, \mu)$ und $j(x, \mu)$ vorgeschriebene Formen der zweiten beziehungsweise dritten Ordnung sind.* Auch dieses Problem ist vollkommen bestimmt und einer eleganten Lösung fähig.

Betrachten wir nämlich an Stelle der beiden biquadratischen Formen:

$$\varphi = \alpha_0 x_1^4 + 4\alpha_1 x_1^3 x_2 + 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2 + 4\alpha_3 x_1 x_2^3 + \alpha_4 x_2^4,$$
$$\psi = \beta_0 x_1^4 + 4\beta_1 x_1^3 x_2 + 6\beta_2 x_1^2 x_2^2 + 4\beta_3 x_1 x_2^3 + \beta_4 x_2^4$$

die folgenden drei ternären quadratischen Formen:

$$p = y_1 y_3 - y_2^2,$$
$$q = \alpha_0 y_1^2 + 4\alpha_1 y_1 y_2 + 2\alpha_2 y_1 y_3 + 4\alpha_2 y_2^2 + 4\alpha_3 y_2 y_3 + \alpha_4 y_3^2,$$
$$r = \beta_0 y_1^2 + 4\beta_1 y_1 y_2 + 2\beta_2 y_1 y_3 + 4\beta_2 y_2^2 + 4\beta_3 y_2 y_3 + \beta_4 y_3^2,$$

so entsteht aus diesen durch lineare Combination die quadratische Form $\lambda p + \varkappa q + \mu r$ mit der Discriminante:

$$D(\lambda,\varkappa,\mu) = 24 \begin{vmatrix} \varkappa\alpha_0+\mu\beta_0, & \varkappa\alpha_1+\mu\beta_1, & \frac{1}{2}\lambda+\varkappa\alpha_2+\mu\beta_2 \\ \varkappa\alpha_1+\mu\beta_1, & -\frac{1}{4}\lambda+\varkappa\alpha_2+\mu\beta_2, & \varkappa\alpha_3+\mu\beta_3 \\ \frac{1}{2}\lambda+\varkappa\alpha_2+\mu\beta_2, & \varkappa\alpha_3+\mu\beta_3, & \varkappa\alpha_4+\mu\beta_4 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{3}{2}\lambda^3 - 3\lambda i(\varkappa, \mu) + 4j(\varkappa, \mu)^*).$$

*Der angestellten Ueberlegung zufolge handelt es sich nunmehr um die Bestimmung aller derjenigen ternären quadratischen Formengebilde $\lambda p + \varkappa q + \mu r$, welche die vorgeschriebene Discriminante $D(\lambda, \varkappa, \mu)$ besitzen.*

Um diese Aufgabe zu lösen, denken wir uns die drei ternären quadratischen Formen $p$, $q$, $r$ mittelst linearer Transformation der Variablen $y_1, y_2, y_3$ in die typische Gestalt:**)

$$P = \frac{\partial F}{\partial l},$$
$$Q = \frac{\partial F}{\partial k},$$
$$R = \frac{\partial F}{\partial m}$$

übergeführt, worin $F$ eine ternäre cubische Form bedeutet, deren

*) Diese Beziehung zwischen der Discriminante eines ternären quadratischen Gebildes und der cubischen Resolvente der binären biquadratischen Form ist bereits von Selivanof bemerkt werden, vergl. Bulletin des sciences mathématiques s. 2, t. 7.

**) Vergl. S. Gundelfinger, Crelle's Journal, Bd. 80, pag. 73.

Coefficienten Simultaninvarianten und deren Variable $l$, $k$, $m$ lineare Simultancovarianten der drei Formen $p$, $q$, $r$ sind. Bilden wir dann die Discriminante des ternären quadratischen Gebildes:

$$\lambda p + \varkappa q + \mu r = \lambda \frac{\partial F}{\partial l} + \varkappa \frac{\partial F}{\partial k} + \mu \frac{\partial F}{\partial m}$$

und setzen in dem erhaltenen Ausdrucke nachträglich an Stelle der Variablen $\lambda$, $\varkappa$, $\mu$ die Variablen $l$, $k$, $m$, so geht derselbe in die Hesse'sche Covariante der cubischen Form $F$ über. *Das in Rede stehende Problem läuft daher schliesslich auf die Bestimmung derjenigen ternären cubischen Formen $F$ hinaus, deren Hesse'sche Covariante den vorgeschriebenen Werth $D(l, k, m)$ besitzt.*

Bezeichnen wir mit $S$ und $T$ die Invarianten vom 4ten beziehungsweise vom 6ten Grade in den Coefficienten der cubischen Form $D(l,k,m)$, mit $H$ die Hesse'sche Covariante derselben und bedeutet ferner $\varepsilon$ eine willkürliche Grösse, so gilt für die Hesse'sche Covariante der cubischen Form $\varepsilon D + H$ die bekannte Formel:*)

$$H_{\varepsilon D+H} = \left(\tfrac{1}{2} S\varepsilon^2 + T\varepsilon + \tfrac{1}{12} S^2\right) D + \left(\varepsilon^3 - \tfrac{1}{2} S\varepsilon - \tfrac{1}{3} T\right) H.$$

Setzen wir daher an:

$$F = \varepsilon D + H, \tag{12}$$

so ergiebt sich zur Bestimmung von $\varepsilon$ die cubische Gleichung:

$$\varepsilon^3 - \tfrac{1}{2} S\varepsilon - \tfrac{1}{2} T = 0. \tag{13}$$

*Es giebt mithin drei Tripel von ternären quadratischen Formen mit vorgeschriebener Discriminante $D$. Die Formen $P$, $Q$, $R$ eines jeden Tripels sind die ersten Differentialquotienten einer cubischen Form $F$, welche sich nach Auflösung der cubischen Gleichung* (13) *mit Hülfe der Formel* (12) *bestimmen lässt.*

Ist ein Formentripel $P$, $Q$, $R$ bekannt, so erübrigt es noch, die Form $P$ mittelst geeigneter linearer Transformation der ternären Variablen $l$, $k$, $m$ in die Gestalt $y_1 y_3 - y_2^2$ überzuführen. Gehen dann gleichzeitig die beiden anderen Formen $Q$ und $R$ in die Gestalt $q$ beziehungsweise $r$ über, so ergeben sich schliesslich die beiden gesuchten binären biquadratischen Formen $\varphi$ und $\psi$, wenn man in den ternären quadratischen Formen $q$ und $r$ an Stelle der Variablen $y_1$, $y_2$, $y_3$ beziehungsweise $x_1^2$, $x_1 x_2$, $x_2^2$ substituirt.

Ein Ausnahmefall tritt nur dann ein, wenn für einen Wurzelwerth $\varepsilon$ der cubischen Gleichung (13) gleichzeitig der Ausdruck:

*) Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie. Bd. 1, p. 559.

$$\frac{1}{2} S\varepsilon^2 + T\varepsilon + \frac{1}{12} S^2$$

zu Null wird. Man erkennt ohne Schwierigkeit, dass das letztere Vorkommniss das Verschwinden der Discriminante $S^3 - 6T^2$ der ternären cubischen Form $D$ und in Folge dessen das Verschwinden der Discriminante der vorgelegten Discriminantenform $\delta$ nach sich zieht. Zugleich ist auch unser ursprüngliches Problem erledigt:

*Man erhält durch das dargelegte Verfahren* $3 \cdot 40 = 120$ *binäre biquadratische Formengebilde* $\varkappa\varphi + \mu\psi$, *welche eine vorgelegte binäre Form* $\delta(\varkappa, \mu)$ *von der* $6^{\text{ten}}$ *Ordnung zur Discriminante besitzen.*

Königsberg i. Pr., den 6. Dezember 1887.

# Die Steiner'sche Covariante der binären Form 6. Ordnung.

Von

Giovanni Maisano in Messina.

Unter der Steiner'schen Covariante einer binären Form $f$ verstehen wir diejenige ihrer Covarianten, welche, gleich Null gesetzt, die Punkte des binären Gebietes darstellt, deren erste Polaren eine Doppelwurzel haben. Diese Covariante verschwindet natürlich identisch, wenn die Grundform eine dreifache Wurzel besitzt, und man erkennt unschwer, dass das Verschwinden der Steiner'schen Covariante nicht allein eine *nothwendige*, sondern auch eine *ausreichende* Bedingung dafür darstellt, dass die Grundform einen dreifachen Punkt hat. Den analytischen Ausdruck der Steiner'schen Covariante erhält man im Falle einer binären Form sechster Ordnung:

$$f = a_x^6 = b_x^6 = \cdots,$$

indem man die $x$ aus den beiden biquadratischen Gleichungen

$$(1) \qquad a_y a_x^4 a_1 = 0, \quad a_y a_x^4 a_2 = 0$$

eliminirt. Wir nehmen uns vor, die Resultante dieser Gleichungen, die wir mit $S$ bezeichnen wollen, durch die fundamentalen Invarianten und Covarianten der Form $f$ auszudrücken. Bei dieser Gelegenheit wollen wir auch zeigen, dass jedes der Gleichungssysteme

$$S \equiv 0$$

und

$$3 \cdot 5m - 2^2 \cdot A \cdot l \equiv 0,$$

eine Folge des anderen ist, und dass mithin auch dieses letztere eine ausreichende und nothwendige Bedingung dafür darstellt, dass die Form $f = a_x^6$ einen dreifach zählenden Nullpunkt hat.*)

Ehe wir zur Berechnung der Resultante der zwei Formen (1) übergehen, scheint es uns zweckmässig, einige Formeln zusammenzustellen, die wir im Folgenden anzuwenden haben werden.

*) Vgl. meine *Sestica binaria* pag. 29 in den Atti della R. Accademia dei Lincei. Febbraio 1884, vol XIX.

## § 1.

## Relationen im Formensystem von $f = a_x^6$.

Im Cap. II der unten citirten Abhandlung befinden sich die folgenden Formeln:

(2) $$A_{ll} = 2C + \frac{1}{3} AB, \quad A_{lm} = \frac{2}{3}(B^2 + AC),$$
$$A_{mn} = \frac{1}{2} BA_{lm} + \frac{1}{3} CA_{ll},$$

(3) $$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} Ai,$$

(4) $$(a\Delta)^2 a_x^4 \Delta_x^2 = \frac{il}{2} - \frac{Bf}{6},$$

(5) $$(Hl)^2 H_x^6 = \frac{Ap - Bf}{3} + \frac{5}{7} il,$$

(6) $$(\Delta l)^2 \Delta_x^2 = n - \frac{1}{3} Bl,$$

(7) $$j = -p + \frac{1}{6} A \cdot f,$$

(8) $$(aH)^4 a_x^2 H_x^4 = \frac{5}{7} j + \frac{1}{70} A \cdot f = -\frac{5}{7} p + \frac{2}{15} A \cdot f,$$

(9) $$(iH)^2 i_x^2 H_x^6 = \frac{1}{6} fl - \frac{5}{42} i^2,$$

(10) $$(iH)^3 i_x H_x^5 = \frac{1}{4} (al) a_x^5 l_x,$$

(11) $$(iH)^4 H_x^4 = \frac{2}{7} \Delta + \frac{2}{15} Ai,$$

(12) $$(HH')^4 H_x^4 H_x'^4 = \frac{2}{21} fl + \frac{25}{294} i^2 - \frac{1}{15} A \cdot H,$$

(13) $$(HH')^6 H_x^2 H_x'^2 = \frac{1}{42} Ai + \frac{10}{49} \Delta,$$

(14) $$(HH')^8 = -\frac{5}{7} B + \frac{2}{15} A^2,$$

(15) $$(ab)^2 a_x^3 b_x^3 a_y b_y = H_x^6 H_y^2 - \frac{3}{14} (xy)^2 \cdot i,$$

(16) $$(ab)^2 a_x^3 b_x^3 a_y b_z = H_x^6 H_y H_z - \frac{3}{14} (xy)(xz) \cdot i,$$

(17) $$(ab)^2 a_x^3 b_x^2 a_y b_y^2 = H_x^5 H_y^3 - \frac{1}{7} (xy)^2 \cdot i_x^3 i_y.$$

Aus der vorletzten erhält man:

$$(ab)^2 (al)(bl') a_x^3 b_x^3 l_x l_x' = (Hl)(Hl') H_x^6 l_x l_x' - \frac{3}{14} il^2.$$

Das erste Glied rechts ist gleich:

$$\frac{1}{2} H_x^6 \{(Hl)^2 l_x'^2 + (Hl')^2 l_x^2 - (ll')^2 H_x^2\} = (Hl)^2 H_x^6 \cdot l' - \frac{1}{2} A_{ll} \cdot H$$

$$= \frac{1}{3} Apl - \frac{1}{3} Bfl + \frac{5}{7} il^2 - \frac{1}{2} A_{ll} \cdot H,$$

wie sich mit Benutzung der Formel (5) ergiebt. Mithin ist:

$$(18)\quad (ab)^2 (al)(bl') a_x^3 b_x^3 l_x l_x' = \frac{1}{3} Apl - \frac{1}{3} Bfl + \frac{1}{2} il^2 - \frac{1}{2} A_{ll} \cdot H.$$

Nach (17) ist:

$$(ab)^2 (ac)(bc)^2 (cl) a_x^3 b_x^2 c_x^2 l_x =$$

$$= (Ha)^3 (al) a_x^2 l_x H_x^5 - \frac{1}{7} (ia)(al) i_x^3 a_x^4 l_x.$$

Die linke Seite ist gleich:

$$\frac{1}{2} (ab)^2 (bc)^2 (ac) a_x^2 b_x^2 c_x^2 l_x \{(cl) a_x - (al) c_x\} =$$

$$= - \frac{1}{2} (ab)^2 (bc)^2 (ac)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2 \cdot l =$$

$$= - \frac{1}{2} j \cdot l = \frac{1}{2} pl - \frac{1}{12} A \cdot fl,$$

wobei wir die Beziehung (7) benutzt haben. Das zweite Glied rechts ist gleich:

$$\frac{1}{14} a_x^4 i_x^2 \{(ai)^2 l_x^2 + (al)^2 i_x^2 - (il)^2 a_x^2\} =$$

$$= \frac{1}{14} pl + \frac{1}{14} i \cdot (al)^2 a_x^4 - \frac{1}{14} fm =$$

$$= \frac{1}{14} pl + \frac{1}{7} i\Delta + \frac{1}{42} Ai^2 - \frac{1}{14} fm.$$

Man hat folglich:

$$(19)\quad (aH)^3 (al) a_x^2 l_x H_x^5 =$$

$$= - \frac{3}{7} pl + \frac{1}{12} Afl + \frac{1}{7} i\Delta + \frac{1}{42} Ai^2 - \frac{1}{14} fm.$$

Aus der von Herrn Gordan gegebenen Reihenentwickelung*)

$$(20)\quad r_x^m s_y^n = \sum_\nu \frac{\binom{m}{\nu}\binom{n}{\nu}}{\binom{m+n-\nu+1}{\nu}} (r, s)_{y^{n-\nu}}^\nu (xy)^\nu$$

rühren die folgenden her:

$$(21)\quad (ab)^4 a_x b_x a_y b_y = i_x^2 i_y^2 - \frac{1}{6} A (xy)^2,$$

$$(22)\quad (ii')^2 i_x^2 i_y'^2 = \Delta_x^2 \Delta_y^2 + \frac{1}{3} B (xy)^2,$$

*) Ueber das Formensystem binärer algebraischer Formen. 1875.

$$(23)\quad (ii')^2 i_x i_x' i_y i_y' = \Delta_x^2 \Delta_y^2 - \frac{1}{6} B(xy)^2,$$

$$(24)\quad i_x^4 \cdot i_y'^4 = [i^2]_{y^4} + \frac{12}{7}(xy)^2 \Delta_x^2 \Delta_y^2 + \frac{1}{5} B(xy)^4,$$

$$(25)\quad i_x^2 i_x'^2 i_y^2 i_y'^2 = i_x^4 \cdot i_y'^4 - 2(xy)^2 \cdot \Delta_x^2 \Delta_y^2 - \frac{1}{6} B(xy)^4,$$

$$(26)\quad i_x^3 i_x' i_y i_y'^3 = i_x^4 \cdot i_y'^4 - \frac{3}{2}(xy)^2 \cdot \Delta_x^2 \Delta_y^2 - \frac{1}{4} B(xy)^4,$$

$$(27)\quad (al) a_x^3 a_y^2 l_y = [(al) a_x^5 l_x]_{y^5} + (xy) \Delta_x^2 \Delta_y^2 + \frac{1}{6} A \cdot (xy) i_x^2 i_y^2,$$

$$(28)\quad a_x^4 a_y^2 l_y^2 =$$

$$= [a_x^6 \cdot l_x^2]_{y^6} + (xy) \cdot (al) a_x^3 a_y^2 l_y - \frac{3}{7}(xy)^2 \Delta_x^2 \Delta_y^2 - \frac{1}{14} A \cdot (xy)^2 i_x^2 i_y^2.$$

Wir fügen endlich eine Reductionsformel und drei von H. Stephanos angegebene Syzygies hinzu.*)

$$(29)\quad (\Delta H)^2 \Delta_x^2 H_x^6 = -\frac{1}{6} pl + \frac{1}{18} Ai^2 + \frac{3}{14} i\Delta,$$

$$(30)\quad A_{lm} \cdot i + A_{ll} \cdot \Delta + \frac{1}{2} B l^2 - 2ln - m^2 = 0,$$

$$(31)\quad fm - 2pl + BH - \frac{1}{3} Ai^2 - i\Delta = 0,$$

$$(32)\quad fn + CH - \frac{3}{4} il^2 - \frac{1}{2} Ai\Delta - 2\Delta^2 = 0.$$

## § 2.

## Berechnung der Steiner'schen Covariante $S$.

Die von Gordan angegebenen**) Formeln für die Berechnung der Resultante zweier biquadratischen Formen $f$ und $\varphi$, sind:

$$\varrho = 4(f\varphi),\ \sigma = \frac{16}{9}(f\varphi)^3,\ g = (\varrho\varrho)^4 + \frac{3}{5}(\varrho\sigma)^2 - \frac{9}{25}\sigma^2,$$

$$I = (\varrho\varrho)^6 + \frac{9}{10}(\sigma\sigma)^2,\ S = \frac{I^2}{6} - (gg)^4.$$

In unserem Fall ist:

$$f = a_y a_s^4 a_1,\qquad \varphi = b_y b_s^4 b_2,$$

also:

$$(33)\quad \varrho = \varrho_s^6 \varrho_y^2 = 4(ab) a_s^3 b_s^3 a_y b_y a_1 b_2 = 2(ab)^2 a_s^3 b_s^3 a_y b_y =$$

$$= 2H_s^6 H_y^2 - \frac{3}{7}(yz)^2 \cdot i_s^4,$$

*) Comptes Rendus — Séances de l'Academie des Sciences. T. XCVI.

**) Math. Annalen Band III, S. 383.

$$(34) \qquad \sigma = \sigma_x^2 = \frac{16}{9}(ab)^3 a_x b_x a_y b_y a_1 b_2 = \frac{8}{9}(ab)^4 a_x b_x a_y b_y =$$
$$= \frac{8}{9} i_x^2 i_y^2 - \frac{4}{27}(xy)^2 \cdot A,$$

wobei wir die Beziehungen (15) und (21) benutzt haben.

## Berechnung der Form $(\rho\sigma)^2$.

Wenn man auf beiden Seiten der Formel (33) die 2. Polare nimmt, ergiebt sich:

$$\varrho_z^4 \varrho_y^2 \varrho_x^2 = 2 H_z^4 H_y^2 H_x^2 - \frac{3}{7}[(yz)^2 \cdot i_z^4]_{x^2}.$$

Nach (20) ist indessen:

$$(xy)^2 \cdot i_z^4 = [(zy)^2 \cdot i_z^4]_{x^2} - \frac{4}{3}(zx)[(zy) i_z^3 i_y]_x + \frac{3}{5}(zx)^2 i_z^2 i_y^2,$$

$$(xy) i_z^3 i_y = [(zy) i_z^3 i_y]_x - \frac{3}{4}(zx) i_z^2 i_y^2;$$

und folglich:

$$(xy)^2 \cdot i_z^4 = [(zy)^2 \cdot i_z^4]_{x^2} - \frac{4}{3}(zx)(xy) i_z^3 i_y - \frac{2}{5}(zx)^2 i_z^2 i_y^2,$$

$$(35) \qquad \varrho_z^4 \varrho_y^2 \varrho_x^2 =$$
$$= 2 H_z^4 H_y^2 H_x^2 - \frac{3}{7}(xy)^2 i_z^4 - \frac{4}{7}(zx)(xy) i_z^3 i_y - \frac{6}{35}(xz)^2 i_z^2 i_y^2,$$

$$(36) \qquad (\rho\sigma)^2 = (\rho\sigma)^2 \varrho_z^4 \varrho_y^2 =$$
$$= \frac{16}{9}(iH)^2 i_y^2 H_y^2 H_z^4 - \frac{8}{27} A \cdot H_y^4 H_z^4 - \frac{8}{21} i_y^4 \cdot i_z'^4$$
$$+ \frac{32}{63} i_z^3 i_z' i_y i_y'^3 - \frac{16}{105} i_y^2 i_y'^2 i_z^2 i_z'^2 + \frac{8}{315} A \cdot (yz)^2 i_y^2 i_z^2.$$

Auf Grund derselben Formel (20) hat man ferner:

$$(iH)^3 i_y H_y^2 H_z^3 = [(iH)^3 i_y H_y^5]_{z^3} + \frac{1}{2}(yz)[(iH)^4 H_y^4]_{z^2}.$$

Der erste Theil rechts, ist nach (10) und (27) gleich:

$$(37) \qquad \frac{1}{2}[(al) a_y^5 l_y]_{z^3} =$$
$$= \frac{1}{2}(al) a_z^3 a_y^2 l_y + \frac{1}{2}(yz) \Delta_y^2 \Delta_z^2 + \frac{1}{12}(yz) A \cdot i_y^2 i_z^2;$$

der zweite, nach (11), gleich:

$$\frac{1}{7}(yz) \Delta_y^2 \Delta_z^2 + \frac{1}{15}(yz) A \cdot i_y^2 i_z^2;$$

und daher:

$$(38) \qquad (iH)^3 i_y H_y^2 H_z^3 =$$
$$= \frac{1}{2}(al) a_z^3 a_y^2 l_y + \frac{9}{14}(yz) \cdot \Delta_y^2 \Delta_z^2 + \frac{3}{20} A \cdot (yz) i_y^2 i_z^2.$$

Aehnlich ergiebt sich:

$$(iH)^2 i_y^2 H_y^2 H_z^4 =$$

$$= [(iH)^2 i_y^2 H_y^6]_z^4 + (yz)[(iH)^3 i_y H_y^5]_z^3 + \tfrac{2}{7}(yz)^2[(iH)^4 H_y^4]_z^2.$$

Nach (9), (24), (28) ist:

$$(39) \qquad [(iH)^2 i_y^2 H_y^6]_z^4 = \tfrac{1}{6}[f \cdot l]_z^4 - \tfrac{5}{42}[i^2]_z^4 =$$

$$= \tfrac{1}{6} a_z^4 a_y^2 l_y^2 + \tfrac{1}{6}(yz) \cdot (al) a_z^3 a_y^2 l_y + \tfrac{27}{98}(yz)^2 \cdot \Delta_y^2 \Delta_z^2$$

$$- \tfrac{5}{42} i_y^4 \cdot i_z'^4 + \tfrac{1}{84}(yz)^2 \cdot A \cdot i_y^2 i_z^2 + \tfrac{1}{42} B(yz)^4.$$

Bei Anwendung der Formeln (11), (37), (39) erhält man weiter:

$$(40) \qquad (iH)^2 i_y^2 H_y^2 H_z^4 =$$

$$= \tfrac{1}{6} a_z^4 a_y^2 l_y^2 + \tfrac{2}{3}(yz) \cdot (al) a_z^3 a_y^2 l_y + \tfrac{6}{7}(yz)^2 \cdot \Delta_y^2 \Delta_z^2$$

$$- \tfrac{5}{42} i_y^4 \cdot i_z'^4 + \tfrac{2}{15} A \cdot (yz)^2 i_y^2 i_z^2 + \tfrac{1}{42} B(yz)^4.$$

Führt man endlich in (36) die Beziehungen (25), (26), (40) ein, so ergiebt sich am Ende:

$$(41) \qquad (\varrho\sigma)^2 =$$

$$= \tfrac{8}{27} a_z^4 a_y^2 l_y^2 + \tfrac{32}{27}(yz) \cdot (al) a_z^3 a_y^2 l_y + \tfrac{16}{25}(yz)^2 \cdot \Delta_y^2 \Delta_z^2$$

$$- \tfrac{32}{40} i_y^4 \cdot i_z'^4 + \tfrac{248}{945} A \cdot (yz)^2 i_y^2 i_z^2 - \tfrac{8}{135} B(yz)^4 - \tfrac{8}{27} A \cdot H_y^4 H_z^4.$$

## Berechnung der Form $(\varrho\varrho)^4$.

Nach (35) ist:

$$(42) \qquad (\varrho\varrho)^4 =$$

$$= 4(HH')^4 H_y^2 H_y'^2 H_z^2 H_z'^2 + \tfrac{9}{49} B(yz)^4 + \tfrac{16}{49}(yz)^2 (\alpha\alpha)^4$$

$$+ \tfrac{36}{35^2}(\beta\beta)^4 - \tfrac{12}{7}(yz)^2 \cdot (iH)^4 H_y^2 H_z^2 + \tfrac{16}{7}(yz) \cdot (iH)^3 i_y H_y^2 H_z^3$$

$$- \tfrac{24}{35}(iH)^2 i_y^2 H_y^2 H_z^4 - \tfrac{24}{49}(ii')^3 i_y i_z' \cdot (yz)^3$$

$$+ \tfrac{36}{245}(yz)^2 \cdot (ii')^2 i_y^2 i_z'^2 - \tfrac{48}{245}(yz) \cdot (\alpha\beta)^4,$$

wobei $\alpha_x^4$ und $\beta_x^4$ die nachstehende Bedeutung haben:

$$\alpha_x^4 = (xz) i_x^3 i_y, \qquad \beta_x^4 = (xz)^2 i_x^2 i_y^2.$$

Die Formen $(\alpha\alpha)^4$, $(\beta\beta)^4$, $(\alpha\beta)^4$ können in folgender Weise leicht berechnet werden. Es ist:

$$\alpha_x^4 = (xz)\cdot i_x^3 i_y, \qquad \alpha_x^3\alpha_z = \frac{3}{4}(xz) i_x^2 i_z i_y,$$

$$(\alpha\alpha)^4 = \alpha_z(i\alpha)^3 i_y = -\frac{3}{4}(ii')^2 i_z i_z' i_y i_y'$$

also nach (23):

$$(43) \qquad (\alpha\alpha)^4 = -\frac{3}{4}\Delta_y^2\Delta_z^2 + \frac{1}{8}(yz)^2\cdot B.$$

$$\beta_x^4 = (xz)^2 i_x^2 i_y^2, \quad \beta_x^2\beta_z^2 = \frac{1}{6}(xz)^2 i_z^2 i_y^2,$$

$$(\beta\beta)^4 = \beta_z^2(i\beta)^2 i_y^2 = \frac{1}{6} i_z^2 i_z'^2 i_y^2 i_y'^2,$$

mithin nach (25):

$$(44) \qquad (\beta\beta)^4 = \frac{1}{6} i_y^4\cdot i_z'^4 - \frac{1}{3}(yz)^2\cdot\Delta_y^2\Delta_z^2 - \frac{1}{36} B(yz)^4.$$

$$\beta_x^3\beta_z = \frac{1}{2}(xz)^2 i_x i_z i_y^2,$$

$$(\alpha\beta)^4 = -\beta_z(\beta i)^3 i_y = -\frac{1}{2}(ii') i_z i_z'^2 i_y^2 i_y' =$$

$$= -\frac{1}{4}(ii') i_y i_y' i_z i_z' (i_y i_z' - i_z i_y') =$$

$$= -\frac{1}{4}(yz)\cdot(ii')^2 i_y i_y' i_z i_z'$$

also wieder nach (23):

$$(45) \qquad (\alpha\beta)^4 = -\frac{1}{4}(yz)\Big[\Delta_y^2\Delta_z^2 - \frac{1}{6}B(yz)^2\Big].$$

Zur Berechnung der Form $(HH')^4 H_y^2 H_y'^2 H_z^2 H_z'^2$ wenden wir die Formel (20) an, und erhalten:

$$(HH')^4 H_y^2 H_y'^2 H_z^2 H_z'^2 =$$

$$= [(HH)^4 H_y^4 H_y'^4]_{z^4} - \frac{2}{7}(yz)^2[(HH')^6 H_y^2 H_y'^2]_{z^3} + \frac{1}{30}(yz)^4\cdot(HH')^8.$$

Nach (24) und (28) ist aber:

$$(46) \qquad [(HH')^4 H_y^4 H_y'^4]_{z^4} =$$

$$= \frac{2}{21}[f\cdot l]_{z^4} + \frac{25}{294}[i^2]_{z^4} - \frac{1}{15} A\cdot H_y^4 H_z^4 =$$

$$= \frac{2}{21} a_z^4 a_y^2 l_y^2 + \frac{2}{21}(yz)\cdot(al) a_z^3 a_y^2 l_y - \frac{36}{343}(yz)^2\Delta_y^2\Delta_z^2$$

$$+ \frac{1}{147} A\cdot(yz)^2 i_y^2 i_z^2 + \frac{25}{294} i_y^4\cdot i_z'^4 - \frac{5}{294} B(yz)^4 - \frac{1}{15} A\cdot H_y^4 H_z^4,$$

ferner nach (13):

$$(47) \qquad [(HH')^6 H_y^2 H_y'^2]_{z^3} = \frac{1}{42} A\cdot i_y^2 i_z^2 + \frac{10}{49}\Delta_y^2\Delta_z^2.$$

Wegen (14), (46), (47) erhält man nunmehr:

$$(48)\qquad (HH')^4 H_y^2 H_y'^2 H_z^2 H_z'^2 =$$
$$= \frac{2}{21} a_z^4 a_y^2 l_y^2 + \frac{2}{21} (yz)\cdot(al)\, a_z^3 a_y^2 l_y - \frac{8}{49} (yz)^2 \Delta_y^2 \Delta_z^2$$
$$+ \frac{25}{294} i_y^4 \cdot i_z'^4 - \frac{2}{49} B (yz)^4 + \frac{1}{225} A^2 (yz)^4 - \frac{1}{15} A \cdot H_y^4 H_z^4 .$$

Vertauscht man hier $i$ mit $i'$ und nimmt die halbe Summe, so wird:

$$(49)\qquad (ii')^3 i_y i_z' = \frac{1}{2} (ii')^3 (i_y i_z' - i_y' i_z) = \frac{1}{2} B(yz) .$$

Wegen der Relationen (11), (22), (38), (40), (43), (44), (45), (48), (49) ergiebt sich schliesslich:

$$(50)\qquad (\varrho\varrho)^4 = \frac{4}{15} a_z^4 a_y^2 l_y^2 - \frac{4}{15} A \cdot H_y^4 H_z^4$$
$$+ \frac{16}{25} (yz)\cdot(al)\, a_z^3 a_y^2 l_y + \frac{32}{75} i_y^4 \cdot i_z'^4 + \frac{4}{175} A \cdot (yz)^2 i_y^2 i_z^2$$
$$- \frac{8}{25} (yz)^2 \cdot \Delta_y^2 \Delta_z^2 - \frac{4}{25} B (yz)^4 + \frac{4}{225} A^2 (yz)^4 .$$

Auf Grund der vorhergehenden Resultate (34), (41), (50) gelangt man nun zum Ausdruck der Form $g$:

$$(51)\qquad g = \frac{4}{27} a_z^4 a_y^2 l_y^2 - \frac{4}{9} A \cdot H_y^4 H_z^4$$
$$+ \frac{16}{9} (yz)\cdot(al)\, a_z^3 a_y^2 l_y + \frac{52}{189} A \cdot (yz)^2 i_y^2 i_z^2$$
$$+ \frac{8}{9} (yz)^2 \Delta_y^2 \Delta_z^2 - \frac{4}{27} B (yz)^4 + + \frac{4}{405} A^2 (yz)^4 .$$

## Berechnung der Form $(gg)^4$.

Aus der letzten Formel folgt:

$$(52)\quad (gg)^4 = \frac{16}{81} (ab)^4 a_y^2 b_y^2 \cdot l_y^2 \cdot l_y'^2 + \frac{16}{81} A^2 \cdot (HH')^4 H_y^4 H_y'^2$$
$$+ \frac{256}{81} \cdot (\lambda\lambda)^4 + \frac{16 \cdot 13^2}{3^6 \cdot 49} (\mu\mu)^4 + \frac{64}{81} (\nu\nu)^4$$
$$- \frac{32}{81} A \cdot (aH)^4 a_y^2 H_y^4 \cdot l_y^2 - \frac{128}{81} (al)(ab)^3 a_y^2 b_y^3 l_y \cdot l_y'^2$$
$$+ \frac{32 \cdot 13}{3^5 \cdot 7} A \cdot (ai)^2 a_y^4 i_y^2 \cdot l_y^2 + \frac{64}{81} (a\Delta)^2 a_y^4 \Delta_y^2 \cdot l_y^2 - \frac{32}{243} Bfl$$
$$+ \frac{32}{3^6 \cdot 5} A^2 f \cdot l + \frac{128}{81} A \cdot (al)(aH)^3 a_y^2 l_y H_y^5$$
$$- \frac{2^5 \cdot 13}{3^5 \cdot 7} A^2 \cdot (iH)^2 i_y^2 H_y^6 - \frac{64}{81} A \cdot (\Delta H)^2 \Delta_y^2 H_y^6 + \frac{32}{243} ABH$$
$$- \frac{2^6}{3^6 \cdot 5} A^3 H + \frac{2^7 \cdot 13}{3^5 \cdot 7} A \cdot (\lambda\mu)^4 + \frac{256}{81} (\lambda\nu)^4 + \frac{2^6 \cdot 13}{3^5 \cdot 7} (\mu\nu)^4 ,$$

wobei wir gesetzt haben:

$$\lambda_z^4 = (yz)\cdot(al)\,a_z^3 a_y^2 l_y, \quad \mu_z^4 = (yz)^2 i_y^2 i_z^2, \quad \nu_z^4 = (yz)^2\cdot\Delta_y^2\Delta_z^2.$$

Die Berechnung der Formen $(\lambda\lambda)^4$, $(\mu\mu)^4$, $(\nu\nu)^4$, $(\lambda\mu)^4$, $(\lambda\nu)^4$, $(\mu\nu)^4$ geschieht durch Polarenbildung folgendermassen:

$$(\lambda\lambda)^4.$$

$$\lambda_z^4 = (yz)\cdot(al)\,a_z^3 a_y^2 l_y, \quad \lambda_z^3\lambda_y = \frac{3}{4}(yz)\,.\,(al)a_z^2 a_y^3 l_y,$$

$$(\lambda\lambda)^4 = \lambda_y(\lambda a)^3(al)\,a_y^2 l_y = -\frac{3}{4}(ab)^2(al)(bl')a_y^3 b_y^3 l_y l_y',$$

und nach (18):

$$(53)\quad (\lambda\lambda)^4 = \frac{1}{4}Bfl - \frac{1}{4}Apl - \frac{3}{8}il^2 + \frac{3}{8}A_{ll}\cdot H.$$

$$(\mu\mu)^4.$$

$$\mu_z^4 = (yz)^2\cdot i_y^2 i_z^2, \qquad \mu_z^2\mu_y^2 = \frac{1}{6}(yz)^2 i_y^4,$$

$$(54)\quad (\mu\mu)^4 = (\mu i)^2\mu_y^2 i_y^2 = \frac{1}{6}i_y^4\cdot i_y'^4.$$

$$(\nu\nu)^4.$$

$$\nu_z^4 = (yz)^2\cdot\Delta_y^2\Delta_z^2, \qquad \nu_z^2\nu_y^2 = \frac{1}{6}(yz)^2\cdot\Delta_y^4,$$

$$(55)\quad (\nu\nu)^4 = (\nu\Delta)^2\nu_y^2\Delta_y^2 = \frac{1}{6}\Delta_y'^4\cdot\Delta_y^4.$$

$$(\lambda\mu)^4.$$

$$\mu_z^3\mu_y = \frac{1}{2}(yz)^2 i_y^3 i_z,$$

$$(\lambda\mu)^4 = -\mu_y(al)(a\mu)^3 a_y^2 l_y = -\frac{1}{2}(ai)(al)a_y^4 i_y^3 l_y =$$

$$= -\frac{1}{4}a_y^4 i_y^2\{(ai)^2 l_y^2 + (al)^2 i_y^2 - (il)^2 a_y^2\},$$

und nach (3)

$$(56)\quad (\lambda\mu)^4 = -\frac{1}{4}pl - \frac{1}{2}i\Delta - \frac{1}{12}Ai^2 + \frac{1}{4}fm.$$

$$(\lambda\nu)^4.$$

$$\nu_z^3\nu_y = \frac{1}{2}(yz)^2\Delta_y^3\Delta_z,$$

$$(\lambda\nu)^4 = -\nu_y(al)(a\nu)^3 a_y^2 l_y = -\frac{1}{2}(a\Delta)(al)a_y^4\Delta_y^3 l_y =$$

$$= -\frac{1}{4}a_y^4\Delta_y^2\{(a\Delta)^2 l_y^2 + (al)^2\Delta_y^2 - (\Delta l)^2 a_y^2\},$$

und wegen der Relationen (3), (4), (6)

$$(57)\quad (\lambda\nu)^4 = -\frac{1}{8}\,il^2 - \frac{1}{24}\,Bfl - \frac{1}{2}\,\Delta^2 - \frac{1}{12}\,Ai\Delta + \frac{1}{4}fn.$$

## $(\mu\nu)^4$.

$$(58)\quad (\mu\nu)^4 = \nu_y^2 (i\nu)^2 i_y^2 = \frac{1}{6}\,i_y^4 \cdot \Delta_y^4.$$

Wenn man im 7. Theil rechts in (52) $a$ mit $b$ vertauscht, und die halbe Summe nimmt, so wird:

$$(59)\quad -\frac{2^6}{3^4}(ab)^3 a_y^2 b_y^2 l_y \cdot l_y'^2 \{(al)b_y - (bl)a_y\} = -\frac{2^6}{3^4}\,il^2.$$

Es ergiebt sich hiermit zufolge (4), (8), (9), (12), (19), (29), (53), (54), (55), (56), (57), (58), (59) als *Endresultat:*

$$(60)\quad (gg)^4 = -\frac{16}{9}\,il^2 - \frac{2^6}{3^7}\,A^2i^2 + \frac{2^5}{3^4}\,Bfl - \frac{2^4}{3^5}\,Apl + \frac{2^5}{3^3}\,A_{ll}\cdot H$$
$$+ \frac{2^4}{3^5}\,A^2fl - \frac{2^4}{3^6}\,A^3H - \frac{2^5\cdot 11}{3^5}\,\Delta^2 - \frac{2^6\cdot 7}{3^6}\,Ai\Delta$$
$$+ \frac{2^5}{3^5}\,ABH + \frac{2^5}{3^5}\,Afm + \frac{2^6}{3^4}\,fn.$$

### Berechnung der Form I.

Nach (33) ist:

$$(\varrho\varrho)^6 = 4(HH')^6 H_y^2 H_y'^2 + \frac{9}{49}(\vartheta\vartheta)^6 - \frac{12}{7}(iH)^4 H_y^4,$$

wo gesetzt ist:

$$\vartheta_x^6 = (xy)^2 \cdot i_x^4.$$

Durch Polarenbildung findet man:

$$\vartheta_x^4 \vartheta_y^2 = \frac{2}{5}(xy)^2 i_x^2 i_y^2,$$

und daher:

$$(\vartheta\vartheta)^6 = (\vartheta i)^4 \vartheta_y^2 = \frac{2}{5}(ii')^2 i_y^2 i_y'^2 = \frac{2}{5}\Delta,$$

$$(61)\quad (\varrho\varrho)^6 = \frac{2}{5}\left(\Delta - \frac{1}{3}Ai\right).$$

Nach (34) ist:

$$(62)\quad (\sigma\sigma)^2 = \frac{8^2}{9^2}(ii')^2 i_y^2 i_y'^2 - \frac{8^2}{9.27}\,A\cdot i_y^4 = \frac{8^2}{9^2}\left(\Delta - \frac{1}{3}Ai\right).$$

Zufolge der vorhergehenden Resultate erhält man nun:

$$(63)\quad I = \frac{10}{9}\left(\Delta - \frac{1}{3}Ai\right).$$

### Berechnung der Steiner'schen Covariante $S$.

Aus (2), (60) und (63) ergiebt sich:

$$S = \frac{I^2}{6} - (gg)^4 = \frac{2.67}{3^4}\Delta^2 + \frac{2.19}{3^6}A^2i^2 + \frac{2^2.29}{3^5}Ai\Delta + \frac{2^4}{3^2}il^2$$
$$- \frac{2^5}{3^4}Bfl + \frac{2^3}{3^5}Apl + \frac{2^4}{3^5}A^2fl - \frac{2^4}{3^6}A^3H$$
$$- \frac{2^5}{3^5}Afm - \frac{2^6}{3^4}fn - \frac{2^7}{3^5}ABH - \frac{2^6}{3^3}CH,$$

und, mit Anwendung der Syzygies (31), (32):

$$(64)\quad S = \frac{2}{3^6}(-3^2\cdot5^3\Delta^2 - 3^2\cdot5A^2i^2 - 2\cdot3^2\cdot5^2Ai\Delta - 2^4\cdot3^2Bfl$$
$$- 2^3\cdot3A^2fl + 2^3A^3H + 2^4\cdot3^2Afm + 2^6\cdot3^2fn).$$

## § 3.

## Zusammenhang der beiden Gleichungssysteme $S \equiv 0$ und $m - \frac{4}{15}A\cdot l \equiv 0$.

Aus dem Gleichungssystem

$$(65)\qquad m - \frac{4}{15}A\cdot l \equiv 0$$

folgt durch zweite Ueberschiebung über die Covariante $i$:

$$(66)\qquad n - \frac{16}{225}A^2\cdot l \equiv 0,$$

und ebenso ergeben sich durch die zweiten Ueberschiebungen von (65) und (66) resp. über $l$ und $m$ die Invariantenrelationen:

$$A_{lm} - \frac{4}{15}A\cdot A_{ll} = 0, \quad A_{mm} - \frac{16}{225}A^2\cdot A_{lm} = 0,$$

die nach (2) in die folgenden übergehen:

$$A(3^2\cdot5^3\cdot C - 2^4A^3) + (3\cdot5^2B - 2A^2)(3\cdot5^2B - 2^3A^2) = 0,$$
$$(3^2\cdot5^3C - 2^4A^3) + 2\cdot3A(3\cdot5^2B - 2^3A^2) = 0,$$

und demnach die Relationen nach sich ziehen:

$$(67)\qquad 3\cdot5^2\cdot B - 2^3A^2 = 0, \qquad 3^2\cdot5^3\cdot C - 2^4A^3 = 0,$$

da wir die Voraussetzung $A_{ll} = 0$ und folglich*)

$$A_{lm} = B = C = D = 0, \quad l \equiv 0,$$

ausschliessen.

Mit Hülfe der Formeln (65), (66), (67) wird die Gleichung:

$$A_{lm}\cdot i + A_{ll}\cdot\Delta + \frac{1}{2}Bl^2 - 2ln - m^2 = 0$$

*) Vergl. die oben citirte Abhandlung S. 27.

in

$$2^3 \cdot Ai + 2 \cdot 3 \cdot 5A\Delta - 3 \cdot 5^2 l^2 \equiv 0 \tag{68}$$

und die Gleichung:

$$fn + CH - \tfrac{3}{4} il^2 - \tfrac{1}{2} Ai\Delta - 2\Delta^2 = 0$$

in

$$\tfrac{2^4}{3^2 \cdot 5^3} A^2(5fl + AH) - \tfrac{2}{5^2}(5\Delta + Ai)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2^2 \cdot 5^2}(2^3 A^2 i^2 + 2.3.5 Ai\Delta - 3.5^2 il^2) = 0$$

verwandelt; also ist nach (68)

$$\tfrac{2^4}{3^2 \cdot 5^3} A^2(5fl + AH) - \tfrac{2}{5^2}(5\Delta + Ai)^2 = 0. \tag{69}$$

Aus den Formeln (65), (66), (67), (69) folgt schliesslich das Bestehen des Gleichungssystems

$$\begin{matrix}36\\2\end{matrix} S = 2^6 \cdot 3^2 f\left(n - \tfrac{2^4}{3^2 \cdot 5^2} A^2 l\right) + 2^4 \cdot 3^2 Af\left(m - \tfrac{2^2}{3 \cdot 5} Al\right)$$
$$- 2^4 \cdot 3^2 fl\left(B - \tfrac{2^3}{3 \cdot 5^2} A^2\right)$$
$$+ 2^3 A^2(5fl + AH) - 5 \cdot 3^2(5\Delta + Ai)^2 = 0.$$

Umkehrung. *Besitzt $f$ ein Tripelelement, so ist*

$$2^2 A \cdot l - 3 \cdot 5m = 0.$$

Der Beweis ergiebt sich aus der Betrachtung einer Form 6. Ordnung, die in zwei cubische Factoren zerlegt ist:

$$f = \alpha_x^3 \cdot \beta_x^3 = \alpha_x'^3 \cdot \beta_x'^3 = a_x^6.$$

Durch Anwendung der Formel (20) erhält man:

$$a_x^4 a_z^2 = \alpha_x^2 \beta_x^2 \alpha_z \beta_z + \tfrac{1}{5}(xz)^2 \cdot p_x^2, \tag{70}$$

wobei

$$(\alpha\beta)^2 \alpha_x \beta_x = p_x^2$$

gesetzt ist, und

$$a_x^2 a_y^2 a_z^2 = \tfrac{1}{2}(\alpha_x^2 \beta_y^2 \alpha_z \beta_z + \alpha_y^2 \beta_x^2 \alpha_z \beta_z) - \tfrac{2}{5}(xy)^2 \cdot p_z^2 \tag{71}$$
$$+ \tfrac{1}{10}(yz)^2 \cdot p_x^2 + \tfrac{1}{10}(xz)^2 \cdot p_y^2.$$

Aus (70) und (71) ergiebt sich nun:

$$i = (ab)^4 a_x^2 b_x^2 = (a\alpha)^2 (a\beta)^2 \alpha_x \beta_x a_x^2 + \tfrac{1}{5}(ap)^2 a_x^4$$

$$(a\alpha)^2 (a\beta)^2 \alpha_x \beta_x a_x^2 = \tfrac{1}{2}\left\{(\alpha\alpha')^2 \alpha_x \alpha_x' \cdot (\beta\beta')^2 \beta_x \beta_x' + (\alpha\beta')^2 \alpha_x \beta_x' \cdot (\beta\alpha')^2 \beta_x \alpha_x'\right\}$$
$$- \tfrac{2}{5} p^2 + \tfrac{1}{10}(p\alpha)^2 \alpha_x \cdot \beta + \tfrac{1}{10}(p\beta)^2 \beta_x \cdot \alpha$$

und daher:

$$i = \tfrac{1}{2}\Delta\cdot\nabla + \tfrac{1}{10}p^2 + \tfrac{1}{10}(p\alpha)^2\alpha_x\cdot\beta + \tfrac{1}{10}(p\beta)^2\beta_x\cdot\alpha + \tfrac{1}{5}(ap)^2a_x^4,$$

wo

$$(\alpha\alpha')^2\alpha_x\alpha_x' = \Delta,^*) \qquad (\beta\beta')^2\beta_x\beta_x' = \nabla$$

gesetzt ist.

Aus (70) folgt auch:

$$(ap)^2a_x^4 = (p\alpha)(p\beta)\alpha_x^2\beta_x^2 + \tfrac{1}{5}p^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}\alpha_x\beta_x\{(p\alpha)^2\beta_x^2 + (p\beta)^2\alpha_x^2 - (\alpha\beta)^2\cdot p_x^2\} + \frac{p^2}{5} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(p\alpha)^2\alpha_x\cdot\beta + \tfrac{1}{2}(p\beta)^2\beta_x\cdot\alpha - \tfrac{3}{10}p^2.$$

Ueberdies ist**)

$$(p\alpha)^2\alpha_x = -\tfrac{1}{2}(\Delta\beta)^2\beta_x,$$

$$(p\beta)^2\beta_x = -\tfrac{1}{2}(\nabla\alpha)^2\alpha_x,$$

folglich:

$$(72)\quad i = \tfrac{1}{2}\Delta\cdot\nabla - \tfrac{1}{10}(\Delta\beta)^2\beta_x\cdot\beta - \tfrac{1}{10}(\nabla\alpha)^2\alpha_x\cdot\alpha + \tfrac{1}{25}p^2.$$

Nach derselben Formel (20) ergiebt sich:

$$a_x^3a_y^3 = \tfrac{1}{2}(\alpha_x^3\beta_y^3 + \alpha_y^3\beta_x^3) - \tfrac{9}{10}(xy)^2\cdot p_xp_y,$$

also

$$A = (ab)^6 = (a\alpha)^3(a\beta)^3 =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha')^3(\beta\beta')^3 + \tfrac{1}{2}(\beta\alpha')^3(\alpha\beta')^3 - \tfrac{9}{10}(p\alpha)(p\beta)(\alpha\beta)^2 =$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\alpha'\beta)^3(\alpha\beta')^3 - \tfrac{9}{10}(pp')^2 = -\tfrac{1}{2}J^2 - \tfrac{9}{10}P,$$

wobei wir

$$(\alpha\beta)^3 = J, \qquad (pp')^2 = P$$

gesetzt haben.

Nach der Formel

$$(\alpha\beta)^2\alpha_x\beta_y = p_xp_y + \tfrac{1}{2}J(xy)$$

ist jedoch

$$(\alpha\beta)^2(\alpha'\beta')^2(\alpha\alpha')(\beta\beta') = P^2 + \tfrac{1}{2}J^2.$$

Die linke Seite hier ist gleich:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha\alpha')(\beta\beta')\{(\alpha\beta)^2(\alpha'\beta')^2 - (\alpha'\beta)^2(\alpha\beta')^2\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha')^2(\beta\beta')^2\{(\alpha\beta)(\alpha'\beta') + (\alpha'\beta)(\alpha\beta')\} =$$

$$= (\alpha\alpha')^2(\beta\beta')^2(\alpha\beta)(\alpha'\beta') = (\Delta\nabla)^2;$$

*) Wo nun der Buchstabe $\Delta$ eine von der vorhergehenden verschiedene Bedeutung hat.

**) Vergl. Clebsch, Theorie der binären alg. Formen S. 223 (5).

also:

$$(\Delta\nabla)^2 = P^2 + \tfrac{1}{2} J^2,$$

$$A = \tfrac{1}{10} P^2 - (\Delta\nabla)^2. \tag{73}$$

Wir nehmen jetzt an, dass $\beta_x^3$ ein Cubus sei und daher

$$\nabla = 0, \qquad A = \tfrac{1}{10} P,$$

$$i = -\tfrac{1}{10} (\Delta\beta)^2 \cdot \beta_x^4 + \tfrac{1}{25} p^2. \tag{74}$$

Aus der letzten Formel ergiebt sich:

$$l = (ai)^4 a_x^2 = -\tfrac{1}{10} (\Delta\beta)^2 \cdot (a\beta)^4 a_x^2 + \tfrac{1}{25} (ap)^2 (ap')^2 a_x^2$$

und aus den Formeln (70), (71)

$$(a\beta)^4 a_x^2 = (a\beta)^2 (\beta\beta)^2 \alpha_x \beta_x + \tfrac{1}{5} (p\beta)^2 \beta_x^2 = 0,$$

$$(ap)^2 (ap')^2 a_x^2 = \tfrac{1}{2} \{(p\alpha)^2 (p'\beta)^2 \alpha_x \beta_x + (p\beta)^2 (p'\alpha)^2 \alpha_x \beta_x\} - \tfrac{1}{5} P \cdot p$$

$$= -\tfrac{1}{5} P \cdot p;$$

also:

$$l = -\tfrac{1}{125} P \cdot p = -\tfrac{2}{5^3} A \cdot p. \tag{75}$$

Wenn man die $2^{te}$ Polare von $y$ auf beiden Seiten der Formel (74) nimmt, und $y_1, y_2$ bez. für $l_2, -l_1$ setzt, so erhält man:

$$i_x^2 i_y'^2 = -\tfrac{1}{10} (\Delta\beta)^2 \cdot \beta_x^2 \beta_y'^2 + \tfrac{1}{25} p_x^2 p_y'^2 - \tfrac{1}{75} (xy)^2 \cdot P,$$

$$m = -(il)^2 i_x^2 = -\tfrac{1}{125} P (ip)^2 i_x^2 = -\tfrac{1}{125} P \left[\tfrac{1}{25} P \cdot p - \tfrac{1}{75} P \cdot p\right], \tag{76}$$

$$m = -\tfrac{2}{3 \cdot 5^5} P^2 \cdot p = -\tfrac{2^3}{3 \cdot 5^3} A^2 \cdot p.$$

Aus (75) und (76) folgt nun unmittelbar:

$$3 \cdot 5m - 2^2 A \cdot l = 0,$$

was zu beweisen war.

Mezzoiuso, den 20. August 1887.

# Synthetische Untersuchungen über die Schmiegungsebenen beliebiger Raumcurven und die Realitätsverhältnisse specieller Kegelschnittsysteme.

Von

Adolf Kneser in Breslau.

Wenn eine beliebig gegebene Raumcurve von irgend einem Punkte aus auf eine Ebene projicirt wird, so gehen genau so viele ihrer Schmiegungsebenen durch das Projectionscentrum, wie die Anzahl der Wendepunkte der Bildcurve beträgt. Will man sich also über die scheinbaren Gestalten orientiren, welche die gegebene Curve von verschiedenen Punkten gesehen annimmt, so muss man wissen, wie viele Schmiegungsebenen der Curve durch einen beliebigen Punkt je nach seiner Lage hindurchgehen. Diese Anzahl kann sich, wie man leicht sieht, nur ändern, wenn der betrachtete Punkt die von den Tangenten der Curve gebildete abwickelbare Fläche oder gewisse singuläre Ebenen überschreitet; demgemäss zerfällt der Raum in derartige Gebiete, dass von irgend zwei demselben Gebiet angehörigen Punkten gesehen die gegebene Curve dieselbe Anzahl scheinbarer Wendepunkte besitzt. Indessen scheint noch nirgends genauer untersucht zu sein, in welcher Weise sich jene Gebiete gegeneinander abgrenzen, welches in den einfachsten Fällen ihre Anzahl und welches die zugehörige Anzahl scheinbarer Wendepunkte ist. Diese Fragen bilden den Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchung.

Die hierbei erhaltenen Resultate finden eine Anwendung unter Anderm in der Theorie gewisser Kegelschnittsysteme. Projicirt man z. B. eine Ebene nebst einer in ihr beliebig gegebenen Curve stereographisch auf eine Kugelfläche, so sind die Bilder der Krümmungskreise der Curve nichts anderes als die Schnitte der Kugel mit den Schmiegungsebenen der sphärischen Bildcurve. Weiss man nun, wie viele dieser Ebenen durch einen gegebenen Punkt der Kugelfläche gehen, so kennt man damit für den entsprechenden Punkt der Ebene

die Anzahl der durch ihn gehenden reellen Krümmungskreise der gegebenen Curve. In ähnlicher Weise kann man die Theorie der auf einem geradlinigen Hyperboloid liegenden Curven verwerthen für die Untersuchung der Systeme von Kegelschnitten, welche durch zwei reelle feste Punkte gehen und eine beliebig gegebene Curve osculiren. Die Ergebnisse dieser specielleren Entwicklungen können als gewissermassen inductives Material für allgemeinere Betrachtungen über die Realitätsverhältnisse beliebiger Kegelschnittsysteme betrachtet werden.

## § 1.

### Hülfssätze über ebene Curven.

1. Der allgemeinen Untersuchung über die scheinbaren Wendepunkte der Raumcurven müssen analoge Betrachtungen über ebene Curven vorausgeschickt werden.

Auf einer beliebig gegebenen ebenen Curve, welche aus einem oder mehreren geschlossenen oder ungeschlossenen Zügen bestehen kann, sei der Punkt $P$ nicht singulär und von den Endpunkten verschieden; die Tangente der Curve in $P$ heisse $t$. Dann kann man zu beiden Seiten dieses Punktes längs der Curve einen Bogen $\mathfrak{B}$ von folgender Beschaffenheit abgrenzen. Erstens hat keine Gerade mit $\mathfrak{B}$ mehr als zwei Punkte gemein. Zweitens sei $Q$ ein beliebiger von $P$ verschiedener Punkt der Tangente $t$: dann zerfallen alle durch $Q$ gehenden und von $t$ hinreichend wenig verschiedenen Geraden der Ebene in solche, welche zwei und solche, welche keinen Punkt mit $\mathfrak{B}$ gemein haben; die Geraden der einen Art werden durch $t$ von denen der andern Art getrennt. — Begegnet ferner eine beliebige Gerade $g$ der gegebenen Curve nicht, so gilt dasselbe von allen Geraden, welche der Lage nach von $g$ hinreichend wenig verschieden sind.

Alle diese Behauptungen kann man entweder als selbstverständliche Axiome ansehen, da bei geometrisch anschaulichen Curven ihre Richtigkeit evident ist: oder man kann sie als Bestimmungen betrachten, durch welche der Begriff der stetigen Curve genauer begrenzt wird, sodass alle stetigen Punktreihen, bei welchen jene Sätze im Allgemeinen unrichtig sind, nicht als Curven in unserm Sinne anzusehen und bei den folgenden Untersuchungen stillschweigend auszuschliessen sind.

2. Jetzt sei in der Ebene ein beliebiger von Singularitäten freier Bogen $\mathfrak{C}$ gegeben, der, falls er in's Unendliche geht, auch hier im Sinne der projectiven Auffassung stetigen Zusammenhang behält, und überhaupt mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat; dabei möge, wie gewöhnlich, eine Berührung als doppelter Schnitt gerechnet werden. Zwei beliebige, in $P_1$ und $P_2$ berührende Tangenten des Bogens $\mathfrak{C}$, welche sich in $S$ schneiden, theilen dann, wie überhaupt

irgend zwei Gerade, die Ebene in zwei Hälften, deren jede im projectiven Sinne ein zusammenhängendes Gebiet bildet. Schneiden sich nämlich die Geraden im Endlichen, so besteht jede Hälfte aus einem Paar zusammengehöriger Scheitelwinkelräume; sind sie parallel, so ist die eine Hälfte der von ihnen umschlossene, die andere der äussere Theil der Ebene. Die Curve $\mathfrak{C}$ liegt nun ganz in der einen der beiden von $SP_1$ und $SP_2$ abgegrenzten Hälften, da diese Geraden in den Berührungspunkten von $\mathfrak{C}$ nicht überschritten werden, im Uebrigen aber der Curve nach Voraussetzung nicht mehr begegnen. Zieht man also in der die Curve nicht enthaltenden jener beiden Hälften durch $S$ eine Gerade $g$, so trifft diese die Curve nicht; letztere verläuft also ganz im Endlichen, wenn man $g$ durch collineare Transformation zur unendlichfernen Geraden macht.

Nach dieser Transformation sind die Tangenten $SP_1$ und $SP_2$ parallel, und die Curve $\mathfrak{C}$ besässe drei parallele Tangenten, wenn durch $S$ noch eine dritte Tangente gezogen werden könnte. Dann aber müsste die mittlere der drei parallelen Tangenten von der Curve $\mathfrak{C}$ durchsetzt werden, da diese sich in den Berührungspunkten der beiden äusseren Tangenten auf entgegengesetzten Seiten der mittleren befindet und ganz im Endlichen verläuft. Eine Durchsetzung findet aber im Berührungspunkte nicht statt und ausser diesem haben Curve und Tangente keinen Punkt gemein; die dritte Tangente durch $S$ ist also unmöglich, d. h. *ein von Singularitäten freier ebener Bogen, der keiner Geraden mehr als zweimal begegnet, schickt durch keinen Punkt mehr als zwei Tangenten.* Hieraus folgt durch Uebergang zur reciproken Figur, *dass ein Bogen, von dessen Tangenten durch keinen Punkt mehr als zwei gehen, mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat.*

3. Da der Bogen $\mathfrak{C}$, wie bemerkt, in's Endliche projicirt werden kann, so ist evident, dass, wenn $\nu$ eine der Zahlen 0, 1, 2 ist, alle Geraden der Ebene, welche mit $\mathfrak{C}$ genau $\nu$ Punkte gemein haben, ein Continuum bilden; die so erhaltenen drei Continuen werden durch die Tangenten und die durch die Endpunkte des Bogens $\mathfrak{C}$ gehenden Geraden von einander getrennt. Geht man zur reciproken Figur über, so kann die Voraussetzung, dass der betrachtete Bogen keiner Geraden mehr als zweimal begegnet, beibehalten werden, da sie nach Nr. 2 in sich reciprok ist; man kann also mit Berücksichtigung der eben erwähnten Continuen folgenden Satz formuliren:

*Begegnet ein von Singularitäten freier ebener Bogen keiner Geraden mehr als zweimal, so zerfällt die Ebene in drei derartige Gebiete* (0), (1), (2), *dass durch jeden Punkt des Gebiets* ($\nu$) *genau $\nu$ Tangenten des Bogens gehen. Dabei werden die Gebiete* (0) *und* (2) *durch den Bogen selbst, dagegen* (0) *und* (1) *sowie* (1) *und* (2) *durch die Endtangenten des Bogens von einander geschieden.*

## § 2.

### Allgemeine Hülfssätze über Raumcurven.

1. Um analoge Entwicklungen für Raumcurven durchführen zu können, werde zunächst festgesetzt, dass beim Schnitt einer Ebene mit einer Raumcurve jede Berührung als doppelter, jede Osculation als dreifacher Schnitt zu rechnen ist; dass ferner unter den durch einen Punkt $P$ gehenden Schmiegungsebenen diejenigen, deren Tangente durch $P$ geht, doppelt, die in $P$ osculirenden dreifach gezählt werden.

Wenn nun zunächst mit einem nirgends singulären Raumcurvenbogen eine Ebene $\varepsilon$, die weder Tangenten noch Endpunkte des Bogens enthält, $\nu$ getrennte Punkte und keinen Endpunkt gemein hat, so ist evident, dass dasselbe von jeder Ebene gilt, welche von $\varepsilon$ hinreichend wenig verschieden ist. Für die reciproke Figur folgt hieraus, dass, wenn von den Schmiegungsebenen eines nirgends singulären Bogens genau $\nu$ durch einen Punkt $E$ gehen, der keiner Tangente oder Endschmiegungsebene des Bogens angehört, auch durch jeden hinreichend nahe bei $E$ liegenden Punkt $\nu$ Schmiegungsebenen hindurchgehen. *Die Anzahl der durch einen Punkt gehenden Schmiegungsebenen eines nirgends singulären Bogens ändert sich also nur, wenn der Punkt die abwickelbare Fläche oder eine Endschmiegungsebene des Bogens überschreitet.*

2. Wenn ferner der betrachtete Bogen in $P$ von der Ebene $\varepsilon$ einfach berührt wird, so sei $g$ eine nicht durch $P$ gehende Gerade in $\varepsilon$ und $O$ ein auf $g$, nicht aber auf der Schmiegungsebene von $P$ liegender Punkt. Dann hat die Raumcurve von $O$ aus gesehen in der Nähe von $P$ keinen scheinbaren Wendepunkt; ein hinreichend kleines Stück $\mathfrak{B}$ der Curve, welches den Punkt $P$ enthält, wird also von $O$ aus auf eine beliebige Ebene $\eta$ in einen nirgends singulären Bogen $\mathfrak{B}$ projicirt, welcher von der Geraden $t = |\varepsilon\eta|$ berührt wird in einem von $G = (gt)$ verschiedenen Punkte. Die durch $G$ gehenden und von $t$ hinreichend wenig verschiedenen Geraden in $\eta$ werden also nach § 1 Nr. 1 durch $t$ in zwei Hälften zerlegt: die einen haben keinen, die andern zwei Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemein. Nennt man erstere $t'$, letztere, zu welchen auch $t$ gehört, $t''$, so haben die Ebenen $[gt'']$ mit $\mathfrak{B}$ ebenso viel Punkte, die Ebenen $[gt']$ zwei Punkte weniger gemein als $\varepsilon$. Nimmt man nun an, dass diese ausser $P$ nur getrennte Punkte und keine Endpunkte mit der gegebenen Curve gemein hat, so folgt, mit Rücksicht auf Nr. 1, dass die Ebenen $[gt'']$ auch mit der ganzen Curve ebenso viel, die Ebenen $[gt']$ zwei Punkte weniger gemein haben als $\varepsilon$. Hieraus ergiebt sich für die reciproke Figur folgendes Resultat.

*Liegt der Punkt $E$ auf der Tangente $t$ des von $E$ verschiedenen*

*Punktes P eines nirgends singulären Bogens, aber auf keiner weiteren Tangente und keiner Endschmiegungsebene, so wird jede durch E gehende Gerade welche der Schmiegungsebene des Punktes P nicht angehört, in der Nähe des Punktes E durch diesen in zwei Theile zerlegt; durch jeden Punkt des einen Theils gehen ebenso viele Schmiegungsebenen des Bogens wie durch E, durch jeden Punkt des andern zwei Schmiegungsebenen weniger.*

3. In irgend zwei reciprok auf einander bezogenen Räumen entspricht jedem Richtungssinn einer Geraden ein bestimmter Drehungssinn um die zugeordnete Gerade. Wenn z. B. $A$ und $B$ die Endpunkte eines beliebigen Raumcurvenbogens, $A'$ und $B'$ die Endpunkte des Bogens sind, dessen Schmiegungsebenen den Punkten des ersteren entsprechen, und man lässt den Punkt $W$ von $A$ nach $B$ längs des Bogens $AB$ laufen, so wird auf jeder Tangente desselben ein bestimmter Richtungssinn definirt, derjenige nämlich, in welchem das der Curve angehörige Element der Tangente von $W$ durchlaufen wird. Der entsprechende Drehungssinn um die zugeordnete Tangente des Bogens $A'B'$ ist dann derjenige, in welchem die dem Punkt $W$ entsprechende Ebene um die Tangente eine unendlich kleine Drehung ausführt, indem sie in der Richtung von $A'$ nach $B'$ alle Schmiegungsebenen des Bogens $A'B'$ durchläuft. Speciell hat man, entsprechend der Richtung in welcher die Curve $AB$ von $A$ ausgeht, um die Tangente des Endpunktes $A'$ herum einen bestimmten Sinn, in welchem die Schmiegungsebene sich dreht, wenn man von $A'$ aus den Bogen $A'B'$ durchläuft.

Wenn nun eine variabele Ebene eine Lage passirt, in welcher sie durch $A$ geht, so gewinnt oder verliert sie offenbar einen Schnittpunkt mit dem Bogen $AB$, je nachdem die Richtung der Bewegung ihres Schnittpunktes mit der Tangente in $A$ identisch oder nicht identisch ist mit der Richtung, in welcher die Curve $AB$ von $A$ ausgeht; daraus folgt durch Uebergang zur reciproken Figur nach dem Obigen folgendes Resultat.

*Ueberschreitet der Punkt V die Schmiegungsebene des Endpunktes A eines nirgends singulären Bogens, so vermehrt oder vermindert sich die Anzahl der durch V gehenden Schmiegungsebenen des Bogens um Eins, je nachdem der Drehungssinn der Ebene, welche durch V und die Tangente in A geht, übereinstimmt oder nicht mit dem Sinne, in welchem die Schmiegungsebene des Bogens um diese Tangente eine unendlich kleine Drehung macht, wenn man von A aus den Bogen entlang geht.*

## § 3.

## Raumcurven mit nicht mehr als drei scheinbaren Wendepunkten.

1. Nach diesen allgemeinen Voruntersuchungen möge jetzt ein specieller Fall genauer betrachtet werden.

Der von Singularitäten freie Bogen $\Gamma_0$ möge von keiner Ebene in mehr als drei Punkten geschnitten werden, wobei selbstverständlich eine Berührung als doppelter, eine Osculation als dreifacher Schnitt zu rechnen ist. Dann sei $P$ ein beliebiger Punkt, $A_0$ und $B_0$ die Endpunkte des Bogens $\Gamma_0$; durch $A_0$ und die Tangente $t$ des Punktes $P$ gehe die Ebene $\varepsilon$. Dreht man diese um $t$ hinreichend wenig in solchem Sinne herum, dass ihr Schnittpunkt mit der Tangente des Punktes $A_0$ längs dieser sich in entgegengesetzter Richtung bewegt, wie die Curve $\Gamma_0$ von $A_0$ ausgeht, so geht offenbar ein Schnittpunkt von $\varepsilon$ mit $\Gamma_0$ verloren und bleiben nur noch die beiden in $P$ zusammenfallenden übrig. In der so veränderten Ebene $\varepsilon$ sei $g$ eine beliebige nicht durch $P$ gehende Gerade; dann kann man wie in § 2 Nr. 2 durch $g$ Ebenen $\varepsilon'$ legen, welche von $\varepsilon$ beliebig wenig verschieden sind und innerhalb einer gewissen Umgebung von $P$ mit $\Gamma_0$ keinen Punkt gemein haben. Da nun bei unbegrenzter Annäherung einer Ebene an die Lage $\varepsilon$ die Schnittpunkte mit $\Gamma_0$, wenn solche überhaupt vorhanden sind, dem Punkte $P$ beliebig nahe rücken müssen, so folgt, dass die Ebenen $\varepsilon'$ überhaupt keinen Punkt mit $\Gamma_0$ gemein haben. Macht man also eine derselben durch collineare Transformation des Raumes zur unendlich fernen Ebene, so liegt der Bogen $\Gamma_0$ ganz im Endlichen; in dieser Gestalt soll er fortan betrachtet werden.

2. Die Punkte $A_0$ und $B_0$ theilen ihre gerade Verbindungslinie in einen endlichen und einen unendlichen Abschnitt. Demgemäss zerfällt die Gesammtheit aller Ebenen, welche weder durch $A_0$ noch durch $B_0$ gehen, in zwei Hälften; die einen schneiden die Gerade $A_0B_0$ auf der endlichen, die andern auf der unendlichen Strecke $A_0B_0$. Jede der ersteren muss mit $\Gamma_0$ eine ungerade Zahl von Punkten gemein haben, da die Curve in $A_0$ und $B_0$ auf verschiedenen Seiten einer solchen Ebene liegt und ganz im Endlichen bleibt; eine Ebene, welche die unendliche Strecke $A_0B_0$ trifft, hat eine gerade Zahl von Punkten mit der Curve gemein, da diese in $A_0$ und $B_0$ auf derselben Seite der Ebene liegt. — Geht man zur reciproken Figur über, so entspricht dem Bogen $\Gamma_0$ ein von Singularitäten freier Bogen $\Gamma$, von dessen Schmiegungsebenen nie mehr als drei durch einen Punkt gehen; den beiden Hälften, in welche alle Ebenen nach ihrer Lage zu $A_0$ und $B_0$ zerfallen, entsprechen die beiden Hälften, in welche der Punktraum durch die Endschmiegungsebenen $\alpha$ und $\beta$ zerlegt wird, gerade so wie nach § 1 Nr. 2 die Ebene durch irgend zwei Gerade zerlegt wird. Diese beiden Raumhälften, deren jede ein im projectiven Sinne zusammenhängendes Gebiet bildet, mögen durch $(\alpha\beta)_1$ und $(\alpha\beta)_2$ bezeichnet werden; die Punkte der ersteren mögen den die endliche Strecke $A_0B_0$ treffenden Ebenen entsprechen. Aus dem über diese Ebenen bemerkten folgt dann, dass durch jeden Punkt von $(\alpha\beta)_1$ eine

ungerade Anzahl, also eine oder drei Schmiegungsebenen des Bogens $\Gamma$ gehen; ebenso folgt aus dem Obigen, dass jeder Punkt von $(\alpha\beta)_2$ auf keiner oder zweien dieser Schmiegungsebenen liegt. Speciell gehört die Curve $\Gamma$ selbst der Hälfte $(\alpha\beta)_1$ an, indem für jeden Curvenpunkt nach § 2 Nr. 1 die in ihm osculirende Schmiegungsebene dreifach zu zählen ist.

3. Wenn nun zwei Ebenen $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ mit $\Gamma_0$ keinen Punkt gemein haben, so bleibt die Curve $\Gamma_0$ ganz in dem einen der beiden durch $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ abgegrenzten Halbräume; man kann also in dem andern, indem man eine Ebene sich um die Schnittlinie von $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ drehen lässt, zwischen diesen beiden Ebenen eine stetige Verbindung herstellen durch Ebenen, deren keine mit $\Gamma_0$ einen Punkt gemein hat. Da ferner irgend zwei Systeme von je drei auf $\Gamma_0$ liegenden Punkten, ohne die Curve zu verlassen, stetig ineinander übergeführt werden können, so folgt, dass sowohl die Ebenen, welche von $\Gamma_0$ nicht, als die, welche dreimal getroffen werden, ein Continuum bilden. — Wenn überhaupt eine Ebene mit $\Gamma_0$ genau $\nu$ getrennte Punkte gemein hat, so gilt dasselbe von allen ihr hinreichend nahe benachbarten Ebenen; also kann man zwischen irgend zwei Curvenpunkten eine Reihe von Curvenpunkten, zwischen irgend zwei Secanten eine Reihe von Secanten, deren jede mit der folgenden einen Punkt der Curve gemein hat, in folgender Weise einschalten. In beiden Reihen können durch jedes Element zwei Ebenen gelegt werden, welche im ersten Falle nur je einmal, im zweiten nur je zweimal von $\Gamma_0$ getroffen werden; die eine der durch ein Element gelegten Ebenen kann mit einer durch das vorhergehende, die andere mit einer durch das nachfolgende Element gelegten durch eine stetige Reihe von Ebenen verbunden werden, die sämmtlich ebenso viel Punkte wie die verbundenen Ebenen mit $\Gamma_0$ gemein haben. Da nun durch Projection der Curve von einem ihrer Punkte leicht erkannt wird, dass alle durch einen bestimmten Curvenpunkt oder eine bestimmte Secante gehenden Ebenen, welche von $\Gamma_0$ nur einmal bez. nur zweimal geschnitten werden, ein Continuum bilden, so folgt, dass sowohl die Ebenen, welche nur einen, als die, welche nur zwei Punkte mit $\Gamma_0$ gemein haben, ein Continuum bilden. Geht man jetzt zur reciproken Figur über, und berücksichtigt die in Nr. 2 erhaltenen Resultate, so ergiebt sich:

*Hat ein stetiger nirgends singulärer Raumcurvenbogen von irgend einem Punkte gesehen stets höchstens drei scheinbare Wendepunkte, so wird der Raum durch die von den Tangenten gebildete abwickelbare Fläche und die Schmiegungsebenen der Endpunkte des Bogens in vier derartige Continuen* (0), (1), (2), (3) *zerlegt, dass durch jeden Punkt des Gebiets* ($\nu$) *genau $\nu$ Schmiegungsebenen des Bogens hindurchgehen. — Dabei besteht der eine der beiden durch die Endschmiegungsebenen abgegrenzten Halbräume aus den Gebieten* (1) *und* (3), *der andere aus*

*den Gebieten* (0) *und* (2), *und die abwickelbare Fläche bildet die Grenze sowohl zwischen* (1) *und* (3) *als auch zwischen* (0) *und* (2).

4. Dieser Satz vereinfacht sich noch, wenn man geschlossene Curven betrachtet. Es sei eine von Singularitäten freie, geschlossene Curve gegeben, welche durch keinen Punkt mehr als drei ihrer Schmiegungsebenen schickt. Scheidet man dann von ihr ein beliebig kleines Stück $AB$ aus, so ist offenbar der Rest ein Bogen $\Gamma$, für welchen die in Nr. 3 zusammengefassten Resultate gelten. Lässt man nun den Punkt $B$ längs der Curve an $A$ unendlich nahe heranrücken, und bezeichnet die Schmiegungsebenen in $A$ und $B$ durch $\alpha$ und $\beta$, so schrumpft der eine der beiden von $\alpha$ und $\beta$ abgegrenzten Halbräume schliesslich in die Ebene $\alpha$ zusammen, und zwar derjenige, welcher den unendlich abnehmenden Bogen $AB$ enthält, also der Halbraum $(\alpha\beta)_2$ für den übrig bleibenden Bogen $\Gamma$, wenn man die selbstverständliche Voraussetzung berücksichtigt, dass die gegebene Curve nicht ganz der Ebene $\alpha$ angehört. Es verschwinden also schliesslich, wenn der Bogen $\Gamma$ in die gegebene Curve übergeht, die Gebiete (0) und (2) aus welchen die Hälfte $(\alpha\beta)_2$ besteht, und ergiebt sich somit,

*dass die abwickelbare Fläche einer geschlossenen, von Singularitäten freien Curve, von deren Schmiegungsebenen durch keinen Punkt mehr als drei gehen, den Raum in zwei Theile zerlegt: durch jeden Punkt des einen Theils gehen drei, durch jeden des andern eine einzige Schmiegungsebene der gegebenen Curve.*

## § 4.

## Die allgemeinsten abwickelbaren Flächen ohne Doppelcurven und Singularitäten.

1. Die Voraussetzung der erhaltenen Sätze, dass die betrachtete Curve durch keinen Punkt mehr als drei Schmiegungsebenen schickt, ist nun in sich reciprok: der in § 3 betrachtete Bogen $\Gamma$ wird von keiner Ebene in mehr als drei Punkten geschnitten.

Zum Beweis dieser Behauptung betrachte man zunächst eine beliebige von Singularitäten freie Curve und eine Gerade $g$, welche von keiner Tangente der Curve getroffen wird. Legt man dann durch $g$ und einen beliebigen Punkt $P$ der gegebenen Curve eine Ebene $\gamma$, so gehört dieser die Tangente des Punktes $P$ nicht an; die Curve geht also in $P$ durch $\gamma$ hindurch. Läuft nun ein Punkt $V$ längs der gegebenen Curve durch $P$ hindurch, so folgt, dass die Ebene $\varepsilon$, welche den Punkt $V$ mit $g$ verbindet, in dem Ebenenbüschel mit der Axe $g$ auf der einen oder andern Seite von $\gamma$ liegt, je nachdem $V$ auf der einen oder andern Seite von $P$ liegt; die variabele Ebene $\varepsilon$ ändert

also beim Durchgang durch die Lage $\gamma$ ihren Drehungssinn nicht. Da nun $P$ ein beliebiger Punkt der Curve ist, so ändert die Ebene $\varepsilon$ ihren Drehungssinn überhaupt nicht; erreicht sie also irgend eine ihrer Lagen nur ein einziges Mal, während der Punkt $V$ die ganze gegebene Curve durchläuft, so kann keine einzige Lage von $\varepsilon$ mehr als einmal durchlaufen werden.

2. Eine weitere vorauszuschickende Bemerkung bezieht sich auf die in § 3 betrachtete Curve $\Gamma$. Jede Tangente derselben gehört nach § 3 Nr. 3 dem Raume (3) an, soweit sie in der Raumhälfte $(\alpha\beta)_1$ liegt. Der Schnittpunkt dieser Tangente mit einer die Schmiegungsebenen der Curve $\Gamma$ durchlaufenden Ebene ändert sich stetig auch im Berührungspunkte der Tangente; da nun dieser Schnittpunkt keine Lage zweimal erreicht, so muss er sich längs der betrachteten Tangente beständig in einer und derselben Richtung bewegen. Hieraus ergiebt sich, indem man zur reciproken Figur übergeht, folgendes Resultat. Verbindet man irgend eine feste Tangente eines Bogens, welcher keiner Ebene mehr als dreimal begegnet, durch eine Ebene $\varepsilon$ mit einem variabeln Punkt, welcher den Bogen in einer bestimmten Richtung durchläuft, so dreht sich die Ebene $\varepsilon$ beständig in einem und demselben Sinne.

3. Jetzt sei ein beliebiger von Singularitäten freier Bogen gegeben, dessen abwickelbare Fläche keine Doppelpunkte besitzt, sodass keine zwei Tangenten sich schneiden. Eine beliebige Tangente $t$ berühre den Bogen im Punkte $P$. Dann kann man in der Umgebung dieses Punktes ein so kleines Stück $\Sigma$ von der gegebenen Curve abgrenzen, dass dasselbe von keiner Ebene mehr als dreimal geschnitten wird; denn andernfalls gäbe es in jeder Nähe des Punktes $P$ Systeme von vier Punkten der Curve, welche einer Ebene angehören; in $P$ wäre also die Schmiegungsebene stationär, während doch Singularitäten ausgeschlossen sind. Lässt man nun wieder einen Punkt $V$ die gegebene Curve entlang laufen, so dreht sich die durch $t$ und $V$ gelegte Ebene $\varepsilon$ nach Nr. 2 in einem bestimmten Sinne, während der Punkt $V$ das Stück $\Sigma$ durchläuft; nennt man die nach Ausscheidung von $\Sigma$ übrig bleibenden Stücke der gegebenen Curven $\Sigma'$ und $\Sigma''$, so dreht sich die Ebene $\varepsilon$ nach Nr. 1 auch in einem bestimmten Sinne, während man den Punkt $V$ die Linie $\Sigma'$ entlang laufen lässt, da keine zwei Tangenten der gesammten gegebenen Curven sich schneiden. Dieser letztere Drehungssinn um die Axe $t$ stimmt aber mit dem ersteren, welcher bei der Bewegung des Punktes $V$ auf $\Sigma$ erhalten wird, überein; denn man kann das Stück $\Sigma$ stets durch ein kleineres, den Punkt $P$ enthaltendes von denselben Eigenschaften ersetzen, sodass ein vorher zu $\Sigma$ gehöriges Stück der Curve jetzt zu $\Sigma'$ gehört; bei dieser neuen Abgrenzung gilt aber wie vorher, dass die Ebene $\varepsilon$ je in einem

bestimmten Sinne sich dreht, wenn $V$ das Stück $\Sigma$ und das Stück $\Sigma'$ durchläuft. — Ganz dieselben Erwägungen gelten für $\Sigma$ und $\Sigma''$, sodass sich schliesslich ergiebt, dass die Ebene $\varepsilon$, während der Punkt $V$ die gegebene Curve durchläuft, sich beständig in einem und demselben Sinne dreht.

Wenn nun die Schmiegungsebene $\sigma$ des Punktes $P$, welche offenbar auch unter den Ebenen $\varepsilon$ vorkommt, der Curve ausser in $P$ nirgends begegnet, so können alle von $\sigma$ hinreichend wenig verschiedenen Ebenen $\varepsilon$ der Curve nur in beliebiger Nähe von $P$, z. B. innerhalb des Stückes $\Sigma$ begegnen. Dieses wird nun von keiner Ebene mehr als dreimal getroffen, also folgt, dass die von $\sigma$ hinreichend wenig verschiedenen Ebenen $\varepsilon$ mit der Curve ausser dem doppeltzählendnn Punkte $P$ nur einen einzigen Punkt gemein haben. Die variabele Ebene $\varepsilon$ durchläuft somit die der Lage $\sigma$ benachbarten nur ein einziges Mal; sie ändert aber nach Nr. 2 ihren Drehungssinn überhaupt nicht, durchläuft also jede ihrer Lagen nur ein einziges Mal. Nun verbindet die Ebene $\varepsilon$ die Tangente $t$ mit dem die Curve durchlaufenden Punkte $V$; also ergiebt das erhaltene Resultat die weitere Folgerung, dass keine durch $t$ gehende Ebene der Curve, abgesehen vom Punkte $P$, mehr als einmal begegnet. Eine wesentliche beim Beweis dieses Satzes gebrauchte Voraussetzung war, dass die Schmiegungsebene des Punktes $P$ mit der Curve ausser $P$ keinen Punkt gemein haben sollte; macht man also allgemein die Voraussetzung, dass die Curve von keiner ihrer Schmiegungsebenen ausserhalb des Osculationspunktes getroffen wird, so folgt, dass keine durch eine Tangente gelegte Ebene mit der Curve im ganzen mehr als drei Punkte gemein hat.

Geht man jetzt wieder zur reciproken Figur über, so ergiebt sich folgender Satz:

*Besitzt die abwickelbare Fläche eines von Singularitäten freien Raumcurvenbogens* $\Gamma_0$ *keine Doppelpunkte; geht ferner durch keinen Punkt des Bogens ausser der in ihm osculirenden noch eine andere Schmiegungsebene, so gehen durch keinen Punkt der abwickelbaren Fläche mehr als drei Schmiegungsebenen des Bogens* $\Gamma_0$.

4. Die Endschmiegungsebenen dieses Bogens theilen nun wieder — vergl. § 3 Nr. 2 — den Raum in zwei Hälften, deren jede Theile der abwickelbaren Fläche enthält; es sei $Q$ ein beliebiger Punkt dieser Fläche, welcher derselben jener Raumhälften angehört wie ein beliebig gegebener Punkt $P$, welcher auf keiner Endschmiegungsebene liegt. Dann kann von den beiden Theilen, in welche die Gerade $PQ$ durch $P$ und $Q$ zerlegt wird, nur der eine den Endschmiegungsebenen begegnen; der andere gehört also ganz jener Raumhälfte an, in welcher die Punkte $P$ und $Q$ liegen. Man kann also stetig längs der Geraden $PQ$ von $P$ nach $Q$ gehen, ohne eine Endschmiegungsebene zu über-

schreiten. Dabei sei $Q_1$ der erste Punkt der abwickelbaren Fläche, welchen man von $P$ ausgehend erreicht; dann müssen nach § 2 Nr. 2 durch $Q_1$ entweder ebenso viele Schmiegungsebenen der Curve $\Gamma_0$ gehen, wie durch $P$, oder durch $P$ gehen zwei Schmiegungsebenen weniger als durch $Q_1$. Nun weiss man aber nach Nr. 3, dass durch $Q_1$ nicht mehr als drei Schmiegungsebenen gehen; also folgt, dass dasselbe für den beliebigen Punkt $P$ gilt; unsre Curve $\Gamma_0$ ist somit eine Curve $\Gamma$ im Sinne des § 3. Dies Resultat kann, wenn man die den Bogen $\Gamma_0$ charakterisirenden Voraussetzungen berücksichtigt, in folgender Weise formulirt werden.

*Gehen von den Schmiegungsebenen eines von Singularitäten freien Raumcurvenbogens durch irgend einen Punkt mehr als drei, so muss entweder die abwickelbare Fläche des Bogens Doppelpunkte besitzen, oder es giebt Schmiegungsebenen, welche dem Bogen noch ausserhalb ihres Osculationspunktes begegnen.*

Im ersten Falle schneiden sich zwei Tangenten der Curve; die durch beide gelegte Ebene hat also zwei Paare zusammenfallender Punkte mit der Curve gemein; im zweiten Falle begegnet eine Ebene der Curve in drei zusammenfallenden und ausserdem noch einem weiteren Punkte. Somit ergiebt sich, wenn man zugleich die reciproke Figur ins Auge fasst, folgendes Corollar.

*Hat ein von Singularitäten freier Bogen mit einer Ebene mehr als drei Punkte gemein, so giebt es auf ihm Systeme von mehr als drei Punkten, deren Schmiegungsebenen durch einen Punkt gehen, und umgekehrt.*

5. Man kann diese Resultate an einem paaren Zug einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species bestätigen, am bequemsten mit Benutzung der bekannten Parameterdarstellung dieser Curve durch elliptische Functionen. Bezeichnet man nämlich die vier Punkte mit stationärer Schmiegungsebene in der Reihenfolge, wie sie bei stetiger Bewegung längs der Curve erreicht werden, durch $A$, $B$, $C$, $D$, so sieht man leicht, dass z. B. keine zwei Tangenten des Bogens $AB$ sich schneiden, und jede Schmiegungsebene desselben der Curve zum zweiten Male auf dem Bogen $ADCB$ begegnet. Andrerseits sieht man ebenso leicht, dass der Bogen $AB$ überhaupt keiner Ebene mehr als dreimal begegnen kann; *jedes Stück eines paaren Zuges einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species, welches keine stationäre Schmiegungsebene besitzt, ist also eine Curve $\Gamma$ im Sinne des* § 3.

## § 5.

## Secanten und die Curve enthaltende Flächen.

1. Eine Anwendung finden die erhaltenen allgemeinen Resultate bei Untersuchung der Frage, in welchem der Gebiete $(\nu)$ — unter Beibehaltung der in § 3 eingeführten Bezeichnung — eine beliebige

Secante der Curve $\Gamma$ verläuft. Nach § 4 Nr. 4 weiss man nämlich, dass die Curve $\Gamma$ keiner Ebene mehr als dreimal begegnet; wenn nun eine Secante ausserhalb ihrer Schnittpunkte mit der Curve der abwickelbaren Fläche nochmals begegnete, so läge sie mit der sie schneidenden Tangente in einer die Curve viermal schneidenden Ebene; also kann die Secante ausser den Punkten der Curve, welche sie enthält, keine Punkte mit der abwickelbaren Fläche gemein haben. Daraus folgt mit Rücksicht auf § 2 Nr. 1, dass die Secante, soweit sie der Raumhälfte $(\alpha\beta)_2$ angehört, entweder ganz im Gebiet (2) oder ganz im Gebiet (0) verlaufen muss.

2. Man sieht aber leicht, dass von diesen beiden Fällen der erste auszuschliessen ist. Projicirt man nämlich von einem Punkte $P$ der die Endpunkte verbindenden Secante $AB$, welcher dem Raume $(\alpha\beta)_2$ angehört, die Curve $\Gamma$ auf eine Ebene, so kann diese so gewählt werden, dass die Bildcurve ganz ins Endliche fällt; man braucht, um dies zu erreichen, nur durch $P$ eine die Curve $\Gamma$ nicht schneidende Ebene $\eta$, z. B. eine Ebene, welche durch die Schnittlinie der Ebenen $\alpha$ und $\beta$ geht, zu legen, und die Bildebene mit $\eta$ parallel zu nehmen.

Dabei fallen die Projectionen der Endpunkte $A$ und $B$ zusammen; die Bildcurve muss also geschlossen sein. Hätte sie nun einen Wendepunkt, so müsste dessen Tangente ins Innere der Curve hineingehen, also, da die Curve im Endlichen bleibt, mit ihr noch einen weiteren Punkt gemein haben. Dann aber würde die durch $P$ und die Wendetangente gelegte Ebene mit $\Gamma$ vier Punkte gemein haben, was nach § 4 ausgeschlossen ist. *Der in die Raumhälfte* $(\alpha\beta)_2$ *hineinragende Theil der Secante* $AB$ *gehört also ganz dem Gebiet* (0) *an.*

Eine beliebige Secante $s$ kann nun stetig in die Lage $AB$ übergeführt werden, wobei nach Nr. 1 ihr in die Hälfte $(\alpha\beta)_2$ hineinragendes Stück niemals der abwickelbaren Fläche begegnet. Man kann also von irgend einem Punkte $Q$ der Secante $s$, welcher der Hälfte $(\alpha\beta)_2$ angehört, stetig, ohne diese Hälfte zu verlassen und die abwickelbare Fläche zu überschreiten, zu einem derselben Hälfte angehörigen Punkte der Secante $AB$ übergehen. Da nun letzterer, wie bemerkt, dem Gebiet (0) angehört, und bei dem beschriebenen Uebergang keine Grenze der Gebiete $(\nu)$ überschritten wird, so folgt, dass auch der Punkt $Q$ dem Gebiet (0) angehört; oder *dass das in den Raum* $(\alpha\beta)_2$ *hineinragende Stück einer beliebigen Secante der Curve* $\Gamma$ *ganz dem Gebiet* (0) *angehört.*

3. Jetzt berücksichtige man, dass nach § 2 Nr. 3, wenn ein Punkt eine Endschmiegungsebene ausserhalb der in ihr enthaltenen Tangente überschreitet, nur *eine* durch ihn gehende Schmiegungsebene gewonnen oder verloren werden kann; eine Secante $s$ schneidet aber nach Nr. 1 keine der Endtangenten des Bogens $\Gamma$; man kann also längs der Ge-

raden $s$ aus dem Gebiet (0) bei Ueberschreitung der Ebenen $\alpha$ und $\beta$ nicht in das Gebiet (3) sondern in das Gebiet (1) gelangen. Hieraus folgt, wenn man die Schnittpunkte der Secante $s$ mit $\alpha$ und $\beta$ durch $M$ und $N$, mit der Curve durch $S$ und $T$ bezeichnet, dass die Strecken $MS$ und $NT$, welche der Hälfte $(\alpha\beta)_1$ angehören, ganz im Gebiet (1) liegen, vorausgesetzt, dass die Punkte $M$, $S$, $T$, $N$ in dieser Reihenfolge längs der Secante $s$ erreicht werden. — Legt man nun durch $s$ eine Ebene $\varepsilon$, welche die Tangente des Punktes $S$ nicht enthält, so schneidet dieselbe die abwickelbare Fläche in einer Curve $\mathfrak{S}$, welche in $S$ eine Spitze hat, und die Rückkehrtangente ist der Schnitt der in $S$ osculirenden Schmiegungsebene mit $\varepsilon$. Diese Linie ist von $s$ verschieden, weil sonst die erwähnte Schmiegungsebene mit $\Gamma$ vier Punkte gemein hätte, was nach § 7 unmöglich ist. Eine Curve, welche in $S$ eine Spitze hat, liegt aber in der Nachbarschaft dieses Punktes ganz auf einer Seite einer beliebigen von der Rückkehrtangente verschiedenen Geraden; man kann also in $\varepsilon$, indem man in der Nachbarschaft des Punktes $S$ bleibt, stetig und ohne die Curve $\mathfrak{S}$ zu überschreiten, von der Strecke $MS$ auf die Strecke $ST$ übergehen. Daraus folgt nach § 2 Nr. 1, dass auch die Strecke $ST$ dem Gebiet (1) angehört; *dass also das der Raumhälfte* $(\alpha\beta)_1$ *angehörige Stück einer beliebigen Secante der Curve* $\Gamma$ *ganz in das Gebiet* (1) *fällt, abgesehen von ihren Schnittpunkten mit der Curve.*

4. Die in $\varepsilon$ betrachtete Figur führt noch zu einer weiteren Folgerung. Zieht man nämlich durch $S$ eine beliebige, der Ebene $\varepsilon$ angehörige Gerade $SL$, welche von der in $S$ berührenden Rückkehrtangente verschieden ist, so liegt in der Nähe des Punktes $S$ die Curve $\mathfrak{S}$ auch auf einer Seite der Geraden $SL$, liegt hier also ganz innerhalb der einen der beiden Hälften, in welche die Ebene $\varepsilon$ durch die Geraden $s$ und $SL$ zerlegt wird. In der andern Hälfte kann man also stetig von $s$ zu $SL$ übergehen, ohne die abwickelbare Fläche zu überschreiten oder die Raumhälfte $(\alpha\beta)_1$ zu verlassen; hieraus aber folgt nach § 2 Nr. 1, dass auch die Gerade $SL$ in der Umgebung des Punktes $S$ dem Gebiet (1) angehört. Da nun unter $\varepsilon$ eine beliebige durch $s$ gehende Ebene verstanden wird, welche die in $S$ berührende Tangente $t$ nicht enthält; da ferner bei einer beliebigen der Schmiegungsebene des Punktes $S$ nicht angehörigen Geraden $SL$ die Secante $s$ so gewählt werden kann, dass die drei Geraden $t$, $s$, $SL$ nicht in einer Ebene liegen, so folgt, *dass eine beliebige Gerade, welche mit* $\Gamma$ *einen Punkt gemein hat, aber der Schmiegungsebene dieses Punktes nicht angehört, in der Umgebung desselben dem Gebiet* (1) *angehört.*

5. Jetzt sei eine beliebige die Curve $\Gamma$ enthaltende Fläche gegeben, deren Tangentialebene im Punkte $S$ von der Schmiegungsebene dieses Punktes verschieden ist. Dann liegen nach Nr. 4 alle von $S$ aus-

gehenden und der Fläche angehörigen Linienelemente im Gebiet (1) mit Ausnahme jener beiden, welche mit den von $S$ ausgehenden Bogenelementen der Curve zusammenfallen. Also liegt die Fläche in der Umgebung des Punktes $S$ im Gebiet (1), mit Ausnahme der der Curve selbst angehörigen Punkte. — Der Fall, dass die Tangentialebene der Fläche mit der Schmiegungsebene der Curve in $S$ identisch ist, kann nur eintreten, wenn in der Nähe von $S$ Punkte der Fläche auf beiden Seiten der Tangentialebene liegen, da die Schmiegungsebene im Punkte $S$ von der der Fläche angehörigen Curve durchdrungen wird. Zusammenfassend kann man also sagen:

*Eine die Curve $\Gamma$ enthaltende Fläche liegt in der Nähe eines beliebigen Curvenpunktes $S$, abgesehen von den Punkten der Curve, ganz im Gebiet* (1), *wenn die Tangentialebene der Fläche und die Schmiegungsebene der Curve im Punkte $S$ nicht identisch sind. Beide Ebenen können nur zusammenfallen, wenn die Fläche in der Umgebung des Punktes $S$ von sattelförmiger Gestalt ist.*

## § 6.

## Rückkehrpunkte und stationäre Schmiegungsebenen.

1. Eine beliebige Tangente $t$ des Bogens $\Gamma$ werde in $C$ und $D$ von den Endschmiegungsebenen $\alpha$ und $\beta$ geschnitten; lässt man dann die Ebene $\varepsilon$ alle Schmiegungsebenen der Curve in der Richtung von $\alpha$ und $\beta$ hindurchlaufen, so weiss man nach § 4 Nr. 2, dass der Schnittpunkt von $t$ und $\varepsilon$ auf der Tangente $t$ in einer bestimmten niemals geänderten Richtung von $C$ nach $D$ läuft; und zwar ist diese Richtung diejenige, welche von $C$ durch den Halbraum $(\alpha\beta)_1$ nach $D$ führt; denn nur in diesem Halbraum liegt das Gebiet (3), dem jene Schnittpunkte angehören. Der hiermit auf $t$ definirte Richtungssinn ist, wie jetzt gezeigt werden soll, identisch mit demjenigen, in welchem ein längs der Curve von $A$ nach $B$ laufender Punkt $W$ das der Curve angehörige Element der Tangente durchläuft.

Um diese einleuchtende Behauptung zu beweisen, lege man zunächst durch die Schnittlinie der Endschmiegungsebenen $\alpha$ und $\beta$ eine im Halbraum $(\alpha\beta)_2$ verlaufende, also der Curve $\Gamma$ nicht begegnende Ebene, und verlege dieselbe durch eine collineare Transformation des Raumes ins Unendliche; dann sind die Ebenen $\alpha$ und $\beta$ parallel, und die Curve liegt ganz in dem von ihnen umschlossenen Halbraum $(\alpha\beta)_1$. Stellt man sich nun diese Ebenen horizontal vor, und nimmt an, $\alpha$ sei die untere, $\beta$ die obere, so kann der Punkt $W$, welcher sich längs der Curve von $\alpha$ nach $\beta$ hin bewegt, nicht beständig in abwärts gerichteter Bewegung sein; wäre aber diese Bewegung theils aufwärts, theils abwärts gerichtet, so müssten auch Uebergangsstellen von horizontaler

Richtung vorkommen. Die Tangente der Curve in diesen Stellen hätte mit der Durchschnittslinie der horizontalen Ebenen $\alpha$ und $\beta$ einen Punkt gemein, durch welchen demnach im ganzen vier Schmiegungsebenen gingen; das widerspräche aber der betreffs des Bogens $\Gamma$ gemachten Voraussetzung. Somit kann die Bewegung des Punktes $W$ nur beständig aufwärts gerichtet sein, und auf jeder Tangente $t$ ist der Richtungssinn, in welchem das der Curve angehörige Element derselben vom Punkte $W$ durchlaufen wird, der aufwärts gerichtete. Das ist aber offenbar auch der Richtungssinn eines von $C$ nach $D$, also von $\alpha$ nach $\beta$ längs der Tangente durch den Halbraum $(\alpha\beta)_1$ laufenden Punktes; womit die behauptete Identität der beiden auf $t$ definirten Richtungssinne bewiesen ist.

2. Geht man zur reciproken Figur über, so ist schon in § 2 Nr. 3 bemerkt, dass dem Richtungssinn, in welchem der Punkt $W$ das der Curve angehörige Tangentenelement durchläuft, der Drehungssinn entspricht, in welchem die Schmiegungsebene sich um die entsprechende Tangente dreht, wenn man die Curve in entsprechender Richtung durchlaufen denkt. Ferner tritt in der reciproken Figur an Stelle des Schnittpunktes von Tangente und Schmiegungsebene die Verbindungsebene von Tangente und Curvenpunkt. Bedenkt man endlich noch, dass in der Umgebung jedes nicht singulären Punktes einer beliebigen Curve ein Bogen abgegrenzt werden kann, welcher keiner Ebene mehr als dreimal begegnet, so ergiebt sich aus Nr. 1 folgender Satz.

*Der Drehungssinn der Schmiegungsebene längs einer in bestimmter Richtung durchlaufenen Curve um die Tangente eines beliebigen nicht singulären Punktes $P$ stimmt überein mit dem Drehungssinn einer Ebene, welche die Tangente und einen die Curve in der festgesetzten Richtung durchlaufenden Punkt verbindet, solange man diesen auf eine hinreichend eng begrenzte Umgebung des Punktes $P$ beschränkt.*

Projicirt man also die Curve von einem Punkte der Tangente aus, so dass die Bildcurve eine Spitze im Bildpunkt des Punktes $P$ besitzt, und verbindet man die Tangente mit einem längs der Bildcurve laufenden Punkte durch eine Ebene, so ist der Drehungssinn dieser Ebene zugleich der in § 2 Nr. 3 definirte Drehungssinn der Schmiegungsebene um die Tangente herum.

3. Hat nun eine beliebige Curve im Punkte $S$ eine stationäre Schmiegungsebene, sodass in jeder Nähe desselben Systeme von vier Curvenpunkten liegen, welche einer Ebene angehören, so muss das Bild der Curve, wenn man sie von einem Punkte der in $S$ berührenden Tangente $t$ projicirt, eine Schnabelspitze $S'$ besitzen, welche das Bild des Punktes $S$ ist. Lässt man also einen Punkt $W'$ längs der Bildcurve in einer bestimmten Richtung durch die Lage $S'$ hindurchgehen, so ändert bei diesem Durchgang die Gerade $W'S'$ den Sinn

ihrer Drehung um $S'$; verbindet man also den längs der Raumcurve laufenden Punkt $W$, dessen Bild $W'$ ist, mit der Tangente $t$ durch eine Ebene $\varepsilon$, so ändert sich der Drehungssinn dieser Ebene in dem Augenblick, wo der Punkt $W$ die Lage $S$ passirt. —

Liegen nun die Punkte $P$ und $Q$ zu verschiedenen Seiten des Punktes $S$ auf der Curve, so weiss man nach Nr. 2, dass der Drehungssinn der Schmiegungsebene am Ende $S$ des Bogens $PS$ mit dem Drehungssinn der Ebene $\varepsilon$ übereinstimmt; dagegen ist der Drehungssinn der Schmiegungsebene längs des Bogens $SQ$, wenn man von $Q$ in den Punkt $S$ hineingeht, dem Drehungssinn der Ebene $\varepsilon$, in welcher der Punkt $W$ von $S$ nach $Q$ läuft, entgegengesetzt; nähert man sich also von beiden Seiten dem Punkte $S$, so erhält man zuletzt denselben Drehungssinn der Schmiegungsebene. Geht man zur reciproken Figur über, so bedeutet dieses Resultat, dass der stationären Schmiegungsebene ein Rückkehrpunkt reciprok entspricht, wie bekannt ist.

Dreht sich jetzt in der reciproken Figur eine Ebene um eine den Rückkehrpunkt nicht enthaltende Gerade, und passirt den Rückkehrpunkt, so gewinnt oder verliert sie zwei Schnittpunkte mit der Curve, je nachdem ihr Schnittpunkt mit der Rückkehrtangente in derselben Richtung, nach welcher man längs der beiden in dem Rückkehrpunkte zusammenstossenden Curvenelemente in denselben hineingeht, oder in der entgegengesetzten Richtung den Rückkehrpunkt überschreitet. Hieraus ergiebt sich, wenn man wieder zur ursprünglichen Figur zurückgeht, das folgende Resultat.

*Ueberschreitet der Punkt $V$ eine stationäre Schmiegungsebene einer Raumcurve, und heisst der Osculationspunkt der genannten Ebene $S$, die Tangente dieses Punktes $t$, so werden zwei durch $V$ gehende Schmiegungsebenen der Curve verloren oder gewonnen, je nachdem die durch $t$ und $V$ gelegte Ebene um $t$ herum sich in demselben oder entgegengesetztem Sinne dreht, wie die Schmiegungsebene, wenn man von einer beliebigen Seite her längs der Curve in den Punkt $S$ hineingeht. Letzterer Drehungssinn ist auch derjenige einer durch $t$ und den Curvenpunkt $W$ gehenden Ebene, wenn man $W$ von einer beliebigen Seite her in die Lage $S$ hineingehen lässt.*

## § 7.

## Sphärische Curven.

1. Von diesem Excurs in die Theorie der Singularitäten kehren wir jetzt zur Betrachtung der früher untersuchten Curve $\Gamma$ zurück. Für den Fall, dass dieselbe auf einer Kugelfläche liegt, ergiebt sich aus § 5 Nr. 5 sofort, dass die Schmiegungsebene keines Punktes mit der Kugel in Berührung sein kann. Wird also die Schmiegungsebene $\sigma$ des Punktes $S$ von der Kugel in dem Kreise $\mathfrak{K}$, und von der abwickel-

baren Fläche abgesehen von der Tangente des Punktes $S$ in der Curve $\mathfrak{L}$ geschnitten, so liegt das dem Punkte $S$ benachbarte Stück des Kreises $\mathfrak{K}$ ganz im Gebiet (1) — natürlich mit Ausnahme des Punktes $S$ selbst, welcher dem Gebiet (3) nach den in § 2 Nr. 1 gegebenen Definitionen angehört. Da ferner offenbar durch jeden Punkt der Ebene $\sigma$, im Ganzen $\nu + 1$ Schmiegungsebenen der Curve $\Gamma$ gehen, wenn durch ihn $\nu$ Tangenten der Curve $\mathfrak{L}$ gezogen werden können, so kann auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ in der Nachbarschaft des Punktes $S$ ein Stück $(S)$ abgegrenzt werden, welches ausser $S$ selbst keinen Punkt mit irgend einer Tangente der Curve $\mathfrak{L}$ gemein hat.

Nun kann man, indem die Ebene $\sigma$ als Strahlenfeld betrachtet wird, in der Nachbarschaft der den Curven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ gemeinsamen Tangente $t$ ein so kleines Gebiet von Geraden $(t)$ abgrenzen, dass alle diese Geraden, wenn sie überhaupt dem Kreise $\mathfrak{K}$ begegnen, ihn nur innerhalb einer beliebig abgemessenen Umgebung $(U)$ des Punktes $S$ treffen; hiemit ist nur die stetige Aenderung der Schnittpunkte einer Geraden mit $\mathfrak{K}$, welche bei stetiger Bewegung die Lage $t$ passirt, genau formulirt. Man kann z. B. für das Gebiet $(U)$ das oben eingeführte Gebiet $(S)$ nehmen. Dann können diejenigen Geraden des zugehörigen Gebiets $(t)$, welche Tangenten der Curve $\mathfrak{L}$ sind, mit Ausnahme von $t$ dem Kreis $\mathfrak{K}$ gar nicht begegnen, weil das Stück $(S)$ von keiner Tangente der Curve $\mathfrak{L}$ ausser $t$ getroffen wird. Man kann also längs der Curve $\mathfrak{L}$ zu beiden Seiten des Punktes $S$ ein Gebiet $(S)_1$ abgrenzen, von dessen Tangenten ausser $t$ keine mit $\mathfrak{K}$ einen Punkt gemein hat.

Da nun jede Tangente der Curve $\mathfrak{L}$ die Schnittlinie der Ebene $\sigma$ mit einer andern Schmiegungsebene der Curve $\Gamma$ ist, so kann man auf letzterer nach dem soeben erhaltenen Resultat zu beiden Seiten des Punktes $S$ ein Gebiet abgrenzen, von dessen Schmiegungsebenen keine ausser $\sigma$ mit $\mathfrak{K}$ einen Punkt gemein hat. Bedenkt man noch, dass ein hinreichend kleiner Theil einer beliebigen Curve in der Umgebung eines nichtsingulären Punktes keiner Ebene mehr als dreimal begegnet, also nach § 4 Nr. 4 als Curve $\Gamma$ betrachtet werden kann, so ergiebt sich folgender Satz.

*In der Umgebung eines nichtsingulären Punktes $S$ einer sphärischen Curve kann auf dieser ein derartiger Bogen $\Gamma$ abgegrenzt werden, dass der Kreis $\mathfrak{K}$, welchen die Schmiegungsebene des Punktes $S$ auf der die Curve enthaltenden Kugel ausschneidet, von keiner Schmiegungsebene eines von $S$ verschiedenen Punktes des Bogens $\Gamma$ geschnitten wird.*

2. Speciell begegnen also die Endschmiegungsebenen des Bogens $\Gamma$ dem Kreise $\mathfrak{K}$ nicht; da nun dieser in der Umgebung des Punktes $S$ dem Gebiet (1) angehört, so kann die Anzahl der durch einen seiner Punkte gehenden Schmiegungsebenen des Bogens $\Gamma$ nur von Eins verschieden

werden, wenn die abwickelbare Fläche des Bogens mit $\mathfrak{K}$ einen von $S$ verschiedenen Punkt $T$ gemein hat. Diese Fläche besteht aber ganz aus Tangenten der Kugel; wenn sie also einen Punkt $T$ mit der Kugel gemein hat, so muss derselbe ein Punkt der Curve $\Gamma$ sein. Dann aber hätte die Ebene des Kreises $\mathfrak{K}$ mit $\Gamma$ vier Punkte, nämlich $T$ und den dreifach zählenden Punkt $S$ gemein, was bei einem hinreichend klein gewählten Bogen $\Gamma$ unmöglich ist. Somit hat der Kreis $\mathfrak{K}$ mit Ausnahme von $S$ keinen Punkt mit der abwickelbaren Fläche des Bogens $\Gamma$ gemein; da er auch, wie bemerkt, den Endschmiegungsebenen desselben nicht begegnet, so folgt nach § 2, dass der ganze Kreis $\mathfrak{K}$ dem Gebiet (1) angehört. Daraus ergiebt sich weiter nach § 2, dass auch ein hinreichend kleines Stück der Kugel, welches um einen von $S$ verschiedenen Punkt des Kreises $\mathfrak{K}$ abgegrenzt wird, ebenfalls ganz dem Gebiet (1) angehört. Dass endlich dasselbe von der Umgebung des Punktes $S$ gilt mit Ausschluss der der Curve angehörigen Punkte, folgt unmittelbar aus § 5 Nr. 5. Durch irgend einen Punkt des Bogens $\Gamma$ geht aber ausser der in ihm osculirenden keine Schmiegungsebene eines andern Punktes; man kann also sagen, dass die ganze Umgebung des Kreises $\mathfrak{K}$ auf der Kugel von den Schnittkreisen der letzteren mit den Schmiegungsebenen des Bogens $\Gamma$ genau einfach bedeckt wird.

3. Um die Art dieser Bedeckung noch genauer zu erkennen, denke man sich die gegebene sphärische Curve in einer bestimmten Richtung durchlaufen und bezeichne die vor $S$ erreichten Punkte durch $P$, die nachher erreichten durch $Q$; die in $P$ und $Q$ osculirenden Schmiegungsebenen mögen auf der Kugel die Kreise $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ausschneiden.

Beschränkt man sich dann wieder auf die Betrachtung des Bogens $\Gamma$, so weiss man nach Nr. 1, dass keiner der Kreise $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{K}$ einen Punkt gemein hat.

Ein beliebiger Kugelkreis theilt nun die Kugelfläche in zwei Hälften, und ein zweiter, welcher mit dem ersten keinen Punkt gemein hat, muss ganz einer einzigen jener Hälften angehören; oder, wie wir sagen wollen, der zweite Kreis muss ganz auf der einen Seite des ersten gelegen sein. Wenn also ein einziger Punkt des zweiten Kreises auf einer bestimmten Seite des ersten liegt, so liegt der ganze zweite Kreis auf derselben Seite. — Wendet man diese Bemerkung auf den Kreis $\mathfrak{K}$ an, und bedenkt, dass die gegebene Curve im Punkte $S$, welcher nicht singulär ist, ihre Schmiegungsebene durchdringt, dass also die Punkte $P$ auf der einen, die Punkte $Q$ auf der andern Seite des Kreises $\mathfrak{K}$ liegen, so folgt, dass die Kreise $\mathfrak{P}$ ganz auf der einen, die Kreise $\mathfrak{Q}$ ganz auf der andern Seite des Kreises $\mathfrak{K}$ verlaufen.

Berücksichtigt man endlich, dass nach Nr. 2 die Kreise $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bei hinreichender Beschränkung des Gebiets der Punkte $P$ und $Q$ die

Umgebung des Kreises $\mathfrak{K}$ einfach bedecken, so ergiebt sich das folgende Resultat.

*Construirt man in einem nicht singulären Punkte S einer sphärischen Curve den Schnittkreis $\mathfrak{K}$ der Schmiegungsebene $\sigma$ mit der die Curve enthaltenden Kugel, so wird die Kugelfläche von den der Ebene $\sigma$ benachbarten Schmiegungsebenen der Curve in Kreisen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ geschnitten, welche mit $\mathfrak{K}$ keinen Punkt gemein haben und beide Seiten des Kreises $\mathfrak{K}$ genau einfach bedecken; und zwar liegen zwei der Kreise $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ auf derselben oder verschiedenen Seiten des Kreises $\mathfrak{K}$, je nachdem die Osculationspunkte ihrer Ebenen längs der Curve auf derselben oder verschiedenen Seiten des Punktes S liegen.*

## § 8.

## Die gegenseitige Lage benachbarter Krümmungskreise einer beliebigen ebenen Curve.

1. Die Sätze des vorigen Paragraphen bilden den Uebergang zu den in der Einleitung angedeuteten Untersuchungen über die Bedeckung der Ebene durch die Krümmungskreise einer ebenen Curve. Projicirt man nämlich die Ebene nebst einer in ihr beliebig gegebenen Curve $\mathfrak{L}$ stereographisch auf eine Kugelfläche, d. h. von einem Punkte der Kugel aus, dessen Tangentialebene der gegebenen Ebene parallel ist, so wird bekanntlich jeder Kreis der Ebene in einen Kugelkreis projicirt. Speciell werden die Krümmungskreise der Curve $\mathfrak{L}$ in Kugelkreise projicirt, welche mit dem sphärischen Bilde $\Lambda$ der Curve $\mathfrak{L}$ drei aufeinanderfolgende Punkte gemein haben; die Ebenen dieser Kugelkreise sind also die Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$. Jeder nicht singuläre Punkt der Curve $\mathfrak{L}$, dessen Krümmungskreis nicht „stationär" ist, d. h. vier aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemein hat, wird demnach in einen nicht singulären Punkt der Raumcurve $\Lambda$ projicirt. Berücksichtigt man noch, dass die im Endlichen liegenden Punkte der Ebene auf die Kugelfläche mit Ausschluss des Projectionscentrums eindeutig bezogen sind; dass ferner zwei Punkte der Kugelfläche auf derselben oder verschiedenen Seiten eines Kugelkreises liegen, je nachdem die entsprechenden Punkte in der Ebene auf derselben oder verschiedenen Seiten des dem Kugelkreise entsprechenden ebenen Kreises liegen, so ergiebt sich aus § 7 Nr. 3 sofort das folgende Resultat.

*Hat eine ebene Curve in einem nicht singulären Punkt P einen nicht stationären Krümmungskreis $\mathfrak{K}$, so wird die Ebene auf der innern und äusseren Seite dieses Kreises von den ihm benachbarten Krümmungskreisen der gegebenen Curve genau einfach bedeckt. Dabei liegt der Kreis $\mathfrak{K}$ ganz im Innern oder ganz ausserhalb eines benachbarten Krümmungs-*

*kreises, je nachdem der Osculationspunkt des letzteren längs der gegebenen Curve auf der einen oder andern Seite des Punktes $P$ liegt.*

2. Dieser Satz kann seiner Natur gemäss auch rein planimetrisch begründet werden.

Auf einem beliebigen ebenen Bogen $AB$, dessen Krümmung von $A$ nach $B$ hin stetig abnimmt, seien die Punkte $P$, $P'$ so angenommen, dass man von $A$ ausgehend längs des Bogens zuerst nach $P$ und dann nach $P'$ gelangt, dass also der Krümmungsradius in $P'$ grösser als in $P$ ist. Dann liegen die Mittelpunkte $M$ und $M'$ der in $P$ und $P'$ osculirenden Krümmungskreise auf der Evolute des Bogens $AB$, und nach einem bekannten Satze ist die Differenz der Krümmungsradien $MP$ und $M'P'$ dem Evolutenbogen $MM'$ gleich.

Nun ist die gerade Strecke $MM'$ kürzer als jeder Bogen $MM'$, also auch kürzer als die Differenz der Radien $MP$ und $M'P'$, von denen letzterer der grössere ist. Wenn aber der Centralabstand zweier Kreise kleiner ist als die Differenz der Radien, so liegt stets der eine Kreis ganz im Innern des andern; in unserm Falle also liegt der in $P$ osculirende Krümmungskreis ganz im Innern des in $P'$ osculirenden. Somit ergiebt sich Folgendes:

*Wächst längs eines stetig gekrümmten ebenen Bogens die Krümmung von einem Ende zum andern beständig, so schneiden sich keine zwei Krümmungskreise des Bogens, vielmehr liegt jeder in der Richtung der zunehmenden Krümmung folgende Krümmungskreis ganz im Innern jedes vorhergehenden.*

Doch wird von diesem Resultat fernerhin kein Gebrauch gemacht werden, um nicht die folgenden Entwickelungen von der soeben benutzten Theorie der Evolute abhängig zu machen; vielmehr soll der in Nr. 1 erhaltene Satz den Ausgangspunkt bilden.

## § 9.

### Fortsetzung; stationäre Krümmungskreise.

1. Es sei wiederum ein beliebiger endlicher, von Wendepunkten und Spitzen freier Bogen $AB$ von stetig variirendem Krümmungskreis gegeben, ein beliebiger Punkt desselben, der von den Endpunkten verschieden ist und einen nicht stationären Krümmungskreis $\mathfrak{K}$ besitzt, sei $S$. Dann weiss man nach § 8 Nr. 1, dass alle Krümmungskreise $\mathfrak{K}^{(0)}$, deren Osculationspunkte hinreichend nahe bei $S$ und auf der einen Seite dieses Punktes z. B. auf dem Bogen $SB$ gelegen sind, ganz in das Innere des Kreises $\mathfrak{K}$ fallen, und es kann leicht gezeigt werden, dass jeder in der Richtung $SB$ nachfolgende Kreis $\mathfrak{K}^{(0)}$ ganz im Innern jedes vorhergehenden verläuft. Zunächst nämlich schneiden sich keine zwei Kreise $\mathfrak{K}^{(0)}$, weil sie nach § 8 Nr. 1 den inneren Rand

des Kreises $\mathfrak{K}$ genau einfach bedecken. Nun möge etwa auf dem Bogen $AB$ der Punkt $B_2$ dem Punkte $B_1$ in der Richtung von $S$ nach $B$ hin folgen, und die Punkte $B_1$ und $B_2$ so nahe bei $S$ liegen, dass ihre Krümmungskreise $\mathfrak{K}_1^{(0)}$ und $\mathfrak{K}_2^{(0)}$ noch zu den Kreisen $\mathfrak{K}^{(0)}$ gehören; lässt man dann einen Punkt $V$ stetig längs der Curve von $B_1$ nach $S$ laufen, so geht sein Krümmungskreis stetig aus der Lage $\mathfrak{K}_1^{(0)}$ in die Lage $\mathfrak{K}$ über. Läge nun der Kreis $\mathfrak{K}_2^{(0)}$ ausserhalb des Kreises $\mathfrak{K}_1^{(0)}$, so müsste, da ersterer von $\mathfrak{K}$ umfasst wird, der Krümmungskreis des Punktes $V$ einmal von $\mathfrak{K}_2^{(0)}$ geschnitten werden, was nach der Definition der Kreise $\mathfrak{K}^{(0)}$ nicht der Fall ist. Somit liegt jeder von $S$ nach $B$ hin folgende Kreis $\mathfrak{K}^{(0)}$ innerhalb jedes vorhergehenden.

2. Jetzt dehne man das System der Kreise $\mathfrak{K}^{(0)}$ so weit als möglich aus, sodass auch das Gebiet ihrer Osculationspunkte von $S$ nach $B$ hin möglichst ausgedehnt wird. Diese Punkte kommen dann, in Folge der vorausgesetzten Stetigkeit der Curve einem bestimmten Grenzpunkte $G$ beliebig nahe ohne ihn zu überschreiten; ob auch der Krümmungskreis $\mathfrak{G}$ dieses Grenzpunktes noch zu den Kreisen $\mathfrak{K}^{(0)}$ zu rechnen ist, bleibt dahingestellt. Jedenfalls aber giebt es Kreise $\mathfrak{K}^{(0)}$, welche von $\mathfrak{G}$ beliebig wenig verschieden sind; da nun erstere alle vom Kreise $\mathfrak{K}$ umschlossen werden, so kann dieser den Kreis $\mathfrak{G}$ nur entweder ebenfalls umfassen oder von ihm innerlich berührt werden. Träte letzterer Fall ein, so läge der Berührungspunkt $T$ ausserhalb derjenigen Kreise, welche ganz innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ verlaufen, also ausserhalb aller von $\mathfrak{K}$ verschiedenen Kreise $\mathfrak{K}^{(0)}$; da nun von diesen jeder von $S$ nach $B$ hin folgende nach Nr. 1 innerhalb des vorhergehenden liegt, z. B. $\mathfrak{K}_2^{(0)}$ innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}_1^{(0)}$ und alle Krümmungskreise des Bogens $B_2G$ mit Ausnahme von $\mathfrak{G}$ innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}_2^{(0)}$ liegen, der Punkt $T$ aber ausserhalb des Kreises $\mathfrak{K}_1^{(0)}$; so ist es unmöglich mit den Krümmungskreisen des Bogens $B_2G$ dem Punkte $T$ beliebig nahe zu kommen, was doch in der That geschieht. Somit liegt der Kreis $\mathfrak{G}$ ganz im Innern des Kreises $\mathfrak{K}$, und da dieselbe Schlussweise, wie bei $\mathfrak{K}$, auf jeden der Kreise $\mathfrak{K}^{(0)}$ angewandt werden kann, so folgt, dass der Kreis $\mathfrak{G}$ ganz im Innern jedes Kreises $\mathfrak{K}^{(0)}$ verläuft.

Dabei wird die ganze Ringfläche zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}$ von den Kreisen $\mathfrak{K}^{(0)}$ einfach bedeckt; denn ist $P$ ein beliebiger Punkt dieser Fläche, so giebt es sowohl Kreise $\mathfrak{K}^{(0)}$, welche von $\mathfrak{K}$, als auch solche, welche von $\mathfrak{G}$ beliebig wenig verschieden sind; erstere umfassen den Punkt $P$, letztere schliessen ihn aus. Da man nun von den Kreisen der einen Art zu denen der andern durch stetig variirte Kreise $\mathfrak{K}^{(0)}$ übergehen kann, so folgt, dass zwischen den Kreisen beider Arten mindestens ein durch $P$ gehender Uebergangskreis vorhanden sein muss. Da nun keine zwei Kreise $\mathfrak{K}^{(0)}$ sich schneiden, so folgt, dass

von ihnen die ganze Fläche zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}$ genau einfach überdeckt wird.

3. Wenn nun weder $\mathfrak{G}$ ein stationärer Krümmungskreis, noch $G$ mit $B$ identisch ist, so kann der in § 8 Nr. 1 erhaltene Satz auf $G$ angewandt werden, und Krümmungskreise, deren Osculationspunkte hinreichend nahe bei $G$ auf dem Bogen $GB$ liegen, bedecken den Innenrand des Kreises $\mathfrak{G}$ genau einfach, bilden also mit $\mathfrak{G}$ zusammen ein System von genau derselben Beschaffenheit wie die Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^{(0)}$, sodass aus demselben Grunde wie bei diesen jeder von $G$ nach $B$ hin nachfolgende jener Kreise im Innern jedes vorhergehenden liegt. Man könnte also alle diese Kreise dem System $\mathfrak{K}^{(0)}$ beifügen, und dieses damit über den Kreis $\mathfrak{G}$ hinaus erweitern, was der betreffs des Grenzpunktes $G$ gemachten Voraussetzung widerspricht. Wenn also nicht $\mathfrak{G}$ ein stationärer Krümmungskreis ist, so muss der Punkt $G$ mit $B$ zusammenfallen, sodass man folgenden Satz erhält.

*Längs jedes endlichen stetigen Bogens, dessen Krümmungskreise überall endlich sind, stetig variiren und nie mehr als drei zusammenfallende Punkte des Bogens enthalten, liegt in einer bestimmten Richtung jeder folgende Krümmungskreis ganz im Innern jedes vorhergehenden, sodass keine zwei Krümmungskreise sich schneiden, und von ihnen die ganze Ringfläche zwischen den Krümmungskreisen der Endpunkte genau einfach überdeckt wird.*

Beiläufig bemerkt folgt hieraus sofort, dass jeder stetige Bogen der einen Doppelpunkt besitzt — und das Auftreten eines solchen ist durch die Voraussetzungen des obigen Satzes zunächst nicht ausgeschlossen — nothwendig mindestens einen stationären Krümmungskreis besitzen muss.

4. Nimmt man jetzt an, der Krümmungskreis $\mathfrak{G}$ sei stationär, so sei $GS'$ ein beliebiger Theil des Bogens $GB$, auf welchem keine stationären Krümmungskreise vorkommen; construirt man dann von $S'$ nach $G$ hin in derselben Weise den Grenzpunkt $G'$, wie der Punkt $G$ von $S$ aus erhalten wurde, so müssen die Punkte $G$ und $G'$ identisch sein, da sonst der Krümmungskreis in $G'$ nicht stationär wäre, wogegen in Nr. 3 gezeigt ist, dass der Grenzpunkt entweder Endpunkt oder Berührungspunkt eines stationären Krümmungskreises sein muss. Somit ergiebt sich aus Nr. 2, dass die ganze Ringfläche zwischen $\mathfrak{G}$ und dem in $S'$ osculirenden Krümmungskreise von den Krümmungskreisen des Bogens $S'G$ genau einfach überdeckt wird. Nur ist noch zu entscheiden, ob diese Kreise auf derselben oder der entgegengesetzten Seite des Kreises $\mathfrak{G}$ liegen wie die Kreise $\mathfrak{K}^{(0)}$. Letztere liegen auf der Aussenseite; speciell gilt dies auch von den Osculationspunkten, den Punkten des Bogens $SG$. Ein stationärer Krümmungskreis kann aber in seinem Osculationspunkte von der Curve nicht durchsetzt

werden; denn er bildet die Grenzlage eines Kreises, welcher mit der Curve vier und nicht mehr in $G$ zusammenrückende Punkte gemein hat, welcher also von der Curve, abgesehen von zwei unendlich kleinen in $G$ zusammenschrumpfenden Bögen in der Umgebung dieses Punktes nicht durchsetzt wird. In unserm Falle also liegt der Bogen $S'G$ ebensowohl ausserhalb des Kreises $\mathfrak{G}$ wie der Bogen $SG$; der äussere Rand des Kreises $\mathfrak{G}$ wird also von den Krümmungskreisen des Bogens $SS'$ doppelt bedeckt.

Genau dieselben Entwicklungen hätte man durchführen können unter der Voraussetzung, dass in der Richtung von $S$ nach $B$ hin jeder folgende Krümmungskreis den vorhergehenden umfasst; man hätte nur bezüglich der betrachteten Kreise die Worte innerhalb und ausserhalb zu vertauschen, sodass z. B. jetzt der innere Rand eines stationären Kreises $\mathfrak{G}$ doppelt von den benachbarten Krümmungskreisen bedeckt würde. — Alles zusammengefasst ergiebt sich demnach folgender Satz:

*Hat ein endlicher Bogen $A_1 A_2$, dessen Krümmungsradius überall endlich ist und stetig variirt, nur mit dem Krümmungskreis $\mathfrak{G}$ eines einzigen Punktes $G$ vier aufeinanderfolgende Punkte gemein, so liegen die Krümmungskreise des Bogens entweder sämmtlich innerhalb oder sämmtlich ausserhalb des Kreises $\mathfrak{G}$. Dabei wird die Ringfläche zwischen $\mathfrak{G}$ und dem Krümmungskreis des Endpunktes $A_1$ von den Krümmungskreisen des Bogens $A_1 G$ genau einfach bedeckt, sodass entweder der äussere oder der innere Rand des Kreises $\mathfrak{G}$ von den ihm benachbarten Krümmungskreisen des Bogens doppelt überdeckt wird.*

## § 10.

### Asymptoten und Wendetangenten; allgemeine Folgerungen.

1. In ähnlicher Weise erkennt man leicht, wie die Umgebung einer Wendetangente und einer Asymptote von den ihr benachbarten Krümmungskreisen bedeckt wird; dabei möge die Voraussetzung stetiger Aenderung des Krümmungsradius auch für unendlich ferne und Wendepunkte in dem Sinne festgehalten werden, dass die Asymptote bezw. Wendetangente die Grenzgestalt der Krümmungskreise bildet, deren Osculationspunkte dem unendlich fernen oder Wendepunkt unbegrenzt nahe rücken.

Es sei zunächst etwa $W$ ein im Endlichen liegender Wendepunkt, $w$ die zugehörige Wendetangente und $PW$ ein endlicher Bogen der gegebenen Curve, welcher weder Wendepunkte noch stationäre Krümmungskreise besitzt, sodass, wenn $P'$ ein beliebiger von $W$ verschiedener Punkt des Bogens $PW$ ist, auf dem Bogen $PP'$ der in § 9 Nr. 3 gegebene Satz anwendbar ist. Hieraus folgt zunächst, dass keine zwei Krümmungskreise des Bogens $PW$ sich schneiden; denn

irgend zwei bestimmte von $W$ verschiedene Punkte desselben gehören immer beide bei passender Wahl des Punktes $P'$ dem Bogen $PP'$ an. Ferner liegt in der Richtung $PW$ jeder folgende Krümmungskreis ausserhalb jedes vorhergehenden, da die Krümmungsradien bei Annäherung an $W$ unbegrenzt wachsen. Endlich kann kein Krümmungskreis des Bogens $PW$ mit $w$ einen Punkt gemein haben. Denn wenn etwa der Krümmungskreis des Punktes $R$ die Gerade $w$ schnitte oder berührte, so müsste jeder diesen Kreis umfassende Kreis, z. B. jeder Krümmungskreis des Bogens $RW$ von $w$ in zwei getrennten Punkten geschnitten werden; unter diesen Krümmungskreisen giebt es aber solche, die von ihrer Grenzgestalt $w$ beliebig wenig verschieden sind; also müsste es auch Paare sich schneidender Krümmungskreise des Bogens $RW$ geben, was nach dem Obigen nicht der Fall ist.

Die Wendetangente $w$ begegnet also keinem Krümmungskreise des Bogens $PW$ und diese liegen somit sämmtlich auf einer und derselben Seite der Geraden $w$. Nimmt man nun auf der andern Seite derselben einen beliebigen ihr nicht begegnenden Kreis zum Fundamentalkreis einer Transformation durch reciproke Radien, so gehen sämmtliche Krümmungskreise des Bogens $PW$ sowie die Gerade $w$ selbst in endliche Kreise über, und das Innere des der Geraden $w$ entsprechenden Kreises $\mathfrak{W}$ enthält die Bilder der sämmtlichen Krümmungskreise des Bogens $PW$. Von diesen Bildern muss die Ringfläche zwischen $\mathfrak{W}$ und dem Bildkreis $\mathfrak{P}$ des in $P$ osculirenden Kreises genau einfach überdeckt werden; denn lässt man einen Punkt stetig von $P$ längs der gegebenen Curve nach $W$ laufen, so geht das Bild seines Krümmungskreises stetig aus der Lage $\mathfrak{P}$ in die Lage $\mathfrak{W}$ über, muss also jeden Punkt der Ringfläche mindestens einmal überstreichen. Dabei wird aber kein Punkt mehr als einmal erreicht, weil keine zwei Krümmungskreise des Bogens $PW$ sich schneiden. Geht man also zur ursprünglichen Figur zurück, so folgt, dass die Ebene auf der den Punkt $P$ enthaltenden Seite der Geraden $w$ ausserhalb des in $P$ osculirenden Kreises von den Krümmungskreisen des Bogens $PW$ genau einfach überdeckt wird.

Ebenso wird natürlich, wenn der Punkt $Q$ auf der gegebenen Curve und der entgegengesetzten Seite des Punktes $W$ liegt wie $P$, und der Bogen $QW$ dieselben Eigenschaften wie $PW$ besitzt, die ganze den Punkt $Q$ enthaltende Seite der Geraden $w$ ausserhalb des in $Q$ osculirenden Kreises von den Krümmungskreisen des Bogens $QW$ genau einfach überdeckt.

In dieser ganzen Schlussreihe ist nun von den Eigenschaften des Wendepunktes $W$ und der Wendetangente $w$ nur benutzt, dass letztere in $W$ von der Curve durchsetzt wird, und die Grenzlage der Krümmungskreise bildet, deren Osculationspunkte unendlich nahe an $W$

heranrücken. Beides trifft nun auch zu, wenn unter $W$ ein einfacher unendlichferner Punkt der Curve und unter $w$ die zugehörige Asymptote verstanden wird; dann gelten also auch sämmtliche für den Wendepunkt abgeleiteten Resultate und es ergiebt sich somit,

*dass die Krümmungskreise, deren Osculationspunkte in der Nachbarschaft eines im Endlichen liegenden Wendepunktes oder eines einfachen nicht singulären unendlich fernen Punktes der Curve liegen, die ganze Ebene ausserhalb zweier Kreise, welche der zugehörigen Wendetangente bez. Asymptote nicht begegnen, genau einfach überdecken.*

2. Wenn, wie bisher vorausgesetzt wurde, die stetige Aenderung des Krümmungsradius längs der gegebenen Curve nur beim Uebergang in die Wendepunkte und ins Unendlichferne in gewisser Weise unterbrochen wird, so bleibt längs jedes endlichen, von Wendepunkten freien Bogens der gegebenen Curve der Krümmungsradius unterhalb einer endlichen Grenze. Schneidet man also zu beiden Seiten jedes unendlich fernen und jedes Wendepunkts einen Bogen $PQ$ von beliebiger Grösse ab, so bleiben die Krümmungskreise des ganzen Restes innerhalb eines hinlänglich grossen Kreises. Das Aeussere dieses oder eines ihn umfassenden Kreises wird aber nach Nr. 1 von den Krümmungskreisen der Bögen $PQ$ genau so vielfach bedeckt, wie die Gesammtzahl der Wendepunkte und Asymptoten zusammen genommen beträgt. Somit ergiebt sich, *dass die Krümmungskreise unserer Curve, wenn dieselbe* $\mathfrak{w}$ *im Endlichen liegende Wendepunkte und* $\mathfrak{a}$ *einfache nicht singuläre Punkte im Unendlichen besitzt, die Ebene ausserhalb eines hinreichend grossen Kreises genau* $(\mathfrak{a}+\mathfrak{w})$ *fach überdecken.*

3. Geht nun durch irgend einen Punkt $Q$ eine beliebige Anzahl von Krümmungskreisen der gegebenen Curve, unter denen zunächst keine stationären oder Krümmungskreise von Endpunkten vorkommen, und werden Asymptoten nicht singulärer unendlichferner Punkte sowie Tangenten im Endlichen liegender Wendepunkte, welche durch $Q$ gehen, als Krümmungskreise mitgerechnet, so folgt aus Nr. 1 und § 9 Nr. 3 unmittelbar, dass, wenn einer der durch $Q$ gehenden Krümmungskreise in $P$ osculirt und durch $\mathfrak{P}$ bezeichnet wird, die diesem benachbarten Krümmungskreise der Curve beide Seiten des Kreises $\mathfrak{P}$ genau einfach bedecken; durch jeden Punkt einer hinreichend eng begrenzten Umgebung des Punktes $Q$ geht also ein bestimmter von $\mathfrak{P}$ beliebig wenig verschiedener Krümmungskreis. Da nun $\mathfrak{P}$ ein beliebiger der durch $Q$ gehenden Krümmungskreise ist, so folgt, dass durch jeden hinreichend wenig von $Q$ verschiedenen Punkt dieselbe Anzahl von Krümmungskreisen der gegebenen Curve geht, wie durch $Q$.

Man kann dies Resultat auch leicht bestätigen, indem man die Curve stereographisch auf eine Kugelfläche projicirt, auf die Bildcurve

den in § 2 Nr. 3 gegebenen Satz anwendet, und den in § 8 Nr. 1 bemerkten Zusammenhang zwischen den Krümmungskreisen der ursprünglichen und den Schmiegungsebenen der Bildcurve berücksichtigt.

4. Jetzt mögen die erhaltenen Resultate auf eine beliebige geschlossene Curve angewandt werden, welche mit der unendlichfernen Geraden nur $\alpha$ getrennte, nicht singuläre Punkte gemein hat, und deren Krümmungskreise nur in unendlich fernen und den $\mathfrak{w}$ Wendepunkten unendlich gross werden, sonst aber überall endlich sind, stetig variiren und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten stationär sind. Durch diese Voraussetzungen wird offenbar das Auftreten vielfacher Punkte mit getrennten Zweigen nicht ausgeschlossen. Dann kann nach dem in Nr. 3 erhaltenen Resultat die Anzahl der Krümmungskreise der gegebenen Curve, welche durch einen variabeln Punkt gehen, sich nur dann ändern, wenn der Punkt einen der stationären Krümmungskreise überschreitet. Nun wird nach § 9 Nr. 4 die Umgebung eines solchen entweder auf seiner äussern oder auf der innern Seite von den benachbarten Krümmungskreisen doppelt bedeckt, und im ersteren Fall ist offenbar der Radius des stationären Kreises ein Minimum, im zweiten Falle ein Maximum des Krümmungsradius. Bei Ueberschreitung eines Kreises der ersten Art, eines „Minimalkreises" von innen nach aussen gewinnt der bewegte Punkt offenbar zwei durch ihn gehende Krümmungskreise der gegebenen Curve, welche dem überschrittenen Minimalkreise benachbart sind; dagegen bei Ueberschreitung eines „Maximalkreises", dessen innerer Raum von den benachbarten Krümmungskreisen doppelt bedeckt wird, führt ein Uebergang von innen nach aussen zum Verlust zweier durch den bewegten Punkt gehender Krümmungskreise.

Nach Voraussetzung ist nun die Zahl der stationären Kreise endlich, es giebt also ein Gebiet von Punkten $P_a$, welche ausserhalb aller dieser Kreise liegen. Mit einem solchen Punkte $P_a$ werde ein beliebiger Punkt $P$ verbunden, der im Innern von $\mathfrak{m}$ Maximalkreisen und $\mathfrak{n}$ Minimalkreisen liegt; werden dann beim Uebergang von $P$ zu $P_a$ genau $\mathfrak{m}_1$ Maximalkreise und $\mathfrak{n}_1$ Minimalkreise von innen nach aussen, ferner $\mathfrak{m}_2$ Maximalkreise und $\mathfrak{n}_2$ Minimalkreise von aussen nach innen überschritten, so ist offenbar $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2$, da ausser den $\mathfrak{m}$ Maximalkreisen, in deren Innern der Punkt $P$ liegt, nur diejenigen längs des Weges $PP_a$ von innen nach aussen überschritten werden können, welche auch von aussen nach innen überschritten sind; aus ähnlichem Grunde ist $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2$. Nun gehen nach dem Obigen bei jedem der $\mathfrak{m}_1$ Austritte aus Maximalkreisen und der $\mathfrak{n}_2$ Eintritte in Minimalkreise zwei Krümmungskreise verloren; bei jedem der $\mathfrak{m}_2$ Eintritte in Maximalkreise und der $\mathfrak{n}_1$ Austritte aus Minimalkreisen werden zwei Krümmungskreise gewonnen; gehen also von diesen genau $\chi$ durch $P$,

so gehen $\mathfrak{x} + 2(\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2 - \mathfrak{m}_1) = \mathfrak{x} + 2(\mathfrak{n} - \mathfrak{m})$ durch $P_a$. Nimmt man aber letzteren Punkt ausserhalb eines alle stationären Kreise umfassenden Kreises von hinreichend grossem Radius an, so gehen nach Nr. 2 durch $P_a$ genau $\mathfrak{a} + \mathfrak{w}$ Krümmungskreise der gegebenen Curve, sodass sich die Gleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{w} = \mathfrak{x} + 2(\mathfrak{n} - \mathfrak{m})$$

oder

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \mathfrak{w} + 2(\mathfrak{m} - \mathfrak{n})$$

für die Anzahl der durch $P$ gehenden Krümmungskreise ergiebt. Dieses Resultat kann in folgendem Lehrsatz formulirt werden.

*Besitzt eine stetige geschlossene Curve* $\mathfrak{a}$ *getrennte, nicht singuläre Punkte im Unendlichen und* $\mathfrak{w}$ *Wendepunkte; wird ferner der Krümmungsradius nur bei Annäherung an die unendlichen und Wendepunkte unendlich gross, während er sonst überall endlich ist und stetig variirt; hat schliesslich der Krümmungskreis nur in einer endlichen Anzahl von Punkten vier aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemein, sodass er entweder ein Maximal- oder Minimalkreis ist, d. h. dass sein Radius ein Maximum oder Minimum des Krümmungsradius repräsentirt; so gehen durch jeden Punkt, der dem Innern von genau* $\mathfrak{m}$ *Maximalkreisen und genau* $\mathfrak{n}$ *Minimalkreisen angehört, genau* $\mathfrak{a} + \mathfrak{w} + 2\mathfrak{m} - 2\mathfrak{n}$ *Krümmungskreise der gegebenen Curve.*

5. Man könnte die Voraussetzungen dieses Satzes noch erweitern und das Auftreten von Spitzen, Berührungen mit der unendlichfernen Geraden und andern Singularitäten in den Kreis der betrachteten Möglichkeiten ziehen; indessen erhält man schon aus dem hier abgeleiteten Resultat als unmittelbare Corollare eine grosse Menge bekannter und unbekannter Sätze über die Krümmungskreise der einfachsten algebraischen Curven; so z. B. die Steiner'schen Sätze über die Krümmungskreise der Kegelschnitte, analoge Sätze über die circularen Curven dritter und die bicircularen Curven vierter Ordnung u. s. w.; dabei ergeben sich selbstverständlich stets Bestimmungen über die Anzahl der *reellen* Krümmungskreise, welche durch gewisse Punkte gehen.

Die wichtigsten Anwendungen des obigen allgemeinen Satzes ergiebt die Bemerkung, dass die aus einer gegebenen Curve vermittelst der Transformation durch reciproke Radien abgeleitete genau so viele reelle Wendepunkte besitzt, wie die Anzahl der durch das Inversionscentrum gehenden reellen Krümmungskreise der gegebenen Curve beträgt.

## § 11.

## Allgemeine Sätze über Curven auf dem einschaligen Hyperboloid.

1. Wie die ganze hier durchgeführte Theorie der Krümmungskreise auf den in § 10 gegebenen Sätzen über sphärische Curven beruht, so kann eine ähnliche Theorie abgeleitet werden, indem man von

den Curven ausgeht, welche auf der Fläche eines einschaligen Hyperboloids verlaufen.

Man bezeichne diese Fläche durch $\mathfrak{F}^{(2)}$ und betrachte zunächst einen ihr angehörigen, von Singularitäten freien Bogen, welcher im Punkte $T$ von einer ganz auf $\mathfrak{F}^{(2)}$ verlaufenden Geraden $t$ berührt wird. Dann rücke ein variabeler Punkt $V$ längs der Curve dem Punkte $T$ unendlich nahe, sodass die durch $t$ und $V$ gelegte Ebene $\varepsilon$ sich der in $T$ osculirenden Schmiegungsebene $\tau$ unbegrenzt nähert. Die Ebene $\varepsilon$ hat mit $\mathfrak{F}^{(2)}$ ausser der Geraden $t$ noch eine zweite $g$ gemein; die Schmiegungsebene $\tau$, welche gleichfalls durch $t$ geht, schneide die Fläche noch in der zweiten Geraden $g_0$. Da nun der Punkt $V$ sich unendlich nahe an $T$ heranbewegt, so folgt, dass die Gerade $g$, welche stets derselben Regelschaar $\mathfrak{R}_1$ angehört wie $g_0$, sich der letzteren unbegrenzt nähern muss. Wenn man also in der Regelschaar $\mathfrak{R}_1$ ein beliebig kleines Gebiet von Geraden in der Umgebung der Geraden $g_0$ abgrenzt, so gehört die Gerade $g$ diesem Gebiet an und verbleibt in demselben, sobald der Abstand der Punkte $T$ und $V$ hinreichend klein geworden ist. Falls nun die Gerade $g_0$ nicht durch $T$ ginge, könnte man jenes Gebiet von Geraden so eng begrenzen, dass ihm der Punkt $T$ nicht angehörte, und dasselbe würde dann von einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes $T$ gelten; z. B. würde der Punkt $V$, sobald er hinreichend nahe bei $T$ liegt, nicht mehr jenem Gebiet in der Umgebung der Geraden $g_0$ angehören können. Diesem Gebiet gehört aber, wie oben bemerkt, die Gerade $g$ an, sobald der Abstand $TV$ klein genug ist, und der Punkt $V$, welcher in $\varepsilon$ und $\mathfrak{F}^{(2)}$ nicht aber auf $t$ liegt, muss der Geraden $g$ angehören, muss also schliesslich in jener Umgebung der Geraden $g_0$ liegen. Somit ergiebt sich ein Widerspruch aus der Annahme, dass die Gerade $g_0$ nicht durch durch $T$ geht; die Ebene $\tau$, welche durch $t$ und $g_0$ geht, muss also mit der Tangentialebene der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ im Punkte $T$ identisch sein.

Geht man umgekehrt von der Annahme aus, dass die Schmiegungsebene mit der Tangentialebene $\tau$ der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ im Punkte $T$ identisch ist, ohne vorauszusetzen, dass die Tangente $t$ der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ ganz angehört, so lasse man wiederum längs der Curve den Punkt $V$ unendlichnahe an $t$ heranrücken. Fällt man dann von $V$ aus das Lot $VV'$ auf die Ebene $\tau$ und das Lot $VV''$ auf die Tangente $t$, und nimmt an, dass letztere nur zwei zusammenfallende Punkte mit der Fläche gemein hat, so haben die Quotienten $\overline{TV}^2 : \overline{VV'}$ und $\overline{TV}^2 : \overline{VV''}$ endliche und von Null verschiedene Grenzwerthe, wenn man den Punkt $V$ in die Lage $T$ hineinrücken lässt. Dasselbe gilt also auch von dem Quotienten $\overline{VV'} : \overline{VV''}$ und das bei $V'$ rechtwinklige Dreieck $VV'V''$ nähert sich demnach einer Grenzgestalt, in welcher jeder Winkel von Null verschieden ist. Die durch $t$ und $V$ gehende Ebene, welche die

Gerade $VV''$ enthält, nähert sich also einer von $\tau$ verschiedenen Grenzlage. Diese Grenzlage ist aber die Schmiegungsebene der Curve im Punkte $T$; es ergiebt sich somit ein Widerspruch gegen die vorausgesetzte Identität der Schmiegungsebene und Tangentialebene in $T$. Dieser Widerspruch kann, wenn $T$ ein nicht singulärer Punkt der Curve ist, nur dadurch gehoben werden, dass man annimmt, die Tangente $t$ habe mit der Fläche drei zusammenfallende Punkte gemein, d. h. sie sei eine Inflexionstangente. Im Falle der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ muss also die Tangente $t$ ganz auf der Fläche verlaufen. — Die erhaltenen Resultate kann man in folgender Weise zusammenfassen.

*In irgend einem nicht singulären Punkte einer Raumcurve, welche auf der Oberfläche eines geradlinigen Hyperboloids verläuft, ist die Schmiegungsebene der Curve mit der Tangentialebene der Fläche dann und nur dann identisch, wenn die Tangente des betreffenden Punktes ganz der Hyperboloidfläche angehört.*

2. Jetzt projicire man die Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ auf eine Ebene $\eta$ von einem Punkte $O$ aus, welcher auf der Fläche, nicht aber auf den Geraden $t$ und $g_0$, also nicht auf der Schmiegungsebene des Punktes $T$ liegt. Schneiden dann die beiden durch $O$ gehenden Geraden der Fläche die Ebene $\eta$ in $O_1$ und $O_2$, und gehören etwa die Geraden $t$ und $OO_2$ zu derselben Regelschaar $\mathfrak{R}_2$, so projiciren sich alle Geraden dieser Schaar mit Ausnahme von $OO_2$ in Gerade, welche durch $O_1$ gehen; bezeichnet man ferner das Bild des Punktes $T$ durch $T'$, so projicirt sich die gegebene Raumcurve, da die Schmiegungsebene des Punktes $T$ nicht durch $O$ geht, in eine Bildcurve, welche in $T'$ nicht singulär ist. Dieser Punkt ist von $O_1$ verschieden, denn die Geraden $OO_1$ und $g_0$, deren letztere durch $T$ geht, gehören derselben Regelschaar $\mathfrak{R}_1$ an, sind aber nach Voraussetzung nicht mit einander identisch. Endlich liegt der Punkt $O_1$ auf der Tangente $t'$ der Bildcurve im Punkte $T'$, da diese Tangente das Bild der Geraden $t$ ist. Man kann somit auf $O_1$ und $t'$ eine von § 1 Nr. 1 an oft benutzte Bemerkung anwenden, und schliessen, dass die Geraden in $\eta$, welche durch $O_1$ gehen und von $t'$ hinreichend wenig verschieden sind, durch $t'$ in zwei Hälften zerlegt werden; die einen begegnen der Bildcurve in der Umgebung des Punktes $T'$ zweimal, die andern gar nicht. Bedenkt man nun, dass die Geraden der Ebene $\eta$, welche durch $O_1$ gehen, die Bilder der Geraden der Regelschaar $\mathfrak{R}_2$ sind, so folgt, dass die Tangente $t$ die ihr benachbarten Geraden dieser Regelschaar in zwei Hälften zerlegt; die einen haben in der Umgebung des Punktes $T$ mit der gegebenen Raumcurve zwei, die andern keinen Punkt gemein.

3. Fasst man speciell von der gegebenen Raumcurve ein Stück ins Auge, welches den Punkt $T$ enthält und so klein ist, dass es keiner Ebene mehr als dreimal begegnet, so kann dasselbe nach § 4 Nr. 4

als ein Bogen $\Gamma$ im Sinne des § 3 betrachtet werden; behält man die dort gebrauchten Bezeichnungen bei, so kann man nach § 5 Nr. 2 und 3 sagen, dass die Secanten des Bogens $\Gamma$ ganz in den zugehörigen Gebieten (0) und (1) verlaufen. Ueberschreitet man aber von diesen Gebieten aus die abwickelbare Fläche, so gelangt man nach § 3 Nr. 3 beziehentlich in die Gebiete (2) und (3); überschreitet also der auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ bewegliche Punkt $W$ die Tangente $t$, indem er in der Regelschaar $\mathfrak{R}_2$ aus dem Bereich der Geraden, welche nach Nr. 2 Secanten des Stückes $\Gamma$ sind, übertritt in den Bereich derjenigen, welche in der Umgebung des Punktes $T$ der gegebenen Curve nicht begegnen, also bei hinreichender Begrenzung des Bogens $\Gamma$ mit diesem keinen Punkt gemein haben, so werden zwei durch $W$ gehende Schmiegungsebenen des Bogens $\Gamma$ gewonnen. Damit ist folgender Satz bewiesen.

*Liegt eine Raumcurve sammt ihrer in dem nicht singulären Punkte $T$ berührenden Tangente $t$ ganz auf einem geradlinigen Hyperboloid, so zerlegt die Tangente $t$ die ihr benachbarten und derselben Regelschaar angehörigen Geraden in zwei Hälften; die einen sind Secanten der Curve, die andern begegnen in einer hinreichend eng begrenzten Umgebung des Punktes $T$ der Curve nicht.*

*Geht ein auf dem Hyperboloid beweglicher Punkt $W$ von der ersten, aus Secanten bestehenden dieser Hälften in die andere über, indem er die Tangente $t$ überschreitet, so vermehrt sich die Anzahl der durch $W$ gehenden Schmiegungsebenen der gegebenen Curve um zwei.*

## § 12.

## Unpaare, geschlossene Curvenzüge auf dem geradlinigen Hyperboloid.

1. Speciell sei die auf dem Hyperboloid gegebene Curve ein geschlossener, unpaarer Zug, welcher von keiner Ebene in mehr als drei Punkten geschnitten wird, und das Projectionscentrum $O$ sei ein Punkt der Curve. Dann wird die Bildcurve von allen durch $O_1$ und $O_2$ gehenden Kegelschnitten der Ebene $\eta$, welche die Bilder der ebenen Schnitte des Hyperboloids sind, in einer ungeraden Anzahl solcher Punkte geschnitten, welche Punkten des Hyperboloids eindeutig entsprechen, d. h. von $O_1$ und $O_2$ verschieden sind; das ist aber nur möglich, wenn einer der Punkte $O_1$ und $O_2$, etwa $O_1$ der Bildcurve angehört, da jeder Kegelschnitt mit einem geschlossenen Zuge eine gerade Anzahl von Punkten gemein hat. — Die Bildcurve kann ferner von keiner Geraden der Ebene $\eta$ mehr als zweimal getroffen werden, da keine durch $O$ gehende Ebene mit der gegebenen Raumcurve ausser $O$ mehr als zwei Punkte gemein hat. Daraus folgt mit Rücksicht auf § 1 Nr. 3, dass die Ebene $\eta$ durch die Bildcurve in zwei Theile zerlegt

wird: durch die Punkte des einen gehen je zwei, durch die Punkte des andern keine Tangenten der Bildcurve. Jede Gerade, welche durch einen Punkt der letzteren Art geht, begegnet der Curve in zwei getrennten Punkten; dagegen werden die Geraden, welche durch einen Punkt der ersteren Art gehen, durch die beiden unter ihnen vorkommenden Tangenten in zwei Theile zerlegt; die einen begegnen der Curve zweimal, die andern gar nicht. Je nachdem also der Punkt $O_2$ zu den Punkten der einen oder andern Art gehört, d. h. ausserhalb oder innerhalb der Bildcurve liegt, haben die Geraden der Regelschaar $\mathfrak{R}_1$ mit der gegebenen Curve entweder je zwei Punkte, oder theils zwei, theils keinen Punkt gemein, und in letzterem Falle werden die Geraden der einen und andern Art durch zwei der Regelschaar angehörige Tangenten von einander getrennt. Berücksichtigt man noch, dass jede durch $O_1$ gehende Gerade mit der Bildcurve ausser $O_1$ nur noch einen Punkt gemein hat, so ergiebt sich:

*Jeder von Singularitäten freie, unpaare, geschlossene Curvenzug, welcher auf einem geradlinigen Hyperboloid liegt und keiner Ebene in mehr als drei Punkten begegnet, wird von allen Geraden der einen Regelschaar des Hyperboloids in einem einzigen Punkte geschnitten; die Geraden der andern Regelschaar begegnen entweder sämmtlich der Curve in zwei getrennten Punkten; oder es giebt unter ihnen zwei Tangenten der Curve, welche die Regelschaar in zwei Hälften zerlegen: die Geraden der einen Hälfte haben keinen, diejenigen der andern je zwei getrennte Punkte mit der Curve gemein.*

2. Auf Grund dieses Resultats kann leicht entschieden werden, wieviele Schmiegungsebenen der gegebenen Curve durch einen beliebigen Punkt des Hyperboloids gehen.

Nach § 5 Nr. 5 liegt eine Fläche, welche eine Curve $\Gamma$ im Sinne des § 3 enthält, in der Umgebung jedes Punktes $P$ der Curve ganz in dem zugehörigen Gebiet (1), d. h. durch jeden Punkt der betrachteten Umgebung geht eine einzige Schmiegungsebene der Curve $\Gamma$, solange die Schmiegungsebene des Punktes $P$ von der Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte verschieden ist. Nun können beide Ebenen im Falle des Hyperboloids nach § 14 Nr. 1 nur identisch sein, wenn die Tangente des Punktes $P$ eine Gerade der Fläche ist; und jedes Stück der gegebenen Curve, welches nach Ausschneidung eines beliebig kleinen Bogens übrig bleibt, ist eine Curve $\Gamma$ nach § 4 Nr. 4; also folgt, dass durch jeden Punkt des Hyperboloids, der einer gewissen Umgebung eines Curvenpunktes $P$ angehört, eine einzige Schmiegungsebene der Curve geht, wenn $P$ nicht Berührungspunkt einer der beiden Tangenten der Curve ist, welche nach Nr. 1 auf der Fläche liegen können: Eine Aenderung der Anzahl der Schmiegungsebenen, welche durch einen Punkt $W$ der Fläche gehen, kann aber nur eintreten,

wenn dieser die abwickelbare Fläche der Curve in einem Punkte, welcher der Curve nicht angehört, überschreitet. *Liegt also keine Tangente der in Nr. 1 betrachteten Curve auf der Fläche, so geht durch jeden Punkt der letzteren eine einzige Schmiegungsebene der Curve.*

Wenn dagegen die Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ zwei Tangenten $t_1$ und $t_2$ der Curve enthält, so gehen durch jeden Punkt der Fläche, welchen der Punkt $W$ von den Curvenpunkten ausgehend ohne Ueberschreitung der Linien $t_\nu$ auf stetigem Wege erreichen kann, hier wie im vorigen Falle eine einzige Schmiegungsebene der Curve. Ueberschreitet jetzt der Punkt $W$ eine der Tangenten $t_\nu$, so ändert sich nach § 4 die Anzahl der durch $W$ gehenden Schmiegungsebenen um zwei, muss also den Werth drei erhalten — wie denn auch nach § 3 Nr. 4 für eine geschlossene Cure $\Gamma$ nur die zwei Gebiete (1) und (3) vorhanden sind.

*Liegen also zwei Tangenten der in Nr. 1 betrachteten Curve auf dem Hyperboloid, so wird die Oberfläche des letzteren durch die Tangenten in zwei Gebiete zerlegt; durch jeden Punkt des einen gehen drei, durch jeden des andern eine einzige Schmiegungsebene der Curve.*

Das letztere Gebiet enthält die Punkte der Curve selbst, mithin auch sämmtliche auf dem Hyperboloid liegenden Secanten, da diese nach Nr. 1 zu derselben Regelschaar gehören, wie die Tangenten $t_1$ und $t_2$, also ganz in dem einen der von diesen abgegrenzten Gebiete verbleiben müssen.

3. Für den Specialfall der algebraischen Raumcurven dritter Ordnung sind die Resultate der beiden vorhergehenden Nummern im wesentlichen bekannt. Mit grösserem Vortheil kann man dieselben verwerthen für die Theorie der aus zwei unpaaren Zügen bestehenden Raumcurven vierter Ordnung, d. h. der Grundcurven solcher Büschel von Flächen zweiter Ordnung, in welchen keine reellen Kegel und nur geradlinige Flächen vorkommen. Es soll jedoch von dieser Curve nichts weiter als bekannt vorausgesetzt werden, als dass sie aus zwei unpaaren Zügen besteht, welche zusammen mit keiner Ebene mehr als vier Punkte gemein haben und auf dem geradlinigen Hyperboloid $\mathfrak{F}^{(2)}$ liegen. Dann begegnet eine beliebige Ebene jedem Zuge in mindestens einem Punkte, kann also mit keinem von ihnen mehr als drei Punkte gemein haben, sodass auf jeden Zug die Sätze der Nrn. 1 und 2 anwendbar sind.

Zunächst sieht man leicht, dass jeder Zug zwei ganz der Fläche angehörige Tangenten besitzen muss. Denn wäre das bei einem Zuge nicht der Fall, so würde er von jeder Geraden der einen Regelschaar nach Nr. 1 in zwei Punkten geschnitten, z. B. also auch von Geraden $l$, welche durch einen Punkt $P$ des andern Zuges gehen. Legt man aber durch einen von $P$ verschiedenen Punkt des letzteren Zuges und die Gerade $l$ eine Ebene, so muss dieser Zug der Ebene noch in einem dritten Punkte begegnen; die Ebene hat also mehr als vier Punkte mit der Curve

gemein, was der Voraussetzung widerspricht. Die vier Tangenten der Curve, welche demnach auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ verlaufen, müssen nun alle derselben Regelschaar angehören; denn schnitten sich irgend zwei Tangenten der Curve, so müsste die diese Tangenten enthaltende Ebene noch ausserhalb der Berührungspunkte der Curve begegnen, hätte also wiederum mehr als vier Punkte mit derselben gemein.

Die Tangenten $t_1$ und $t_2$ des einen Zuges, welche ganz auf $\mathfrak{F}^{(2)}$ liegen, theilen nun die Regelschaar, welcher sie angehören, nach Nr. 2 in zwei Hälften, von denen die eine aus Secanten besteht, und gleiches gilt von den der Fläche angehörigen Tangenten $s_1$ und $s_2$ des andern Zuges; da nun eine beiden Zügen gemeinsame Secante offenbar wieder auf Ebenen führen würde, welche der Curve mehr als viermal begegnen, so folgt, dass in der Regelschaar, welcher die Geraden $s_1$, $s_2$, $t_1$, $t_2$ angehören, das aus Secanten des einen Zuges bestehende, von $t_1$ und $t_2$ begrenzte Gebiet keine Gerade mit dem analogen auf den andern Zug bezüglichen Gebiet gemein hat. Diese Gebiete sind nach Nr. 2 die Gebiete (1) beider Züge; also liegt das auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ abgegrenzte Gebiet (1) des einen Zuges ganz innerhalb des Gebiets (3) des andern Zuges. Anders ausgedrückt, die vier Tangenten $s_1$, $s_2$, $t_1$, $t_2$ theilen die Regelschaar, welcher sie angehören, in vier Theile: durch jeden Punkt zweier von diesen Theilen gehen sechs, durch jeden der beiden andern vier Schmiegungsebenen der Curve. Längs jeder der vier Tangenten grenzt ein Theil der einen Art an einen Theil der andern Art, sodass man, wenn man die Fläche z. B. längs eines ebenen Schnittes stetig umlaufen denkt, abwechselnd in Theile der einen und andern Art gelangt. Von den durch einen Punkt gehenden Schmiegungsebenen osculiren immer drei auf einem Zuge, die eine oder die drei übrigen auf dem andern Zuge. Durch einen Punkt geht endlich dann und nur dann eine Secante eines Zuges, wenn von diesem nur eine Schmiegungsebene, im Ganzen also vier Schmiegungsebenen der Curve durch den betrachteten Punkt gehen.

4. Entnimmt man aus der Theorie des Büschels von Flächen zweiter Ordnung den Satz, dass durch jeden Punkt des Raumes eine Fläche des Büschels geht und dass das Büschel der oben betrachteten Grundcurve nur geradlinige Hyperboloide enthält, so ergiebt sich leicht, dass der ganze Raum in Gebiete (4) und (6) zerfällt, wobei wieder durch jeden Punkt des Gebiets ($\nu$) genau $\nu$ Schmiegungsebenen der gegebenen Curve gehen. Hieraus endlich gewinnt man einen systematischen Ueberblick über die möglichen Realitätsverhältnisse der aus zwei unpaaren Zügen bestehenden ebenen Curven vierter Ordnung vom Geschlecht Eins; indessen sollen diese Specialitäten hier nicht weiter verfolgt und die obigen Entwicklungen nur noch für die Theorie gewisser ebener Kegelschnittsysteme verwerthet werden.

## § 13.

### Theorie einer speciellen Gattung von Kegelschnittsystemen.

1. Aus den abgeleiteten Sätzen über Curven, welche auf dem geradlinigen Hyperboloid $\mathfrak{F}^{(2)}$ verlaufen, erhält man Sätze über ebene Kegelschnittsysteme durch die schon in den beiden vorigen Paragraphen angewandte Projection des Hyperboloids von einem seiner Punkte aus auf eine Ebene. Ist nämlich auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ eine beliebige Curve $\Lambda$ gegeben, und bezeichnet man wiederum das Projectionscentrum durch $O$, die Schnittpunkte der Bildebene mit den durch $O$ gehenden Geraden der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ durch $O_1$ und $O_2$, so werden die Schnitte der Fläche mit den Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$ projicirt in Kegelschnitte, welche durch $O_1$ und $O_2$ gehen, und mit dem ebenen Bilde $\mathfrak{L}$ der Curve $\Lambda$ in Osculation sind; dabei kann offenbar auch die Curve $\mathfrak{L}$ und ihre Lage zu den Punkten $O_1$ und $O_2$ als beliebig gegeben betrachtet werden. Die Anzahl derjenigen Kegelschnitte dieses Systems, welche durch irgend einen Punkt $W$ der Ebene gehen, ändert sich nur, wenn der Punkt gewisse Grenzlinien überschreitet. Die hauptsächlichsten dieser Grenzlinien und die Art, wie an ihnen die Anzahl der durch $W$ gehenden Kegelschnitte des Systems von der Richtung abhängt, in welcher die Grenzlinie vom Punkte $W$ überschritten wird, sollen im Folgenden kurz untersucht werden.

Es sei wiederum $T$ der Berührungspunkt einer auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(3)}$ verlaufenden Tangente $t$ der Curve $\Lambda$ und gehöre etwa $t$ mit der Geraden $OO_2$ zu derselben Regelschaar; wird das Bild des Punktes $T$ durch $T'$ bezeichnet, so ist $O_1T'$ die Tangente der Curve $\mathfrak{L}$, und $O_2T'$ das Bild der ausser $t$ noch durch $T$ gehenden Geraden $g_0$ der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$. Nähert sich dann der Punkt $V$ längs der Curve $\Lambda$ dem Punkte $T$, so schneidet die in $V$ osculirende Schmiegungsebene auf $\mathfrak{F}^{(2)}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{S}$ aus, welcher schliesslich in das Linienpaar $t$, $g_0$ übergeht. Das Bild des Kegelschnitts $\mathfrak{S}$ ist nun ein Kegelschnitt des Systems und das Bild des Linienpaars $t$, $g_0$ das Linienpaar $O_1T'$, $O_2T'$; letzteres ist also als degenerirter Kegelschnitt des Systems zu betrachten. Die beiden Hälften dieses Linienpaars verhalten sich aber wesentlich ungleich; denn bei Ueberschreitung der Geraden $g_0$ durch einen beliebigen auf $\mathfrak{F}^{(2)}$ variirenden Punkt $W$ wird die Anzahl der durch $W$ gehenden Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$ im Allgemeinen nicht geändert, während längs der Geraden $t$, welche die ihr benachbarten und derselben Regelschaar angehörigen Geraden nach § 14 Nr. 3 in zwei Hälften zerlegt, deren eine aus Secanten besteht, zwei durch $W$ gehende Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$ gewonnen oder verloren werden, jenachdem der Punkt $W$, indem er die Tangente $t$ überschreitet, von der aus Secanten bestehenden Hälfte in die andere übergeht oder um-

gekehrt. Nun sind die Bilder der der Tangente $t$ benachbarten und derselben Regelschaar angehörigen Geraden die Geraden durch $O_1$, welche von $O_1T'$ hinreichend wenig abweichen, und diejenigen dieser Geraden, welche der Curve $\mathfrak{L}$ in der Umgebung des Punktes $T'$ zweimal begegnen, sind die Bilder der auf $\mathfrak{F}^{(2)}$ liegenden Secanten der Curve $\Lambda$. Bezeichnet man also das Bild des Punktes $W$ durch $W'$, so werden zwei durch $W'$ gehende Kegelschnitte des Systems gewonnen oder verloren, je nachdem bei Ueberschreitung der Tangente $O_1T'$ durch $W'$ die Gerade $O_1W'$ sich in dem einen oder andern Sinne dreht; hat sie unmittelbar vor der Ueberschreitung in der Umgebung des Punktes $T'$ mit $\mathfrak{L}$ zwei Punkte gemein, so werden zwei Kegelschnitte gewonnen. — Dagegen tritt im Allgemeinen keine Aenderung in der Anzahl der durch $W'$ gehenden Kegelschnitte des Systems ein, wenn der Punkt $W'$ die Gerade $O_2T'$, welche das Bild der Geraden $g_0$ ist, überschreitet. Man kann also folgenden Satz aufstellen:

*In dem System der Kegelschnitte, welche eine beliebige ebene Curve $\mathfrak{L}$ osculiren und durch die festen Punkte $O_1$ und $O_2$ gehen, tritt als degenerirter Kegelschnitt jedes Linienpaar auf, welches aus einer durch $O_1$ gehenden Tangente der Curve $\mathfrak{L}$ und der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes $T'$ mit $O_2$ besteht. Wird letztere von einem Punkte $W'$ überschritten, so ändert sich im Allgemeinen die Anzahl der durch $W'$ gehenden Kegelschnitte des Systems nicht; dagegen ändert sich diese Anzahl um zwei, wenn der Punkt $W'$ die Tangente $O_1T'$ überschreitet, und zwar tritt Zu- oder Abnahme ein, je nachdem sich die Gerade $O_1W'$ um $O_1$ in dem einen oder andern Sinne dreht. Hat dieselbe, ehe sie in die Lage $O_1T'$ fällt, in der Umgebung des Punktes $T'$ zwei Punkte mit $\mathfrak{L}$ gemein, so tritt Zunahme ein. — Analoges gilt für die durch $O_2$ gehenden Tangenten der Curve $\mathfrak{L}$.*

2. Ausser den Tangenten $t$ bilden noch die Schnitte der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ mit den stationären Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$ Grenzlinien, längs deren sich die Anzahl der durch $W$ gehenden Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$ ändert, wenn wieder unter $W$ ein auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ beweglicher Punkt verstanden wird. Es sei etwa $S$ der Osculationspunkt einer stationären Schmiegungsebene $\sigma$, $s$ die Tangente im Punkte $S$ und $\mathfrak{S}$ der von der Ebene $\sigma$ auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ ausgeschnittene Kegelschnitt. Ueberschreitet dann der Punkt $W$ die Curve $\mathfrak{S}$, so vermehrt oder vermindert sich nach § 6 Nr. 3 die Anzahl der durch $W$ gehenden Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$ um zwei, je nachdem sich die durch $W$ und $s$ gelegte Ebene $\varepsilon$ um $s$ herum in dem einen oder andern Sinne dreht; und zwar tritt die Verminderung ein, wenn die Ebene $\varepsilon$, bevor sie die Lage $\sigma$ erreicht, mit $\Lambda$ zwei Punkte gemein hat. Demgemäss zerfallen die Kegelschnitte $\mathfrak{S}_0$, welche von den durch $s$ gehenden Ebenen auf $\mathfrak{F}^{(2)}$ ausgeschnitten werden und von $\mathfrak{S}$ hinreichend wenig

verschieden sind, in zwei durch $\mathfrak{S}$ getrennte Hälften; die einen haben ausser $S$ in der Umgebung dieses Punktes zwei, die andern keinen Punkt mit $\Lambda$ gemein, und der Uebergang des Punktes $W$ von der ersten Hälfte in die zweite führt zum Verlust zweier durch $W$ gehender Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$. Die Kegelschnitte der ersten Hälfte mögen durch $\mathfrak{S}_{01}$, diejenigen der zweiten durch $\mathfrak{S}_{02}$ bezeichnet werden.

Bezeichnet man nun die Bilder der Punkte $S$ und $W$ durch $S'$ und $W'$, der Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_{01}$, $\mathfrak{S}_{02}$ durch $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}'_{01}$, $\mathfrak{S}'_{02}$, so gehen letztere sämmtlich durch $O_1$ und $O_2$ und berühren einander im Punkte $S'$; jeder Kegelschnitt $\mathfrak{S}_0'$ wird also durch $O_1$ und $O_2$ in zwei Bögen zerlegt, von denen der eine innerhalb, der andere ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{S}$ verläuft. Dabei liegt der Bogen $O_1 S' O_2$ entweder auf allen Kegelschnitten $\mathfrak{S}'_{01}$ im Innern von $\mathfrak{S}'$, und bei allen Kegelschnitten $\mathfrak{S}'_{02}$ im Aeussern, oder umgekehrt; denn die ersteren werden ja von letzteren durch $\mathfrak{S}'$ getrennt.

Die Curve $\mathfrak{L}$ hat offenbar mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{S}'$ in $S'$ vier aufeinanderfolgende Punkte gemein, d. h. $\mathfrak{S}'$ ist die Grenzgestalt eines Kegelschnitts, welcher vier in $S'$ zusammenrückende Punkte mit der Curve $\mathfrak{L}$ gemein hat; also muss letztere — vgl. die analoge Bemerkung in § 9 Nr. 4 — in der Umgebung des Punktes $S'$, von diesem selbst abgesehen, entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{S}'$ liegen. Fasst man speciell den letzteren Fall in's Auge, so müssen die Bögen $O_1 S' O_2$ der Curven $\mathfrak{S}'_{01}$ ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{S}'$ liegen, da jede Curve $\mathfrak{S}'_{01}$ in der Umgebung des Punktes $S'$ noch zwei von diesem verschiedene Punkte mit $\mathfrak{L}$ gemein, ebenso wie jeder Kegelschnitt $\mathfrak{S}_{01}$ der Curve $\Lambda$ noch in der Umgebung des Punktes $S$ in zwei von diesem verschiedenen Punkten begegnet. In diesem Falle wird also der äussere Rand des Kegelschnitts $\mathfrak{S}'$ längs des Bogens $O_1 S' O_2$ von den Kegelschnitten $\mathfrak{S}'_{01}$ bedeckt; deshalb wird nach dem oben bemerkten der innere Rand dieses Bogens von den Curven $\mathfrak{S}'_{02}$, dagegen der innere und äussere Rand des den Punkt $S'$ nicht enthaltenden Bogens $O_1 O_2$ beziehentlich von den Kegelschnitten $\mathfrak{S}'_{01}$ und $\mathfrak{S}'_{02}$ bedeckt. — Tritt nun der Punkt $W'$ vom Gebiet der Curven $\mathfrak{S}'_{01}$ in dasjenige der Curven $\mathfrak{S}'_{02}$ über, d. h. überschreitet er in unserm Falle den Kegelschnitt $\mathfrak{S}'$ längs des Bogens $O_1 S' O_2$ von aussen nach innen, oder längs des andern Bogens $O_1 O_2$ von innen nach aussen, so tritt der Punkt $W$ vom Gebiet der Curven $\mathfrak{S}_{01}$ auf das der Curven $\mathfrak{S}_{02}$ über, verliert also zwei durch ihn gehende Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$; der Punkt $W'$ verliert also bei der beschriebenen Ueberschreitung des Kegelschnitts $\mathfrak{S}'$ zwei durch $W'$ gehende Kegelschnitte des Systems, während beim entgegengesetzten Uebergang natürlich zwei solche Kegelschnitte gewonnen werden.

Führt man diese Betrachtungen für den Fall durch, dass die Curve

$\mathfrak{L}$ in der Umgebung des Punktes $S'$ innerhalb der Curve $\mathfrak{S}'$ verläuft, so vertauschen offenbar nur die Innen- und Aussenseite der letzteren ihre Rollen, sodass man, alles zusammengefasst, folgenden Lehrsatz erhält.

*Wenn ein Kegelschnitt $\mathfrak{S}'$ des in Nr. 1 definirten Systems in $S'$ vier aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve $\mathfrak{L}$ gemein hat, so liegt letztere in der Umgebung des Punktes $S'$, von diesem selbst abgesehen, entweder ganz ausserhalb oder ganz innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{S}'$. Im ersten Falle vermindert, im zweiten vermehrt sich die Anzahl der durch einen Punkt $W'$ gehenden Kegelschnitte des Systems um zwei, wenn der Punkt $W'$ den Kegelschnitt $\mathfrak{S}'$ längs des Bogens $O_1 S' O_2$ von aussen nach innen, oder längs des andern Bogens $O_1 O_2$ von innen nach aussen überschreitet.*

## § 14.

## Beispiele.

1. Aus den Sätzen der beiden vorigen Paragraphen kann mit Leichtigkeit bei einer grossen Anzahl specieller Kegelschnittsysteme vollständig übersehen werden, in welcher Weise dieselben die ganze Ebene überdecken. Die folgenden Beispiele solcher Systeme mögen nicht sowohl wegen der dabei abzuleitenden speciellen Resultate als zur Erläuterung der obigen allgemeinen Sätze etwas näher betrachtet werden.

Zunächst möge unter $\mathfrak{L}$ ein Kegelschnitt verstanden werden, und sei $O_1$ einer seiner Punkte, $O_2$ ein Punkt seines Innern. Zieht man dann durch einen beliebigen, ausserhalb der Ebene des Kegelschnitts liegenden Punkt $O$ die Geraden $OO_1$ und $OO_2$ und legt durch diese ein geradliniges Hyperboloid $\mathfrak{F}^{(2)}$, so wird auf die Fläche desselben vom Punkte $O$ aus der Kegelschnitt $\mathfrak{L}$ in eine Raumcurve dritter Ordnung $\Lambda$ projicirt, welche von jeder Geraden der einen Regelschaar des Hyperboloids in zwei getrennten Punkten geschnitten wird. Dann geht nach § 12 Nr. 2 durch jeden Punkt der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ eine einzige Schmiegungsebene der Curve $\Lambda$, also durch jeden Punkt der Ebene ein einziger Kegelschnitt, welcher die Punkte $O_1$ und $O_2$ enthält und die Curve $\mathfrak{L}$ osculirt.

Nimmt man dagegen den Punkt $O_2$ ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{L}$ an, so entsprechen den durch $O_2$ gehenden Tangenten $t_1$ und $t_2$ desselben zwei der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ angehörige Tangenten der Bildcurve $\Lambda$, welche die ganze Fläche in zwei Theile zerlegen; durch jeden Punkt des einen Theils gehen nach § 12 Nr. 2 drei, durch jeden Punkt des andern eine einzige Schmiegungsebene der Curve $\Lambda$. — Die Ebene des Kegelschnitts $\mathfrak{L}$ wird also durch die Tangenten $t_1$ und $t_2$ in zwei

Hälften zerlegt (vgl. § 1 Nr. 2), von denen die eine den Kegelschnitt $\mathfrak{L}$ enthält und einfach, die andere dreifach von den Kegelschnitten des Systems bedeckt wird. Geht ein Punkt $W'$ aus der ersteren Hälfte in die zweite über, so ist die Gerade $O_2 W$ vor dem Uebergang, wie überhaupt, solange der Punkt $W$ in der ersten Hälfte liegt, Secante des Kegelschnitts, was dem in § 13 Nr. 1 erhaltenen allgemeinen Resultate entspricht.

2. Es werde zweitens unter $\mathfrak{L}$ eine zweitheilige Curve dritter Ordnung verstanden und das System der Kegelschnitte betrachtet, welche die Curve $\mathfrak{L}$ osculiren und gleichzeitig durch zwei feste Punkte $O_1$ und $O_2$ gehen; von diesen liege $O_1$ auf dem paaren, $O_2$ auf dem unpaaren Zuge der Curve. Projicirt man dann wieder die Ebene von einem beliebigen, ihr nicht angehörenden Punkte $O$ aus auf die Oberfläche eines geradlinigen Hyperboloids $\mathfrak{F}^{(2)}$, welches die Geraden $OO_1$ und $OO_2$ ganz enthält, so ist das Bild jedes Zuges der Curve $\mathfrak{L}$ ein unpaarer Zug; denn die ebenen Schnitte der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ sind die Bilder der durch $O_1$ und $O_2$ gehenden Kegelschnitte, und diese schneiden jeden Zug der Curve $\mathfrak{L}$ in einer ungeraden Anzahl solcher Punkte, welche von $O_1$ und $O_2$ verschieden sind, also Punkten der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ eindeutig entsprechen. Auf die Bildcurve $\Lambda$ sind demnach die in § 12 Nr. 3 gegebenen Entwicklungen anwendbar. Da nun die auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ liegenden Tangenten $s_1, s_2, t_1, t_2$ der Curve $\Lambda$ offenbar die Bilder der durch $O_2$ gehenden vier Tangenten $s_1', s_2', t_1', t_2'$ der Curve $\mathfrak{L}$ sind, so folgt unmittelbar aus der angeführten Stelle, dass die Tangenten $s'$, $t'$ die Ebene in vier Paare zusammengehöriger Scheitelwinkelräume zerlegen, von denen zwei vierfach und zwei sechsfach von den Kegelschnitten des Systems bedeckt werden. Da ferner auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ diejenigen der vier von den Geraden $s_1, s_2, t_1, t_2$ abgegrenzten Gebiete, in welchen die beiden Curvenzüge liegen, vierfach von den Schnitten der Fläche mit den Schmiegungsebenen der Curve bedeckt werden, so folgt, dass in der Ebene von den oben definirten Paaren von Scheitelwinkelräumen diejenigen beiden, in welchen die Curvenzüge liegen, von den Kegelschnitten des Systems nur vierfach bedeckt werden. Zieht man in einem dieser Flächenräume eine Gerade durch $O_2$, so ist sie Secante der Curve, während die andern Flächenräume keine durch $O_2$ gehenden Secanten enthalten. Da nun letztere Flächen sechsfach von den Kegelschnitten des Systems bedeckt werden, so sieht man auch hier, dass der Uebergang eines Punktes $W'$ über die halben degenerirten Systemkegelschnitte $s'$, $t'$ zum Gewinn zweier durch $W'$ gehender Kegelschnitte führt, wenn in der Umgebung des Berührungspunktes der überschrittenen Tangente vor dem Uebergang die Gerade $O_2 W'$ zwei Punkte, nachher keinen mit $\mathfrak{L}$ gemein hat, wie es nach § 13 Nr. 1 allgemein der Fall ist.

3. Um ebenso den in § 13 Nr. 2 erhaltenen Satz an einem Beispiel zu bestätigen, möge endlich noch das System der Kegelschnitte untersucht werden, welche einen festen Kegelschnitt $\mathfrak{L}$ osculiren und durch zwei im Innern desselben gelegene feste Punkte $O_1$ und $O_2$ gehen. Die Projection des Kegelschnitts $\mathfrak{L}$ auf ein die Geraden $OO_1$ und $OO_2$ enthaltendes Hyperboloid $\mathfrak{F}^{(2)}$ ist dann eine Curve vierter Ordnung $\Lambda$ mit einem Doppelpunkt in $O$; wenn die Schnittpunkte der Curve $\mathfrak{L}$ mit der Geraden $O_1O_2$ durch $A$ und $B$ bezeichnet werden, so sind die Tangenten des Doppelpunkts $OA$ und $OB$, also von den durch $O$ gehenden Geraden der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ verschieden. Ebenso kann auch die Tangente keines andern Punktes der Curve $\Lambda$ ganz der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ angehören, da sie in diesem Falle das Bild einer durch $O_1$ oder $O_2$ gehenden Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{L}$ sein müsste, diese Punkte aber im Innern des Kegelschnitts liegen. Nach § 11 Nr. 1 ist daher in keinem nicht singulären Punkte der Curve $\Lambda$ die Schmiegungsebene mit der Tangentialebene der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ identisch, und hieraus folgt nach § 5 Nr. 5, dass von den Schmiegungsebenen eines hinreichend kleinen nirgends singulären Bogens der Curve $\Lambda$ durch jeden diesem Bogen hinreichend nahe benachbarten Punkt der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ eine einzige hindurchgeht, abgesehen natürlich von den Punkten des Bogens selbst, durch welche nach der stets gebrauchten Zählungsweise drei zusammenfallende Schmiegungsebenen gehen. Ueberschreitet also der Punkt $W$ die Curve $\Lambda$, indem er auf der Oberfläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ verbleibt, in einem nicht singulären Punkte, so tritt keine Aenderung in der Anzahl der durch $W$ gehenden Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$ ein. Eine Aenderung dieser Anzahl ist demnach nur möglich an den Schnittlinien der Fläche mit den stationären Schmiegungsebenen der Curve. Es sind deren nur zwei vorhanden, wie aus der Theorie des Büschels von Flächen zweiter Ordnung bekannt oder doch leicht zu beweisen ist; ihren Schnitten mit der Fläche entsprechen in der Ebene der Curve $\mathfrak{L}$ Kegelschnitte des Systems, welche mit $\mathfrak{L}$ vier aufeinanderfolgende Punkte gemein haben. Diese beiden Kegelschnitte, welche durch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ bezeichnet werden und in den Punkten $C$ und $D$ mit $\mathfrak{L}$ in Berührung sein mögen, können nun ausser $O_1$ und $O_2$ keinen Punkt mit einander gemein haben. Denn construirt man die offenbar reellen Doppelpunkte der durch die Punktepaare $O_1O_2$ und $AB$ bestimmten Involution und bezeichnet den im Innern des Kegelschnitts $\mathfrak{L}$ gelegenen durch $M$, so kann man durch eine reelle collineare Transformation der Ebene den Kegelschnitt $\mathfrak{L}$ in eine Ellipse überführen, in welcher $M$ der Mittelpunkt, $AB$ eine Axe und die Punkte $O_1$ und $O_2$ von der andern Axe in gleichem senkrechten Abstande sind. Dann liegt die ganze Figur, mithin auch das ganze Kegelschnittsystem in Bezug auf jede der beiden Axen symmetrisch; speciell muss zu jedem

vierpunktig berührenden Kegelschnitt des Systems in Bezug auf jede Axe ein ihm symmetrischer Kegelschnitt von derselben Beschaffenheit gefunden werden können. Da nun überhaupt die einzigen solchen Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ sind, so folgt, dass jeder von diesen sich selbst in Bezug auf die eine Axe, mit dem andern in Bezug auf die zweite Axe symmetrisch sein muss; diese zweite Axe kann aber nur $AB$ sein, da die beiden Kegelschnitte durch $O_1$ und $O_2$ gehen. Aus dieser Symmetrie in Bezug auf $AB$ folgt sofort, dass die Curven $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ausser $O_1$ und $O_2$ keinen Punkt gemein haben. Endlich folgt aus der Symmetrie in Bezug auf die von $AB$ verschiedene Axe, dass die Punkte $C$ und $D$, in welchen der Kegelschnitt $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ vierpunktig berührt wird, in die Scheitel dieser Axe fallen müssen.

4. Bezeichnet man nun die Bilder der Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(2)}$, also die Schnitte der Fläche mit den beiden stationären Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$, durch $\mathfrak{K}_1'$ und $\mathfrak{K}_2'$, so können diese keinen Punkt gemein haben, da sonst die Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ausser $O_1$ und $O_2$ noch Punkte gemein haben müssten, was nicht der Fall ist. Die Oberfläche $\mathfrak{F}^{(2)}$ wird also durch $\mathfrak{K}_1'$ und $\mathfrak{K}_2'$ in zwei Theile zerlegt, deren jeder im Sinne der projectiven Auffassung ein zusammenhängendes Gebiet bildet. Einem dieser Theile muss die Curve $\Lambda$ ganz angehören, da sie die Curven $\mathfrak{K}_1'$ und $\mathfrak{K}_2'$, mit welchen sie je vier zusammenfallende Punkte gemein hat, offenbar nicht überschreitet; dieser Theil der Fläche werde durch (I), der Rest durch (II) bezeichnet. Um dann die Anzahl der durch jeden Punkt des Gebiets (I) gehenden Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$ zu kennen, genügt es, für Punkte in der Nähe der Curve $\Lambda$ diese Anzahl zu bestimmen, da, wie oben bemerkt, eine Aenderung derselben nur bei Ueberschreitung der Curven $\mathfrak{K}_1'$ und $\mathfrak{K}_2'$ eintreten kann.

Von einem ihrer Punkte aus projicirt erscheint die Curve $\Lambda$ als Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt, also mit einem Wendepunkt; durch jeden ihrer Punkte $P$ geht also die Schmiegungsebene eines einzigen andern Punktes $Q$. Da nun nach § 5 Nr. 5 durch jeden in der Nähe des Punktes $P$, nicht aber auf der Curve liegenden Punkt eine einzige in der Nähe von $P$ osculirende Schmiegungsebene, und ausserdem nach den allgemeinen Sätzen des § 2 eine in der Nähe des Punktes $Q$ osculirende geht, so folgt, dass durch jeden Punkt des Gebietes (I), abgesehen von den Punkten der Curve $\Lambda$ selbst, zwei Schmiegungsebenen derselben hindurchgehen.

Um endlich auch die Anzahl der durch jeden Punkt des Gebiets (II) gehenden Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$ zu bestimmen, werde angenommen, dass die Ebene des Kegelschnitts $\mathfrak{K}_1'$ die Curve $\Lambda$ in $S$ osculirt und sei die Tangente dieses Punktes $s$. Dann liegt jede Ebene welche durch $s$ und einen Punkt $W_0$ der Curve $\Lambda$ gelegt wird

vom Punkte $S$ abgesehen ganz im Gebiet (I), sobald der Punkt $W_0$ hinreichend nahe bei $S$ liegt. Lässt man nun den Punkt $W_0$ längs der Curve unbegrenzt nahe an $S$ heranrücken und nimmt den Punkt $W$ auf dem Schnitt der Ebene $\varepsilon$ mit der Fläche $\mathfrak{F}^{(3)}$ beliebig, aber von $S$ verschieden an, so nähert sich der Punkt $W$ dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1'$; überschreitet er diesen, so begegnet seine Verbindungsebene mit $s$ der Curve $\Lambda$ nicht mehr. Bei diesem Uebergang hat sich aber die Ebene $\varepsilon$ in dem Sinne um $s$ herumgedreht, dass nach § 6 Nr. 3 eine Verminderung der durch $W$ gehenden Schmiegungsebenen um zwei eintritt. Durch die Punkte des Gebiets (II) gehen also keine Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$.

5. Die Gebiete (I) und (II) sind nun die Projectionen gewisser durch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ abgegrenzter ebener Gebiete. Diese Kegelschnitte verlaufen ganz im Innern der Curve $\mathfrak{L}$, da sie dieser ausserhalb der Berührungspunkte nirgends begegnen und durch die Punkte $O_1$ und $O_2$ gehen, welche nach Voraussetzung im Innern der Curve $\mathfrak{L}$ liegen. Daraus folgt, dass dem ganzen Gebiet der Ebene ausserhalb der beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, welchem die Curve $\mathfrak{L}$ angehört, ein Theil des Gebiets (I) bei der Projection der Ebene auf der Fläche $\mathfrak{F}^{(3)}$ entsprechen muss. — Zieht man nun durch $O_1$ eine Gerade $l$, welche ausser $O_1$ noch von $O_1$ und $O_2$ verschiedene Punkte mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gemein hat, so hat die entsprechende, auf $\mathfrak{F}^{(3)}$ liegende Gerade $l'$ mit den Kegelschnitten $\mathfrak{K}_1'$ und $\mathfrak{K}_2'$ Punkte gemein, welche keiner der Geraden $OO_1$ und $OO_2$ angehören. Den Punkten, welche auf $l$ in der Umgebung des Punktes $O_1$ liegen, entsprechen dann die Punkte, welche auf $l'$ in der Nähe des Durchschnitts der Geraden $OO_1$ und $l'$, also auf keinem der Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1'$ und $\mathfrak{K}_2'$ liegen. Dem Durchgang durch $O_1$ längs der Geraden $l$, welcher vom Aeussern beider Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in's Innere beider hineinführt, entspricht also auf $\mathfrak{F}^{(3)}$ eine Bewegung längs der Geraden $l'$, bei welcher keine Grenzlinie der Gebiete (I) und (II) überschritten wird. Es entspricht also auch dem Gebiet der Punkte, welche innerhalb beider Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ liegen, ein Theil des Gebiets (I). — Der Ueberschreitung einer dieser Curven in einem von $O_1$ und $O_2$ verschiedenen Punkte entspricht aber auf $\mathfrak{F}^{(3)}$ ein Uebergang aus einem der Gebiete (I) und (II) in das andere; also ist das Gebiet (II) die Projection des Gebiets der Punkte, welche innerhalb des einen und ausserhalb des andern der Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ liegen. — Berücksichtigt man nun den Zusammenhang der Kegelschnitte des Systems mit den Schmiegungsebenen der Curve $\Lambda$, so ergiebt sich aus den in Nr. 4 erhaltenen Resultaten folgender Satz.

*Im System der Kegelschnitte, welche den beliebig gegebenen Kegelschnitt $\mathfrak{L}$ osculiren und durch zwei feste, im Innern desselben liegende*

*Punkte gehen, kommen zwei reelle Kegelschnitte* $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *vor, welche mit* $\mathfrak{L}$ *je vier aufeinanderfolgende Punkte gemein haben. Durch jeden Punkt der Ebene, welcher ausserhalb beider Kegelschnitte* $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *oder innerhalb beider liegt, gehen zwei, durch jeden andern Punkt keine reellen Kegelschnitte des Systems.*

6. Dabei liegt, wie schon bemerkt ist, die Curve $\mathfrak{L}$ z. B. in der Umgebung des Punktes $C$, in welchem sie mit $\mathfrak{K}_1$ vier aufeinanderfolgende Punkte gemein hat, ausserhalb der Curve $\mathfrak{K}_1$; nach § 13 Nr. 2 müsste also längs des Bogens $O_1CO_2$ beim Uebergang eines Punktes $V$ von aussen nach innen die Anzahl der durch $V$ gehenden Kegelschnitte des Systems sich um zwei vermindern. Dies ist aber nach den obigen speciellen Entwicklungen in der That der Fall; denn der Punkt $C$ liegt, wie die ganze Curve $\mathfrak{L}$ ausser dem Punkte $D$, ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}_2$; dasselbe gilt also von dem ganzen Bogen $O_1CO_2$, da die Curven $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ausser $O_1$ und $O_2$ keine Punkte gemein haben. Daraus aber folgt auf Grund des in Nr. 5 erhaltenen Resultats, dass der äussere Rand des Bogens $O_1CO_2$ zweifach, der innere gar nicht von den Kegelschnitten des Systems bedeckt ist. — Ebenso leicht bestätigt sich der in § 13 Nr. 2 aufgestellte Satz an den übrigen von $O_1$ und $O_2$ begrenzten Bögen der Curven $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$.

Breslau, November 1887.

# Ueber einige mit der dyadischen Schreibweise der ganzen Zahlen zusammenhängende arithmetische Sätze.

Von

Oskar Simony in Wien.

Schreibt man die Reihe der natürlichen Zahlen dyadisch mit den beiden Zeichen: 1, 0 und ersetzt jede Gruppe gleicher Zeichen durch ein einziges gleichartiges Zeichen mit einem deren Anzahl ausdrückenden Exponenten, so sind alle ungeraden Zahlen als Specialisirungen des symbolischen Productes:

$$1^{c_1}0^{c_2}1^{c_3}\cdots 0^{c_{2q-2}}1^{c_{2q-1}} = D \tag{1}$$

und sämmtliche geraden Zahlen als solche des analogen Ausdruckes:

$$1^{c_1}0^{c_2}\cdots 1^{c_{2q-1}}0^{c_{2q}} = \overline{D} \tag{2}$$

darstellbar. Beide Zahlensymbole mögen in der Folge durchgängig als *dyadische Producte* bezeichnet werden.

Auf Grundlage dieser Schreibweise zerfallen sowohl die ungeraden als auch die geraden Zahlen in Zahlen erster, zweiter, ... $r^{ter}$ ... Ordnung:

$$D_1,\ D_2,\ \ldots D_r\ldots;\ \overline{D}_1,\ \overline{D}_2,\ldots \overline{D}_r\ldots,$$

deren Definitionen nach Einführung der generellen Abkürzung:

$$c_k + c_{k+1} + c_{k+2} + \cdots + c_{2r-1} = s_k$$

durch die Gleichungssysteme:

$$\begin{cases} D_1 = 1^{c_1} = 2^{c_1-1} + 2^{c_1-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^{c_1} - 1, \\ D_2 = 1^{c_1}0^{c_2}1^{c_3} = 2^{c_1+c_2+c_3} - 2^{c_2+c_3} + 2^{c_3} - 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_r = 1^{c_1}0^{c_2}1^{c_3}\cdots 0^{c_{2r-2}}1^{c_{2r-1}} \\ \quad = 2^{s_1} - 2^{s_2} + 2^{s_3} - \cdots + 2^{s_{2r-1}} - 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \overline{D}_1 = 1^{c_1}0^{c_2} = 2^{c_2}D_1, \quad \overline{D}_2 = 1^{c_1}0^{c_2}1^{c_3}0^{c_4} = 2^{c_4}D_2, \cdots \\ \overline{D}_r = 1^{c_1}0^{c_2}\cdots 1^{c_{2r-1}}0^{c_{2r}} = 2^{c_{2r}}D_r \cdots \end{cases} \tag{4}$$

gegeben werden. Eine Vertauschung von $r$ mit $r+1$ in $D_r$ und $\overline{D}_r$ vermittelt dann, da der Ausdruck:

$$2^{c_1+\cdots+c_{2r+1}} - 2^{c_2+\cdots+c_{2r+1}} + 2^{c_3+\cdots+c_{2r+1}} - \ldots$$
$$+ 2^{c_{2r-1}+c_{2r}+c_{2r+1}} - 2^{c_{2r}+c_{2r+1}} + 2^{c_{2r+1}} - 1$$

offenbar mit dem folgenden:

$$2^{c_{2r}+c_{2r+1}}(2^{e_1} - 2^{e_2} + \cdots + 2^{e_{2r-1}} - 1) + 2^{c_{2r+1}} - 1$$

identisch ist, die einfachen Recursionsformeln:

$$D_{r+1} = 2^{c_{2r}+c_{2r+1}} D_r + 2^{c_{2r+1}} - 1, \tag{5}$$

$$\overline{D}_{r+1} = 2^{c_{2r}+2}\{2^{c_{2r+1}}(\overline{D}_r + 1) - 1\}, \tag{6}$$

welche insoferne theoretisch wichtig sind, als sie vollständige Inductionen von Zahlen $r^{\text{ter}}$ auf solche $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ermöglichen.

Dies vorausgeschickt wollen wir zunächst den eigenthümlichen Zusammenhang präcisiren, welcher zwischen den Zahlen:

$$D_1, D_2, \ldots D_r \ldots$$

hinsichtlich ihrer Darstellbarkeit in einer der Formen: $3l$, $6l-1$, $6l+1$ und den Nennern jener gemeinen Brüche besteht, welche die aus den Exponenten von $D_1, D_2, \ldots D_r \ldots$ gebildeten Kettenbrüche:

$$\frac{1}{c_1}, \quad \frac{1}{c_1 + \dfrac{1}{c_2 + \dfrac{1}{c_3}}}, \quad \cdots \quad \frac{1}{c_1 + \dfrac{1}{c_2 + \ddots + \dfrac{1}{c_{2r-1}}}} \quad \cdots$$

liefern. Hiebei betrachten wir die letzteren am zweckmässigsten als Specialisirungen eines und desselben schematischen Kettenbruches:

$$I = \frac{1}{c_1 + \dfrac{1}{c_2 + \ddots}} \text{ in inf.} \tag{7}$$

und coordiniren den Nennern seiner successiven Näherungsbrüche:

$$N_1 = c_1, \quad N_2 = c_1 c_2 + 1, \quad N_3 = c_1 c_2 c_3 + c_1 + c_3 \cdots$$

für alle denkbaren Werthe von $c_1, c_2, c_3, \ldots$ die beiden fictiven Gleichungen:

$$N_{-1} = 0, \quad N_0 = +1, \tag{8}$$

um die bekannte Relation zwischen je drei aufeinanderfolgenden Nennern:

$$N_p = c_p N_{p-1} + N_{p-2}$$

auch für $p = 1$ aufrecht erhalten zu können. Es sind dann

$$N_1, N_3, \ldots N_{2r-1} \ldots$$

zugleich die Nenner jener gemeinen Brüche, welche mit den charakteristischen Kettenbrüchen von $D_1, D_2, \ldots D_r \ldots$ gleichwerthig sind,

während die Nenner der ihnen zunächst kommenden Näherungsbrüche mit: $N_0, N_2, \ldots N_{2r-2} \ldots$ zusammenfallen.

Nach Einführung des schematischen Kettenbruches $I$ lässt sich vorerst die specielle Aufgabe, die in Betracht gezogenen Formen von $D_1, D_2$ mit den Nennern: $N_1, N_2, N_3$ durch bestimmte Regeln zu verknüpfen, mit Hülfe der elementaren Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{1}{3}(2^{2k-1}+1) = 1 + 2\{1 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2(k-2)}\}, \\ \frac{1}{3}(2^{2k} - 1) = 1 + 2^2\{1 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2(k-2)}\} \end{cases}$$

leicht erledigen.

Indem wir zunächst die zweite Formel in (9) auf die, den zwei möglichen Fällen: $c_1 = 2m$, $c_1 = 2m - 1$ zugehörigen Darstellungen von $D_1$:

$$D_1 = 2^{2m} - 1, \quad D_1 = 2\{2^{2(m-1)} - 1\} + 1$$

anwenden, resultirt unmittelbar der Satz, dass eine ungerade Zahl *erster Ordnung* bei geradem $N_1$ ein Vielfaches von 3 ist, dagegen bei ungeradem $N_1$ die Gestalt: $6l + 1$ besitzt.

Fast ebenso einfach gestaltet sich auf Grundlage beider Formeln (9) die Feststellung analoger Regeln für $D_2$, obgleich die hier in Betracht kommenden Nenner: $N_2, N_3$ im Ganzen drei Variable: $c_1, c_2, c_3$ enthalten, von welchen jede sowohl eine ungerade als eine gerade Zahl vorstellen kann. Wie nämlich aus dem nachstehenden Schema:

| Fall | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $N_2$ | $N_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(a)$ | $2m$ | $2n$ | $2p$ | ungerade | gerade |
| $(b)$ | „ | „ | $2p-1$ | „ | ungerade |
| $(c)$ | „ | $2n-1$ | $2p$ | „ | gerade |
| $(d)$ | „ | „ | $2p-1$ | „ | ungerade |
| $(e)$ | $2m-1$ | $2n$ | $2p$ | „ | „ |
| $(f)$ | „ | „ | $2p-1$ | „ | gerade |
| $(g)$ | „ | $2n-1$ | $2p$ | gerade | ungerade |
| $(h)$ | „ | „ | $2p-1$ | „ | „ |

ersichtlich wird, liefern die acht für $c_1, c_2, c_3$ denkbaren Fälle nur drei correspondirende Combinationen möglicher Zahlenformen für $N_2$, $N_3$, welchen umgekehrt folgende Fälle und Darstellungen von $D_2$ entsprechen:

Erste Combination: $N_3$ gerade, $N_2$ ungerade.

$$(a),\ (c)\ldots D_2 = 2^{c_1+c_2}(2^{c_1}-1)+(2^{c_2}-1),$$
$$(f)\ldots D_2 = 2^{c_2}(2^{c_1+c_2}+1)-(2^{c_1+c_2}+1).$$

Zweite Combination: $N_3$ ungerade, $N_2$ gerade.

$$(g),\ (h)\ldots D_2 = 2^{c_2}\{(2^{c_1+c_2}-1)-2(2^{c_2-1}-1)\}-1.$$

Dritte Combination: $N_3$, $N_2$ ungerade.

$$(b),\ (d)\ldots D_2 = 2^{c_1+c_2}(2^{c_1}-1)+2(2^{c_2-1}-1)+1,$$
$$(e)\ldots D_2 = 2^{c_2}(2^{c_1+c_2}+1)-2(2^{c_1+c_2-1}+1)+1.$$

Auf diese Art besteht für eine ungerade Zahl *zweiter Ordnung*, je nachdem die Formen der betreffenden Werthe von $N_3$, $N_2$ unter das erste, zweite oder dritte Formensystem zu bringen sind, die Congruenz:

$$D_2 \equiv 0 \pmod 3$$
resp. $$D_2+1 \equiv 0 \pmod 6$$
beziehungsweise: $$D_2-1 \equiv 0 \pmod 6,$$

womit die uns gestellte specielle Aufgabe gelöst, und zugleich folgender unvollständiger Inductionsschluss nahegelegt ist:

*Jede ungerade Zahl $r^{ter}$ Ordnung: $D_r$, bei welcher die Verwandlung des aus ihren Exponenten: $c_1, c_2, \ldots c_{2r-1}$ gebildeten Kettenbruches in einen gemeinen Bruch für dessen Nenner: $N_{2r-1}$ eine gerade Zahl liefert, ist durch 3 ohne Rest theilbar; dagegen besitzt $D_r$ die Form $6l-1$ oder $6l+1$, je nachdem $N_{2r-2}$ bei ungeradem $N_{2r-1}$ gerade oder ungerade ist.*

Der vorstehende Inductionsschluss umfasst, da die Nenner: $N_{2r-1}$, $N_{2r-2}$ zufolge der generellen Relation zwischen $N_p$, $N_{p-1}$, $N_{p-2}$ keinen gemeinsamen Factor besitzen können, sämmtliche denkbare Formensysteme von $N_{2r-1}$, $N_{2r-2}$ und darf unbedingt als allgemein richtig betrachtet werden, sobald ein Uebergang von Zahlen $r^{ter}$ zu solchen $(r+1)^{ter}$ Ordnung unter Voraussetzung seiner Gültigkeit für $D_r$ jene für $D_{r+1}$ zur nothwendigen Folge hat.

Der gewünschte Nachweis fordert in Hinblick darauf, dass die charakteristischen Nenner: $N_{2r}$, $N_{2r+1}$ jeder ungeraden Zahl $(r+1)^{ter}$ Ordnung als Functionen von vier unabhängigen Variabeln:

$$c_{2r},\ c_{2r+1};\ N_{2r-2},\ N_{2r-1}$$

aufzufassen sind, und jede der vier Formengruppen von $c_{2r}$, $c_{2r+1}$ mit jedem der drei möglichen Formensysteme von $N_{2r-2}$, $N_{2r-1}$ combinirt werden kann, eine Unterscheidung von zwölf Fällen:

| Fall | $N_{2r-2}$ | $N_{2r-1}$ | $c_{2r}$ | $c_{2r+1}$ | $N_{2r}$ | $N_{2r+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (*I*) | $2m-1$ | $2n$ | $2p$ | $2q$ | ungerade | gerade |
| (*II*) | „ | „ | „ | $2q-1$ | „ | ungerade |
| (*III*) | „ | „ | $2p-1$ | $2q$ | „ | gerade |
| (*IV*) | „ | „ | „ | $2q-1$ | „ | ungerade |
| (*V*) | $2m$ | $2n-1$ | $2p$ | $2q$ | gerade | „ |
| (*VI*) | „ | „ | „ | $2q-1$ | „ | „ |
| (*VII*) | „ | „ | $2p-1$ | $2q$ | ungerade | „ |
| (*VIII*) | „ | „ | „ | $2q-1$ | „ | gerade |
| (*IX*) | $2m-1$ | „ | $2p$ | $2q$ | „ | ungerade |
| (*X*) | „ | „ | „ | $2q-1$ | „ | gerade |
| (*XI*) | „ | „ | $2p-1$ | $2q$ | gerade | ungerade |
| (*XII*) | „ | „ | „ | $2q-1$ | „ | „ |

Substituiren wir hierauf gemäss den zwischen $D_r$ und $N_{2r-1}$, $N_{2r-2}$ angenommenen Beziehungen in der allgemeinen Recursionsformel (5) für $D_r$ in den Fällen:

$$\begin{array}{ccc} (I)-(IV), & (V)-(VIII), & (IX)-(XII): \\ 3l, & 6l-1, & 6l+1, \end{array}$$

so ergeben sich für $D_{r+1}$ im Ganzen acht Transformationsgleichungen, welche mit den drei für $N_{2r}$, $N_{2r+1}$ resultirenden Formensystemen durch das Schema:

(A) $N_{2r+1}$ gerade, $N_{2r}$ ungerade.

$$\begin{aligned} (I),(III)\ldots D_{r+1} &= (3l)2^{c_{2r}+c_{2r+1}} + (2^{c_{2r+1}}-1), \\ (VIII)\ldots D_{r+1} &= (6l)2^{c_{2r}+c_{2r+1}} - (2^{c_{2r}+c_{2r+1}}-1) + 2(2^{c_{2r+1}-1}-1), \\ (X)\ldots D_{r+1} &= (6l)2^{c_{2r}+c_{2r+1}} + (2^{c_{2r}+c_{2r+1}}+1) + 2(2^{c_{2r+1}-1}-1). \end{aligned}$$

(B) $N_{2r+1}$ ungerade, $N_{2r}$ gerade.

$$\begin{aligned} (V),(VI)\ldots D_{r+1} &= 2^{c_{2r+1}}\{(6l)2^{c_{2r}} - (2^{c_{2r}}-1)\} - 1, \\ (XI),(XII)\ldots D_{r+1} &= 2^{c_{2r+1}}\{(6l)2^{c_{2r}} + (2^{c_{2r}}+1)\} - 1. \end{aligned}$$

(C) $N_{2r+1}$, $N_{2r}$ ungerade.

$$\begin{aligned} (II),(IV)\ldots D_{r+1} &= (3l)2^{c_{2r}+c_{2r+1}} + 2(2^{c_{2r+1}-1}-1) + 1, \\ (VII)\ldots D_{r+1} &= (6l)2^{c_{2r}+c_{2r+1}} - 4(2^{c_{2r}+c_{2r+1}-2}+1) \\ &\quad + 2(2^{c_{2r+1}-1}+1) + 1, \end{aligned}$$

$$(IX) \ldots D_{r-1} = (6l)^{2^{2r}-2^{2r+1}} + 4\,(2^{2^{2r}+2^{2r+1}-2} - 1)^{2} + 2\,(2^{2^{2r+1}-1}+1) + 1$$

verknüpft erscheinen. Dasselbe begründet vermöge der Gleichungen (9) seinerseits die Congruenzen:

$$(A) \ldots D_{r-1} \equiv 0 \pmod 3,$$
$$(B) \ldots D_{r+1} + 1 \equiv 0 \pmod 6,$$
$$(C) \ldots D_{r+1} - 1 \equiv 0 \pmod 6,$$

deren Specialisirungen für $r = 1$ direct mit den auf $D_2$ bezüglichen Congruenzen zusammenfallen, vermittelt also zugleich die allgemeinste mathematische Darstellung der drei Gesetze, welche den Inhalt des in Frage stehenden Inductionsschlusses bilden. Seine Umkehrung liefert den nachstehenden arithmetischen Satz:

(I) *Bildet man* — unter $N$ irgend eine die Einheit überschreitende ungerade Zahl verstanden — *mit allen zwischen* 0 *und* $N$ *vorhandenen relativen Primzahlen zu* $N$:

$$1,\ N-1;\ \cdots\ \varrho,\ N-\varrho;\ \cdots\ \tfrac{1}{2}(N-1),\ \tfrac{1}{2}(N+1)$$

*als Zählern die Quotienten:*

$$\frac{1}{N},\ \frac{N-1}{N};\ \cdots\ \frac{\varrho}{N},\ \frac{N-\varrho}{N};\ \cdots\ \frac{N-1}{2N},\ \frac{N+1}{2N},$$

*und verwandelt die letzteren in Kettenbrüche von der Form:*

$$\frac{1}{c_1+}\,\frac{1}{c_2+}\,\cdots\,+\frac{1}{c_p},$$

*so machen die Theilnenner jedes solchen Kettenbruches bei ungeradem* $p$ *das erste, bei geradem* $p$ *das zweite der beiden dyadischen Producte:*

$$(10) \qquad \begin{cases} D' = 1^{c_1}0^{c_2}1^{c_3}\ldots 0^{c_{p-1}}1^{c_p}, \\ D'' = 1^{c_1}0^{c_2}1^{c_3}\ldots 0^{c_{p-1}}1 \end{cases}$$

*zu einer durch* 3 *untheilbaren Zahl, welche die Form:* $6l-1$ *oder* $6l+1$ *besitzt, je nachdem der Nenner:* $\bar{N}$ *des dem Erzeugungsbruche zunächst kommenden Näherungsbruches gerade oder ungerade ist.*

An diesen Satz schliesst sich unmittelbar die Frage, *wie viele* Zahlen von der Form $6l-1$ resp. $6l+1$ einer und derselben ungeraden Zahl $N$ durch den Algorithmus (I) zugeordnet werden.

Bei ihrer Beantwortung unterscheiden wir vorläufig ebenfalls zwischen ungeraden und geraden Specialisirungen von $p$ und bezeichnen die Summe:

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_{p-1} + c_p$$

der Kürze wegen in beiden Fällen mit $s$. Identificiren wir dann die aufeinanderfolgenden Summanden von $s$ allgemein mit den Theilnennern des aus $\frac{\varrho}{N}$ hervorgehenden Kettenbruches, so sind jene des aus $\frac{N-\varrho}{N}$ entspringenden Kettenbruches bekanntlich:

$$1,\ c_1 - 1,\ c_2, \cdots c_{p-1},\ c_p$$

wonach die den angeführten Quotienten für $p = 2q - 1$ resp. $p = 2q$ zugeordneten Zahlen $D_I'$, $D_I''$; $D_{II}'$, $D_{II}''$ kraft der Definitionsgleichung von $D_r$ die Werthe:

$$D_I' = 1^{c_1}0^{c_2}1^{c_3} \cdots 0^{c_{2q-2}}1^{c_{2q-1}} = 2^s - 2^{s-c_1} + 2^{s-c_1-c_2} - \cdots$$
$$- 2^{c_{2q-2}+c_{2q-1}} + 2^{c_{2q-1}} - 1,$$

$$D_I'' = 1\,0^{c_1-1}1^{c_2}0^{c_3} \cdots 1^{c_{2q-2}}0^{c_{2q-1}-1}1 = 2^s - 2^{s-1} + 2^{s-c_1}$$
$$- 2^{s-c_1\ c_2} + \cdots + 2^{c_{2q-2}+c_{2q-1}} - 2^{c_{2q-1}} + 2^1 - 1;$$

$$D_{II}' = 1^{c_1}0^{c_2} \cdots 1^{c_{2q-1}}0^{c_{2q}-1}1 = 2^s - 2^{s-c_1} + 2^{s-c_1-c_2} - \cdots$$
$$+ 2^{c_{2q-1}+c_{2q}} - 2^{c_{2q}} + 2^1 - 1,$$

$$D_{II}'' = 1\,0^{c_1-1}1^{c_2} \cdots 0^{c_{2q-1}}1^{c_{2q}} = 2^s - 2^{s-1} + 2^{s-c_1}$$
$$- 2^{s-c_1-c_2} + \cdots - 2^{c_{2q-1}+c_{2q}} + 2^{c_{2q}} - 1$$

erhalten. Es ist also für beide Fälle:

$$D_I' + D_I'' = D_{II}' + D_{II}'' = 3(2^{s-1}), \tag{11}$$

welche Relation, je nachdem sich die zu $\frac{\varrho}{N}$ gehörige Zahl unter die Form: $6l - 1$ oder $6l + 1$ bringen lässt, dem Quotienten $\frac{N-\varrho}{N}$ entweder die Zahl:

$$6(2^{s-2} - l) + 1$$

oder:

$$6(2^{s-2} - l) - 1$$

zuordnet und daher im Vereine mit der bekannten Formel für die Anzahl der zu $N$ relativen Primzahlen folgende Erledigung der gestellten Frage begründet:

(II) *Enthält die ungerade Zahl $N$ allgemein die Primfactoren:*

$$p_1 = 2l_1 + 1,\ p_2 = 2l_2 + 1, \ldots p_n = 2l_n + 1$$

*$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$-mal, so werden derselben durch den Algorithmus* (I) *im Ganzen:*

$$2^{n-1}l_1 l_2 \ldots l_n(2l_1+1)^{\alpha_1-1}(2l_2+1)^{\alpha_2-1} \ldots (2l_n+1)^{\alpha_n-1} = M$$

*Zahlen von der Gestalt $6l - 1$ und ebensoviele von der Form $6l + 1$ zugeordnet.*

Anderseits lässt sich $N$ auch als *erzeugende* Zahl ihrer zugeordneten Zahlen betrachten und in diesem Sinne die Frage discutiren,

zwischen welchen *Grenzen* die erzeugenden Zahlen aller Zahlen von der Gestalt $6l \pm 1$ liegen, welche — unter $m$ eine der Bedingung: $3 \leqq m < \infty$ genügende ganze Zahl verstanden — grösser als $2^{m-1}$ aber kleiner als $2^m$ sind.

Wir gehen hiebei von der Bemerkung aus, dass die charakteristischen Kettenbrüche sämmtlicher in dem angeführten Intervalle enthaltenen Zahlen *dieselbe Theilnennersumme* $m$ besitzen. Sobald sich demnach die untere und obere Grenze für die Nenner jener gemeinen Brüche ermitteln lassen, welche aus der Verwandlung aller Kettenbrüche mit den Theilnennern $c_1, c_2, \ldots c_n$ in gemeine Brüche bei *constanter Theilnennersumme:*

$$m = c_1 + c_2 + \cdots + c_{r-1} + c_r + c_{r+1} + \cdots + c_n$$

für eine *veränderliche Gliederzahl* und *veränderliche Theilnenner* hervorgehen, ist auch die Grundlage für die Erledigung der vorgelegten Frage gegeben.

Die zunächst geforderte Grenzbestimmung stützt sich ihrerseits auf gewisse Gleichungen, zu deren übersichtlicher Formulirung sich speciell die Nenner:

$$(N_1), (N_2), \ldots (N_{n-r}); \quad \{N_1\}, \{N_2\}, \ldots \{N_{n-r-1}\};$$
$$[N_1], [N_2], \ldots [N_{n-r-2}]$$

der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche dreier, dem schematischen Kettenbruche $I$ entnommene Kettenbrüche $K', K'', K'''$ mit den Theilnennern:

$$c_{r+1} - 1, c_{r+2}, c_{r+3}, \ldots c_n; \; c_{r+2}, c_{r+3}, \ldots c_n; \; c_{r+3}, c_{r+4}, \ldots c_n$$

am besten eignen. Leitet man nämlich aus dem gegebenen $n$-gliedrigen Kettenbruche zwei neue Kettenbrüche ab, von welchen der erste die $(n-1)$ Theilnenner:

$$c_1, c_2, \ldots c_{r-1}, c_r + c_{r+1}, c_{r+2}, c_{r+3}, \ldots c_n,$$

der zweite die $(n+1)$ Theilnenner:

$$c_1, c_2, \ldots c_{r-1}, c_r - 1, 1, c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots c_n$$

besitzt, so lassen sich für beide Kettenbrüche die Nenner ihrer successiven Näherungsbrüche:

$$N_1', N_2', \ldots N_{r-1}', N_r', N_{r+1}', N_{r+2}', \ldots N_{n-1}';$$
$$N_1'', N_2'', \ldots N_{r-1}'', N_r'', N_{r+1}'', N_{r+2}'', \ldots N_{n+1}''$$

in einfacher Weise durch die Nenner $N_1, N_2, \ldots N_n$ und jene der Näherungsbrüche von $K', K'', K'''$ ausdrücken, womit zugleich die für unsere nächsten Betrachtungen unentbehrlichen Fundamentalformeln gewonnen werden.

Da übrigens zur Ableitung der letzteren — abgesehen von einigen

naheliegenden Umformungen — nur eine wiederholte Anwendung der drei unmittelbar einleuchtenden Relationen:

$$(N_p) = c_{r+p}(N_{p-1}) + (N_{p-2}), \quad \{N_p\} = c_{r+p+1}\{N_{p-1}\} + \{N_{p-2}\},$$
$$[N_p] = c_{r+p+2}[N_{p-1}] + [N_{p-2}]$$

erforderlich ist, beschränken wir uns hier auf die Angabe der diesbezüglichen Resultate, welche nach Einführung der Abkürzungen:

$$N_r - N_{r-1} = N_{r-2} + (c_r - 1)N_{r-1} = \Delta',$$
$$N_r - 2N_{r-1} = N_{r-2} + (c_r - 2)N_{r-1} = \Delta''$$

die nachstehende schematische Darstellungsweise gestatten:

$$N_q' = N_q \quad | \quad q = 1, 2, 3, \ldots r-1.$$

| $c_{r+1} > 1$: | $c_{r+1} = 1$: |
|---|---|
| $N_r' = N_{r+1} - \Delta'(N_1)$, | $N_r' = N_{r+1}$, $N_{r+1}' = N_{r+2} - \Delta'$, |
| $N_{r+1}' = N_{r+2} - \Delta'(N_2)$, | $N_{r+2}' = N_{r+3} - \Delta'[N_1]$, |
| . . . . . | . . . . . |
| $N_{r+k}' = N_{r+k+1} - \Delta'(N_{k+1})$, | $N_{r+k}' = N_{r+k+1} - \Delta'[N_{k-1}]$, |
| . . . . . | . . . . . |

$$N_q'' = N_q \quad | \quad q = 1, 2, 3, \ldots r-1.$$

$$N_r'' = N_r - N_{r-1}, \; N_{r+1}'' = N_r, \; N_{r+2}'' = N_{r+1} + \Delta'',$$
$$N_{r+3}'' = N_{r+2} + \Delta''\{N_1\}, \ldots N_{r+k}'' = N_{r+k-1} + \Delta''\{N_{k-2}\},$$
. . . . . .

und daher für die Nenner $N_{n-1}'$, $N_{n+1}''$ der, dem $(n-1)$-gliedrigen resp. $(n+1)$-gliedrigen Kettenbruche äquivalenten gemeinen Brüche allgemein die Werthe:

(12) $N_{n-1}' = N_n - \Delta'(N_{n-r})$ für $c_{r+1} > 1$,

(13) $N_{n-1}' = N_n - \Delta'[N_{n-r-2}]$ für $c_{r+1} = 1$,

(14) $N_{n+1}'' = N_n + \Delta''\{N_{n-r-1}\}$

liefern. Eine Charakteristik der Grössenverhältnisse von $N_{n-1}'$ und $N_{n+1}''$ zu $N_n$ erfordert demnach nur die Feststellung der Bedingungen für das *Verschwinden* der drei Producte:

$$\Delta'(N_{n-r}), \quad \Delta'[N_{n-r-2}], \quad \Delta''\{N_{n-r-1}\},$$

indem zufolge der Unzulässigkeit negativer Theilnenner keine einzige der Grössen $N$, $(N)$, $\{N\}$ und $[N]$ negativ werden kann. Aus demselben Grunde zerfallen hierbei die Forderungen $\Delta' = 0$, $\Delta'' = 0$ in je zwei Gleichungen:

$$N_{r-2} = 0, \quad (c_r - 1)N_{r-1} = 0;$$
$$N_{r-2} = 0, \quad (c_r - 2)N_{r-1} = 0,$$

welche, da $N_{r-2}$ ausschliesslich durch Coincidenz mit $N_{-1}$ gleich Null wird, offenbar mit den folgenden:

$$r = 1,\ (c_1 - 1)N_0 = c_1 - 1 = 0;\quad r = 1,\ c_1 - 2 = 0$$

identisch sind. Unter Hinzuziehung der dem Nenner $N_{-1}$ correspondirenden fictiven Nenner:

$$(N_{-1}) = [N_{-1}] = \{N_{-1}\} = 0$$

gestatten ferner die Bedingungen:

$$(N_{n-r}) = 0,\ [N_{n-r-2}] = 0,\quad \{N_{n-r-1}\} = 0$$

die Schreibweise:

$$(N_{n-r}) = (N_{-1}),\quad [N_{n-r-2}] = [N_{-1}],\quad \{N_{n-r-1}\} = \{N_{-1}\},$$

lassen sich also gleichfalls nur durch *je eine* Substitution für $r$ befriedigen. Die erste derselben $r = n + 1$ steht ausser jeder Beziehung zum Kettenbruche $K'$, weil dessen Theilnenner mit $c_n$ abbrechen; die zweite Substitution $r = n - 1$ gilt entsprechend der Gleichung (13) lediglich für $c_{r+1} = c_n = 1$, und nur die dritte $r = n$ bleibt auf jede, die Einheit überschreitende Specialisirung von $c_n$ anwendbar.

Auf solche Art drücken die allgemeinen Relationen (12), (13), (14) im Vereine mit ihren hier gegebenen näheren Bestimmungen folgende Sätze aus:

a) Addirt man in einem $n$-gliedrigen Kettenbruche mit den Theilnennern $c_1, c_2, \ldots c_n$ zwei beliebige *unmittelbar aufeinanderfolgende* Theilnenner $c_r, c_{r+1}$, so ist der Nenner $N'_{n-1}$ des, dem neuen $(n-1)$-gliedrigen Kettenbruche gleichwerthigen gemeinen Bruches nur dann gleich $N_n$, falls für $c_1 = 1$ die ersten beiden Glieder beziehungsweise für $c_n = 1$ die letzten zwei Theilnenner summirt werden, *während* $N'_{n-1}$ *in allen übrigen Fällen kleiner als* $N_n$ *bleibt.*

b) Zerlegt man in demselben Kettenbruche irgend einen Theilnenner $c_r$ in zwei neue Theilnenner $c_r - 1, 1$, so ist der Nenner $N''_{n+1}$ des, dem neuen $(n+1)$-gliedrigen Kettenbruche entsprechenden gemeinen Bruches nur dann gleich $N_n$, falls für $c_1 = 2$ das erste Glied oder allgemein für $c_n > 1$ der letzte Theilnenner in der angegebenen Weise zerlegt wird, *während* $N''_{n+1}$ *in allen übrigen Fällen grösser als* $N_n$ *bleibt.*

Der in a) geschilderte Process lässt sich natürlich auf den zunächst erhaltenen $(n-1)$-gliedrigen Kettenbruch neuerdings anwenden und erscheint erst beendigt, wenn *sämmtliche* Theilnenner des ursprünglichen Kettenbruches zu einer einzigen Summe vereinigt sind, deren Werth augenscheinlich mit $m$ übereinstimmt. Desgleichen findet die fortgesetzte Wiederholung des Processes b) ihren Abschluss, sobald ein Kettenbruch mit lauter, der *Einheit* gleichen Theilnennern hergestellt ist, deren *Anzahl* dann offenbar mit $m$ zusammenfällt. Indem

wir also jetzt noch berücksichtigen, dass der $m^{te}$ Näherungsbruch des schematischen Kettenbruches $I$ für $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = \cdots c_m = 1$ — unter $\alpha$, $\beta$ die beiden irrationalen Zahlen:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{15}$$

verstanden — gemäss einer bekannten Formel allgemein den Nenner:

$$e_m = \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\sqrt{5}} \tag{16}$$

besitzt, resultirt folgender, eine *allgemeine* Erledigung des vorgelegten Problems ermöglichende Satz:

c) *Verwandelt man sämmtliche Kettenbrüche von gleicher Theilnennersumme m in gemeine Brüche, so liegen die Nenner der letzteren ausnahmslos zwischen den Grenzen* $m - 1$ *und* $e_m + 1$.

Die weitere Verwerthungsweise dieses Satzes erscheint durch die Ueberlegung bestimmt, dass speciell den charakteristischen Kettenbrüchen aller $m$-stelligen dyadischen Zahlen von der Gestalt $6l \pm 1$ gemäss unseren früheren Ergebnissen lauter gemeine Brüche mit *ungeraden* Nennern entsprechen. Es sind mithin auch der *kleinste* und *grösste* Nenner für alle derartigen Brüche ungerade, so dass für gerade Werthe von $m$ beziehungsweise von $e_m$ noch eine engere Grenzbestimmung jener Nenner nöthig wird.

Um jedoch unsere diesbezüglichen Untersuchungen richtig formuliren zu können, bedürfen wir vorerst der Kenntniss eines wesentlichen Merkmales jener Werthreihe:

$$1, 1, 2; \ 3, 5, 8; \ 13, 21, 34; \ldots$$

welche kraft (16) die aufeinanderfolgenden Specialisirungen von $e_m : e_0, e_1, e_2, \ldots$ darstellt. Dasselbe findet seinen mathematischen Ausdruck in den Gleichungen:

$$e_{3n} = 2p - 1, \ e_{3n+1} = 2q - 1, \ e_{3n+2} = 2r \tag{17}$$

und gilt augenscheinlich von $n = 0$ bis $n = \infty$, indem aus (17) für die nächsten drei Reihenglieder die analogen Gleichungen:

$$e_{3n+3} = 2(q+r) - 1, \quad e_{3n+4} = 2(q+2r) - 1,$$
$$e_{3n+5} = 2(2q+3r-1)$$

hervorgehen. — Dies vorausgeschickt, ergiebt sich die in Frage stehende Grenzbestimmung auf Grundlage der Sätze a) und b) aus der Lösung der beiden Aufgaben:

$\alpha$) Es sind unter allen *zweigliedrigen* Kettenbrüchen von gleicher Theilnennersumme $m$ diejenigen zu ermitteln, deren erzeugende Brüche den *kleinsten ungeraden Nenner* besitzen.

$\beta$) Es sind unter sämmtlichen $(m-1)$-gliedrigen Kettenbrüchen

von gleicher Theilnennersumme $m$ diejenigen anzugeben, deren erzeugenden Brüchen speciell für $m = 3n + 2$ der *grösste ungerade Nenner* zukommt.

Die Erledigung der ersten Aufgabe kann unmittelbar aus der Thatsache entnommen werden, dass die, den Kettenbrüchen

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{m-x}}, \quad \cfrac{1}{m-x+\cfrac{1}{x}}$$

äquivalenten gemeinen Brüche einen und denselben Nenner:

$$x(m-x)+1 = \tfrac{1}{4}m^2 + 1 - \left(\tfrac{1}{2}m - x\right)^2$$

besitzen, welcher für $x = 1, 2, 3, \cdots \frac{1}{2}m$ die Werthreihe:

$$m,\ 2m-3,\ 3m-8, \cdots \tfrac{1}{4}m^2 + 1$$

durchläuft. Da nämlich ihr zweites Glied bei geradem $m$ zugleich die *kleinste*, dieser Werthreihe angehörige *ungerade* Zahl vorstellt, sind die gesuchten Kettenbrüche*) offenbar:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{m-2}} \quad \text{und} \quad \cfrac{1}{m-2+\cfrac{1}{2}}.$$

Etwas weitläufiger gestaltet sich die Discussion der zweiten Aufgabe, bei welcher wir am zweckmässigsten von der, den Substitutionen

$$n = m;\ c_1 = c_2 = \cdots = c_r = \cdots = c_m = 1$$

correspondirenden Specialform der Relation (13):

$$N'_{m-1} = N_m - N_{r-2}[N_{m-r-2}]$$

ausgehen. Dieselbe liefert, da $N_m$, $N_{r-2}$, $[N_{m-r-2}]$ hier mit $e_m$, $e_{r-2}$, $e_{m-r-2}$ zusammenfallen, für $N'_{m-1}$ ursprünglich die Definitionsgleichung:

$$N'_{m-1} = e_m - e_{r-2}e_{m-r-2}, \tag{18}$$

ist also mit Hilfe der kraft (16) für $e_m$, $e_{r-2}$, $e_{m-r-2}$ bestehenden Ausdrücke in:

$$N'_{m-1} = \tfrac{1}{5}\alpha^{m-2}(\alpha^3\sqrt{5} - 1) - \tfrac{1}{5}\beta^{m-2}(\beta^3\sqrt{5} + 1)$$
$$+ \tfrac{1}{5}(\alpha\beta)^{r-1}(\alpha^{m-2r} + \beta^{m-2r})$$

transformirbar, so dass sich $N'_{m-1}$ nach Einführung der aus (15) entspringenden Beziehungen:

*) Zufolge b) besitzen speciell für $m = 4$ noch zwei dreigliedrige und ein viergliedriger Kettenbruch mit den Theilnennern 1, 1, 2; 2, 1, 1; 1, 1, 1, 1, ferner allgemein für $m > 4$ vier dreigliedrige und zwei viergliedrige Kettenbrüche mit den Theilnennern:

$1, 1, m-2$; $m-2, 1, 1$; $1, m-3, 1$; $1, 1, m-3, 2$; $1, 1, m-3, 1$; $1, m-3, 1, 1$

ebenfalls Erzeugungsbrüche mit dem gemeinsamen Nenner $2m - 3$.

$\alpha\beta = -1$, $\alpha^3\sqrt{5} - 1 = 2(2+\sqrt{5}) = 2\alpha^3$, $\beta^3\sqrt{5} + 1 = -2\beta^3$

auch explicit als Function von $r$:

$$(19) \quad N'_{m-1} = \frac{1}{5}\left\{2(\alpha^{m+1}+\beta^{m+1}) + (-1)^{r-1}(\alpha^{m-2r}+\beta^{m-2r})\right\}$$

definiren lässt, wodurch die Frage nach dem Werthe des *grössten ungeraden Nenners* nunmehr einer directen Beantwortung fähig wird. Gemäss (18) bleiben bei einer Vertauschung von $m$ mit $m-r$ die ursprünglichen Functionswerthe erhalten, d. h. es besitzen die, den verschiedenen $(m-1)$-gliedrigen Kettenbrüchen zugehörigen Erzeugungsbrüche mit den Nennern $N'_{m-1}$ *paarweise gleiche* Nenner. Unter den letzteren ist dann gemäss (19), da $N'_{m-1}$ bei geradem $r$ eine Differenz, bei ungeradem $r$ eine Summe zweier wesentlich positiver Grössen vorstellt, offenbar jener Nenner der grösste, welcher für $r=1$ und $r=m-1$ eintritt. Weil jedoch die, den beiden diesbezüglichen Kettenbrüchen mit den Theilnennern $2, 1, 1, \ldots 1; 1, 1, \ldots 1, 2$ äquivalenten gemeinen Brüche zufolge a) wieder den auszuschliessenden *geraden* Nenner $e_m$ besitzen, liefert erst das nächste Paar ungerader Substitutionen $r=3$, $r=m-3$ jene zwei $(m-1)$-gliedrigen Kettenbrüche*):

$$\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\cdots+\frac{1}{1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+}\cdots+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1},$$

für welche der gemeinsame Nenner ihrer erzeugenden Brüche:

$$e_m - e_{m-5} = e_{3n+2} - e_{3n-3}$$

als Differenz einer geraden und ungeraden Zahl zugleich den *grössten ungeraden* Nenner vorstellt.

Unsere letzten Ergebnisse begründen nunmehr im Vereine mit c) als allgemeine Erledigung der an (II) geknüpften Frage den nachstehenden Satz:

(III) *Sämmtliche von $2^{m-1}$ bis $2^m$ vorkommende Zahlen von der Gestalt $6l \pm 1$ sind ungeraden, zwischen den Grenzen:*

*) Gemäss a) existiren für jede hier in Betracht kommende Specialisirung von $m$ noch vier $(m-2)$-gliedrige und zwei $(m-3)$-gliedrige Kettenbrüche von der gewünschten Beschaffenheit, deren Theilnennern speciell für $m=5$ die Werthreihen:

$$2, 2, 1;\ 1, 1, 3;\ 3, 1, 1;\ 1, 2, 2;\ 2, 3;\ 3, 2,$$

hingegen für $m > 5$ die Werthreihen:

$$2, 2, 1, \ldots 1;\ 1, 1, 2, 1, \ldots 1, 2;\ 2, 1, \ldots 1, 2, 1, 1;\ 1, \ldots 1, 2, 2;$$
$$2, 2, 1, \ldots 1, 2;\ 2, 1, \ldots 1, 2, 2$$

entsprechen.

$$g_0 = \begin{cases} m-1 & m \text{ ungerade} \\ 2(m-2) & m \text{ gerade} \end{cases},$$

$$g_1 = \begin{cases} c_m + 1 \\ c_m - c_{m-5} + 1 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} m = 3n,\ 3n+1 \\ m = 3n+2 \end{matrix}$$

*enthaltenen Zahlen coordinirbar und lassen sich daher mit Hilfe des Algorithmus* (I) *auch umgekehrt aus den, von $g_0$ bis $g_1$ auftretenden ungeraden Zahlen in den Formen der beiden dyadischen Producte $D'$, $D''$ ableiten, womit zugleich alle zwischen $2^{m-1}$ und $2^m$ liegenden Primzahlen gewonnen werden.*

Entsprechend der Thatsache, dass die einer gegebenen ungeraden Zahl $N$ vermöge (I) charakteristischen Kettenbrüche sehr verschiedene Theilnennersummen besitzen können, fallen hiebei die von den Grenzen $g_0$ und $g_1$ umschlossenen Gruppen ungerader Zahlen für die aufeinanderfolgenden Specialisirungen von $m$ theilweise zusammen, wonach zur Gewinnung sämmtlicher zwischen $2^2$ und $2^m$ vorhandenen Zahlen von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ im Allgemeinen stets weniger ungerade Zahlen benöthigt werden, als solche zwischen 2 und $g_1$ vorkommen.*)

Bezeichnen wir also die Anzahl der letzteren mit $A_m$, so besitzen die Quotienten aus der jeweiligen Anzahl der erzeugenden Zahlen und den Anzahlen $\Theta'(2^m)$, $\Theta''(2^m)$ der erzeugten Zahlen von den angeführten Formen die *oberen Grenzen:*

$$\varkappa'_m = \frac{A_m}{\Theta'(2^m)}, \qquad \varkappa''_m = \frac{A_m}{\Theta''(2^m)},$$

welche zufolge der unmittelbar evidenten Gleichheit ihrer Nenner jedesmal einen gemeinsamen Werth $\varkappa_m$ erhalten. Seine allgemeine Definition als Function von $m$ erfordert im Ganzen vier Formeln, da einerseits $A_m$ zwei den beiden Werthformen von $g_1$ entsprechende Darstellungen:

*) Da nämlich die Exponentensummen der dyadischen Producte $D'$, $D''$ für die zwischen $2^2$ und $2^m$ enthaltenen Zahlen von der Gestalt $6l \pm 1$ auf die Werthe $3, 4, \ldots m-1, m$ beschränkt bleiben, fehlen in der Reihe der erzeugenden Zahlen von Fall zu Fall jene, für welche *alle Theilnennersummen* $[m]$ ihrer coordinirten Kettenbrüche *grösser* als $m$ sind. Auf solche Art entstehen die ersten derartigen Lücken für $m = 9, 10, 11$, indem $[m]$ für die coordinirten Kettenbrüche von 51, 53 resp. 77, 83, 85, 87 nicht unter 10 resp. 11, ferner für jene von 113, 125, 127 nicht unter 12 sinkt. Man bedarf daher zunächst in den drei angegebenen Specialfällen nur 25, 40 und 62 ungerade Zahlen, um alle, von 1 bis $2^9$, $2^{10}$, $2^{11}$ [illegible]kommenden Zahlen von der Form $6l \pm 1$ erzeugen zu können. *Ungleich* [illegible]*mhafter* wird die Reihe der erzeugenden Zahlen für grössere Werthe von $m$, [illegible] dass es jedoch vorläufig möglich scheint, die jeweilige Anzahl ihrer übrig [illegible]enden Glieder allgemein in Function von $m$ auszudrücken.

$$(20) \qquad A_m = \begin{cases} \frac{1}{2}(e_m - 1) & m = 3n,\ 3n+1 \\ \frac{1}{2}(e_m - e_{m-5} - 1) & m = 3n+2 \end{cases}$$

besitzt, anderseits der Divisor von $A_m$ gemäss einfachen, an die Relationen (9) anknüpfenden Schlüssen, je nachdem $m$ ungerade oder gerade ist, mit

$$\frac{1}{3}(2^{m-1} - 1) \quad \text{oder} \quad \frac{2}{3}(2^{m-2} - 1)$$

identisch wird. Auf Grundlage dieser Gliederung resultirt für die in Frage stehenden Darstellungen von $\varkappa_m$ nach Einführung der beiden Hülfsfunctionen:

$$\omega'(m) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^m - \frac{1}{2^m},$$

$$\omega''(m) = \frac{3+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^m - \frac{3-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m - \frac{1}{2^m}$$

das viergliedrige Gleichungssystem:

| $m$ ungerade | $m$ gerade |
|---|---|
| $m = \begin{cases} 3n, \\ 3n+1 \end{cases} \cdots \varkappa_m = \frac{3\omega'(m)}{1-2^{1-m}},$ | $m = \begin{cases} 3n, \\ 3n+1 \end{cases} \cdots \varkappa_m = \frac{3\omega'(m)}{1-2^{2-m}},$ |
| $m = 3n+2 \cdots \varkappa_m = \frac{3\omega''(m)}{1-2^{1-m}},$ | $m = 3n+2 \cdots \varkappa_m = \frac{3\omega''(m)}{1-2^{2-m}},$ |

dessen Discussion unter Berücksichtigung der beiden Transformationsgleichungen:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m = e^{-m\log(\sqrt{5}-1)}, \quad \left(\frac{\beta}{2}\right)^m = (-1)^m e^{-m\log(\sqrt{5}+1)}$$

folgenden arithmetischen Satz liefert:

(IV) Dividirt man die Anzahl jener Zahlen, aus welchen alle zwischen $2^2$ und $2^m$ vorhandenen Zahlen von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ ableitbar sind, durch die Anzahlen $\Theta'(2^m)$, $\Theta''(2^m)$ der letzteren, so erhält die *gemeinsame obere Grenze* $\varkappa_m$ beider Quotienten speciell für $m = 3$ und $m = 4$ den Werth 1, *nimmt jedoch bei weiterer Vergrösserung von m mit wachsender Geschwindigkeit ab und verschwindet für* $m = \infty$ *in dem Sinne, dass zugleich mit* $\varkappa_m$ *das Product* $m^p \varkappa_m$ *für jeden positiven endlichen Werth von p gleich Null wird.*

Mit Hilfe des Satzes c) und seiner ergänzenden Zusätze können schliesslich auch noch die *untere* und *obere Grenze* $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$ *für sämmtliche, irgend einer ungeraden Zahl N durch den Algorithmus* (1)

*coordinirbare Primzahlen**) *und zusammengesetzte Zahlen von der Gestalt* $6l \pm 1$ theoretisch festgestellt werden.

Zu diesem Zwecke ist in erster Linie eine allgemeine Auflösung der aus (c) ihren Ursprung nehmenden Gleichungen:

$$e_m = N, \quad e_m - e_{m-5} = N$$

nach $m$ erforderlich, wobei man vier, mit den Constanten

$$\gamma = \frac{1}{\log(1+\sqrt{5}) - \log 2} = 4 \cdot 7849720,$$

$$\delta' = \log(5+\sqrt{5}) - \log 5 = 0 \cdot 1605326,$$

$$\delta'' = \log(20-6\sqrt{5}) - \log 5 = 0 \cdot 1194929$$

versehene Formeln gewinnt, welche sammt ihren Einschränkungen durch das Schema:

$$m = 3n, \quad 3n+1.$$

$$\begin{array}{l|l} m \text{ ungerade} & m_1 = \gamma\{\log(N+\sqrt{N^2+0\cdot 8}) - \delta'\}, \\ m \text{ gerade} & m_2 = \gamma\{\log(N+\sqrt{N^2-0\cdot 8}) - \delta'\}. \end{array}$$

$$m = 3n+2.$$

$$\begin{array}{l|l} m \text{ ungerade} & m_3 = \gamma\{\log(N+\sqrt{N^2+8\cdot 8}) - \delta''\}, \\ m \text{ gerade} & m_4 = \gamma\{\log(N+\sqrt{N^2-8\cdot 8}) - \delta''\} \end{array}$$

darstellbar sind. Die hieraus sich ergebenden Werthe von $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ vermitteln dann ihrerseits die Auffindung von vier, durch die Bedingungen:

$n_1$ die grösste ungerade Zahl von der Form $\left\{\begin{matrix} 3n+1 \\ 3n \end{matrix}\right\} \lessgtr m_1$,

$n_2$ „ „ gerade „ „ „ „ $\left\{\begin{matrix} 3n+1 \\ 3n \end{matrix}\right\} \lessgtr m_2$,

$n_3$ „ „ ungerade „ „ „ „ $3n+2 \lessgtr m_3$,

$n_4$ „ „ gerade „ „ „ „ $3n+2 \lessgtr m_4$

*) Stellt man die von $2^2$ bis $2^{14}$ vorkommenden Primzahlen als *dyadische Producte* dar und verwandelt die aus den Exponenten der letzteren gebildeten Kettenbrüche in gemeine Brüche, deren Nenner dann ihrerseits den Eintheilungsgrund für die Systemisirung jener Primzahlen liefern, so begründet die hiebei erhaltene Tabelle den *Wahrscheinlichkeitsschluss, dass jede der Reihe* 5, 7, 9, 11,... *entnommene Zahl wenigstens drei ihr allein coordinirte Primzahlen besitzt.* Unter diesen Primzahlen kommt speciell den *beiden kleinsten* von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ ausserdem eine *topologische* Bedeutung zu, hinsichtlich welcher vorläufig auf die im 96. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie (p. 191—286) veröffentlichte Abhandlung des Verfassers: *„Ueber den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung"* — verwiesen werden mag. Der Leser findet daselbst (p. 252—272) auch die charakteristischen Exponenten der dyadischen Productdarstellungen für sämmtliche Primzahlen von 5 bis 16381 tabellarisch zusammengestellt.

vollständig gekennzeichneten Hilfszahlen $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$, deren *grösste* von Fall zu Fall jenem Werthe von $m$ gleich ist, für welchen $e_m$ resp. $e_m - e_{m-5}$ mit dem Nenner des, den *charakteristischen Kettenbruch* von $Z^{(0)}$ erzeugenden gemeinen Bruches identisch wird. — Entsprechend der vierfachen Gliederung des Formelsystems von $m$ besitzt also auch $Z^{(0)}$ im Ganzen vier, in dem Schema:

$$m = 3n, \quad 3n+1.$$

| $m$ ungerade | $m$ gerade |
|---|---|
| $Z^{(0)} = \frac{1}{3}(2^{m+1}-1)$, | $Z^{(0)} = \frac{1}{3}(2^{m+1}+1)$. |

$$m = 3n+2.$$

| | |
|---|---|
| $Z^{(0)} = \frac{1}{3}(2^{m+1}-1)-2$, | $Z^{(0)} = \frac{1}{3}(2^{m+1}+1)+2$. |

zusammengefasste Darstellungen, welche für sämmtliche vorkommende Specialisirungen von $N$ eine eindeutige Bestimmung von $Z^{(0)}$ ermöglichen, *jedoch nur ausnahmsweise zugleich die kleinste, $N$ coordinirte Zahl liefern.*

Während auf solche Art die Berechnung des jeweiligen Werthes von $Z^{(0)}$ acht Hilfsgrössen erheischt, kann jener von $Z^{(1)}$ für alle vorkommenden Specialisirungen von $N$ *direct* ermittelt werden. Da nämlich die Theilnennersummen $s$ der den Brüchen:

$$\frac{1}{N}, \frac{N-1}{N}; \ldots \frac{\varrho}{N}, \frac{N-\varrho}{N}; \ldots \frac{N-1}{2N}, \frac{N+1}{2N}$$

gleichwerthigen Kettenbrüche insgesammt der Bedingung $s \lesseqgtr N$ genügen, ist $Z^{(1)}$ stets mit dem *grösseren* der beiden dyadischen Producte $1^N$, $10^{N-2}1$ identisch, d. h.

$$Z^{(1)} = 2^N - 1,$$

welche Formel zugleich die *grösste*, $N$ coordinirte Zahl bestimmt. Dieselbe besitzt gemäss unserer Discussion von $D_1$ regelmässig die Gestalt $6l+1$.

Wien, im November 1887.

# Die Discriminante der Form 7. Grades $f = a_x^7$.

Von

Paul Gordan in Erlangen.

## Einleitung.

Ist $\alpha_x$ Doppelfactor einer binären Form $f = a_x^n$, so bestehen die beiden identischen Gleichungen:

$$(f, \alpha)^{n-1} = 0,$$

d. i.

$$(a\,\alpha)^{n-1} a_1 = 0, \quad \text{und} \quad (a\,\alpha)^{n-1} a_2 = 0.$$

Nach Bézout und Cayley lassen sich aus diesen beiden Gleichungen vom Grade $(n-1)$ in $\alpha$, $(n-1)$ Gleichungen vom Grade $(n-2)$ in $\alpha$ herstellen, welche aus

$$\left[a_x^{n-1} a_1 \cdot b_y^{n-1} b_1 - a_x^{n-1} a_2 \cdot b_y^{n-1} b_1\right]_{\substack{x=\alpha \\ y=x}} = (a\,\alpha)^{n-1} (a\,b)\, b_x^{n-1} = 0$$

dadurch hervorgehen, dass man sie durch $\alpha$ dividirt. Eliminirt man aus ihnen die $(n-1)$ Grössen

$$\alpha_1^{n-2},\ \alpha_1^{n-1}\alpha_2,\ \alpha_1^{n-2}\alpha_2^2,\ \cdots\ \alpha_2^{n-1}$$

so erhält man die Discriminante von $f = a_x^n$, d. i. die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Doppelwurzel von $f$.

Allein auf diesem Wege erhält man die Discriminante in Determinantenform, und nicht, wie es nicht nur übersichtlicher sondern für die meisten Untersuchungen wünschenswerther wäre, in Function der Fundamentalinvarianten von $f$.

Um zu letzterem Resultate zu gelangen bediene ich mich hier wie bei den Formen 4ten, 5ten und 6ten Grades*) folgender Methode. Ich gehe von den sechs Bezout'schen Gleichungen aus und combinire sie durch Ueberschiebungen so, dass ich Relationen 4ten Grades mittelst Division von $\alpha_x$ erhalte. In derselben Weise fahre ich fort. Durch geeignete Combination der Gleichungen 4ten Grades erhalte ich Relationen 3ten Grades und schliesslich quadratisch ein $\alpha$.

*) Vergleiche hier und später meine Vorlesungen über Invarianten Bd. II, herausgegeben von Gg. Kerschensteiner.

Die letzteren ergeben sich hiebei in derselben Form, wie jene, welche bei Aufstellung der Discriminante biquadratischer Gleichungen auftreten. (Vgl. a. a. O. Bd. II, pag. 91). Diesen Umstand benütze ich, um in derselben Weise wie dort die Elimination von $\alpha$ auszuführen. Es ergiebt sich dann die Relation:

$$(I)\quad U = 0 = -\frac{972}{5}c_1 + A\left\{\frac{8569}{150}A^2 + \frac{2768}{5}A\gamma_{01} - \frac{10653}{4}\gamma_{02} + \frac{1488}{5}\gamma_{03}\right\}$$
$$+\frac{3627}{2}\gamma_{11} - \frac{20505}{2}\gamma_{12} - \frac{7425}{2}\gamma_{22} + 2430\gamma_{23} + 162\gamma_{33}.$$

Hierin ist, wenn man

$$(II)\quad \begin{cases}(f,f)^4 = k, & (f,f)^6 = i, & (k,f)^5 = r, & (k,k)^4 = l,\\ (f,i^2)^4 = \varrho, & (k,i^2)^4 = u, & (l,i)^2 = v, & 3(r,r)^2 = \tau\end{cases}$$

setzt,

$$(III)\quad \begin{cases} c_1 = (\varrho,(\varrho,i))^3, \quad A = (i,i)^2,\\ \gamma_{01} = (i,u)^2, \quad \gamma_{02} = (i,v)^2, \quad \gamma_{03} = (i,\tau)^2,\\ \gamma_{11} = (u,u)^2, \quad \gamma_{12} = (u,v)^2, \quad \gamma_{22} = (v,v)^2,\\ \gamma_{13} = (u,\tau)^2, \quad \gamma_{23} = (v,\tau)^2, \quad \gamma_{33} = (\tau,\tau)^2.\end{cases}$$

Die rechte Seite der obigen Relation (I) ist vom Grade 12 in den Coefficienten von $f$ und verschwindet nicht für die specielle Form:

$$f = x_1^7 + 7x_1^2x_2^2 - 7x_1^2x_2^5 + x_2^7.$$

Denn für dieselbe verschwindet $i$ und damit jede Invariante der Tabelle (III), ausgenommen $\gamma_{33}$.*) Hieraus folgt, dass $U = 0$ keine allgemeine Identität sein kann, sondern, dass bis auf einen numerischen Factor $U$ gleich der Discriminante $\Delta_f$ von $f$ sein muss.

Die Untersuchung zerfällt in zwei Theile. Im ersten werden Relationen angegeben, durch welche überhaupt Covarianten und Invarianten von $f$, deren Grad in den Coefficienten die Zahl 12 nicht übersteigt, mit einander verbunden sind. Besonders führen wir dort Formen, die das Symbol $i$ gar nicht oder nur spärlich enthalten, auf solche zurück, die dasselbe mindestens einmal öfter als vorher besitzen.

Im zweiten Theile werden dann die speciellen Relationen aufgestellt, die von der Doppelwurzel $\alpha$ von $f$ erfüllt werden.

---

*) Es ist nämlich: $i=0$, $k=\frac{1}{3}\{2x_1^6-6x_1^5x_2+20x_1^3x_2^3+6x_1x_2^5+2x_2^6\}$

$$r=-\frac{5}{3}\{x_1^3+x_1^2x_2-x_1x_2^2+x_2^3\}$$

$$\tau=\frac{100}{9}\{-2x_1^2+5x_1x_2+x_2^2\},$$

also

$$\gamma_{33}=-\frac{55000}{27}.$$

# Erster Theil.

## § 1.

### Ueberschiebungen quadratischer Formen.

Ich habe bereits in der Einleitung erwähnt, dass es zunächst eine unserer Hauptaufgaben sein wird in die symbolischen Producte für die Covarianten des Systemes möglichst zahlreich das Symbol $i$ einzuführen. Dies erheischt eine Reihe von Ueberschiebungen über diese quadratische Form und es erscheint daher angezeigt Ueberschiebungen von quadratischen zunächst allgemein zu studiren.

Es seien $i = i_x^2$ und $g = g_x^\nu$ irgend zwei binäre Formen; $(i, i)^2 = A$ die Invariante von $i$; dann ist nach bekannten Ueberschiebungsgesetzen:

$$(1) \qquad \binom{\nu+2}{2}(i\cdot g, i)^2 = (\nu+1)A\cdot g + \binom{\nu}{2}\cdot i\cdot (g, i)^2.$$

Ersetzt man hierin $g$ durch $(g, i^\varrho)^{2\varrho}$ so wird

$$\binom{\nu-2\varrho+2}{2}(i\cdot(g, i^\varrho)^{2\varrho}, i)^2 - \binom{\nu-2\varrho}{2} i\cdot(g, i^{\varrho+1})^{2\varrho+2} = (\nu-2\varrho+1)A\cdot(g, i^\varrho)^{2\varrho}$$

und wenn man diese Gleichung $(2\lambda-2\varrho-2)$ mal über $i^{\lambda-\varrho-1}$ schiebt:

$$\binom{\nu-2\varrho+2}{2}(i\cdot(g, i^\varrho)^{2\varrho}, i^{\lambda-\varrho})^{2\lambda-2\varrho} - \binom{\nu-2\varrho}{2}(i\cdot(g, i^{\varrho+1})^{2\varrho+2}, i^{\lambda-\varrho-1})^{2\lambda-2\varrho-2} = (\nu-2\varrho+1)A\cdot(g, i^{\lambda-1})^{2\lambda-2}.$$

Ersetzt man hierin $\varrho$ der Reihe nach durch $0, 1, 2, \ldots \lambda-1$ und addirt die so entstehenden Gleichungen, so kommt:

$$(2) \qquad \binom{\nu+2}{2}(i\cdot g, i^\lambda)^{2\lambda} - \binom{\nu-2\lambda+2}{2}\cdot i\cdot(g, i^\lambda)^{2\lambda} = \lambda(\nu-\lambda+2)A\cdot(g, i^{\lambda-1})^{2\lambda-2}.$$

Ist speciell $g = i^{\mu-1}$, so kommt aus Formel (1)

$$\binom{2\mu}{2}(i^\mu, i)^2 = (2\mu-1)A\cdot i^{\mu-1} + \binom{2\mu-2}{2} i\cdot(i^{\mu-1}, i)^2.$$

Trägt man hier für $\mu$ der Reihe nach die Werthe $1, 2, 3 \ldots \nu$ ein und addirt die entstehenden Gleichungen, so erhalten wir:

$$(3) \qquad (i^\nu, i)^2 = \frac{\nu}{2\nu-1} A i^{\nu-1}.$$

Hieraus folgt sofort:

$$(4) \qquad (i^\nu, i^2)^4 = \frac{\nu\cdot\nu-1}{2\nu-1\cdot 2\nu-3} A^2\cdot i^{\nu-2}, \text{ etc.}$$

Um aber die allgemeinere Ueberschiebung $(i^\lambda, i^\mu)^{2\varrho}$ zu berechnen, gehen wir aus von den Reihenentwicklungen:

$$i^{\lambda-1} i_y^2 = (i^\lambda)_{y^2} + \frac{\binom{2\lambda-2}{2}}{\binom{2\lambda-1}{2}} (i^{\lambda-1}, i)^2 (yx)^2$$

oder wegen (3)

$$(5) \quad \begin{cases} (i^\lambda)_{y^2} = i^{\lambda-1} \cdot i_y^2 - \frac{\lambda-1}{2\lambda-1} A \cdot i^{\lambda-1} \cdot (yx)^2 \\ \text{und entsprechend} \\ (i^\mu)_{y^2} = i^{\mu-1} \cdot i_y^2 - \frac{\mu-1}{2\mu-1} A \cdot i^{\mu-2} \cdot (yx)^2. \end{cases}$$

Durch Ueberschiebung beider Formeln (5) kommt:

$$(6) \quad (i^\lambda, i^\mu)^2 = \frac{\lambda+\mu-1}{2\lambda-1 \cdot 2\mu-1} \cdot A \cdot i^{\lambda+\mu-2}.$$

Das ist die allgemeine Formel für $\varrho = 1$. Um weitere Formeln zu erhalten, empfiehlt es sich die Relationen (5) nach $x$ in Bezug auf $y$ zu polarisiren, und dann die Ueberschiebungen vorzunehmen.

Von den *ungeraden* Ueberschiebungen über $i$ haben wir nur einige einfachere Formeln nöthig. Es sind das die Relationen:

$$(7) \quad ((g, i), i) = -\frac{A}{2} \cdot g + \frac{\nu-1}{\nu} i \cdot (g, i)^2,$$

$$(8) \quad ((g, i), i)^2 = \frac{\nu-2}{\nu} ((g, i)^2, i),$$

$$(9) \quad ((g, i), i^2)^3 = -\frac{\nu-2}{2\nu} A \cdot (g, i)^2 + \frac{\nu-3}{\nu} i \cdot (g, i^2)^4.$$

Die erste derselben erhält man aus

$$(i\, i_1)\,(g\, i) g_x^{\nu-1} i_{1x} = ((g, i), i) - \frac{\nu-1}{\nu} i \cdot (g, i)^2 = -\frac{1}{2} Ag,$$

die zweite aus

$$(i\, i_1)\,(gi)\,(g\, i_1) g_x^{\nu-2} = ((g, i), i)^2 - \frac{\nu-2}{\nu} ((g, i)^2, i) = 0$$

und endlich die letzte aus (7) wenn man darin $g$ durch $(g, i)^2$ ersetzt, da ja

$$((g, i), i^2)^3 = \big(((g, i), i)^2, i\big) = \frac{\nu-2}{\nu} \big(((g, i)^2, i), i\big)$$

ist.

## § 2.

### Formen zweiten Grades in den Coefficienten mit zwei Reihen Variabler.

Die Formen zweiten Grades in den Coefficienten von $f$ sind:

$$(f,f)^2,\quad (f,f)^4 = k,\quad (f,f)^6 = i.$$

Durch sie und ihre Polaren lassen sich diejenigen symbolischen Producte ausdrücken, welche nur zwei Symbole $a$, $b$ von $f$ enthalten. Im Folgenden wollen wir uns auf die Berechnung solcher Producte beschränken, welche entweder $(ab)^4$ oder doch wenigstens $(ab)^3$ zum Factor haben. Das geeignetste Mittel hierzu ist die Reihenentwicklung. (Vergl. a. a. O. Seite 86 u. 88, Formel VIII u. IX).

Gemäss den Gesetzen derselben hat man zunächst:

$$(ab)^4 a_y^3 b_x^2 b_y = k_x^2 k_y^4 + \tfrac{3}{10} i_y^2 (yx)^2.$$

Verbinden wir diese Formel mit

$$(ab)^4 a_y b_y \cdot (ab)^2 (yx)^2 = i_y^2 (yx)^2 = 2(ab)^4 a_y b_y (a_y^2 b_x^2 - a_x b_x a_y b_y),$$

so erhalten wir:

$$(1)\qquad (ab)^4 a_x b_x a_y^2 b_y^2 = k_x^2 k_y^4 - \tfrac{1}{5} i_y^2 (yx)^2.$$

Zu einer zweiten Relation giebt uns die Entwicklung des symbolischen Productes $(ab)^4 a_x b_x a_y b_y a_z b_z$ Veranlassung.

Die erste Elementarcovariante derselben ist $k$, und demnach aus Gründen der Symmetrie das erste Glied der Reihe: $k_x^2 k_y^2 k_z^2$. Die zweite Elementarcovariante derselben ist $i$, und demnach die zweite Gruppe der Glieder in der Entwicklung von der Form $i_x^2 (yz)^2$ oder $i_y i_z (xy)(xz)$. Die Glieder der zweiten Art lassen sich aber nach dem Productsatz (vergl. a. a. O. Seite 14) durch Glieder der ersten Art ersetzen, und demnach wird die Entwicklung die Form haben:

$$(ab)^4 a_x b_x a_y b_y a_z b_z = k_x^2 k_y^2 k_z^2 + c_1 i_x^2 (yz)^2 + c_2 i_y^2 (zx)^2 + c_3 i_z^2 (xy)^2,$$

wobei wiederum aus Gründen der Symmetrie $c_1 = c_2 = c_3$ sein muss,

Um diese Constante zu berechnen setzen wir $y = z$, dann kommt:

$$(ab)^4 a_x b_x a_y^2 b_y^2 = k_x^2 k_y^4 + 2 c i_y^2 (yx)^2$$

also durch Vergleichung mit (1)

$$c = -\tfrac{1}{10}$$

und demnach:

$$(2)\qquad (ab)^4 a_x b_x a_y b_y a_z b_z =$$

$$= k_x^2 k_y^2 k_z^2 - \tfrac{1}{10}\{i_x^2 (yz)^2 + i_y^2 (zx)^2 + i_z^2 (yx)^2\}.$$

Verbindet man diese Formel mit

$$(ab)^4 a_x b_x \cdot (ab)^2 (yz)^2 = i_x^2 (yz)^2 = 2(ab)^4 a_x b_x (a_y^2 b_z^2 - a_y b_y a_z b_z)$$

so kommt als dritte Beziehung

$$(3)\quad (ab)^4 a_x b_z a_y^2 b_z^2 = k_x^2 k_y^2 k_z^2 - \frac{1}{10}\{i_y^2 (xz)^2 + i_z^2 (yx)^2\} + \frac{2}{5} i_x^2 (yz)^2.$$

Aus (1) und (3) erhält man aber unmittelbar:

$$(4)\quad \begin{cases} (ab)^4 (ai)\ (bi)\ a_x^2 b_x^2 = (k, i)^2 - \frac{i^2}{5}, \\ (ab)^4 (ai)^2 (bi_1)^2 a_x b_x = (k, i^2)^4 + \frac{i}{5} A = u + \frac{A}{5} i. \end{cases}$$

Zur Berechnung symbolischer Producte, die nur den Factor $(ab)^3$ besitzen, gehen wir aus von der Reihenentwicklung:

$$(5)\quad (ab)^3 a_y^4 b_x^4 = 2 k_y^3 k_x^3 (yx) + \frac{4}{5} i_x i_y (yx)^3.$$

Wir differenziren diese Formel nach $x$, und ersetzen die Incremente durch die neue Variable $z$; dann entsteht

$$(ab)^3 a_y^4 b_x^3 b_z = \frac{1}{2} k_y^3 k_x^3 (yz) + \frac{3}{2} (yx) k_y^3 k_x^2 k_z + \frac{1}{5} i_y i_z (yx)^3 + \frac{3}{5} i_x i_y (yx)^2 (yz).$$

Mit Hilfe des Identitätssatzes (Vergl. a. a. O. Seite 13 u. 14) geht sie über in:

$$(6)\quad (ab)^3 a_y^4 b_x^3 b_z = 2(yz) k_y^3 k_x^3 + \frac{3}{2} (zx) k_y^4 k_x^2 + \frac{4}{5} i_y i_z (yx)^3 - \frac{3}{5} i_y^2 (yx)^2 (zx).$$

Differenziren wir jetzt diese Formel auch nach $y$, ersetzen die Incremente durch $z$ und formen alsdann die sich hierbei einstellenden 3 letzten Glieder $2 i_y i_z (yx)(zx) \cdot (yx)$, etc. nach dem Productsatze um, so kommt:

$$(7)\quad (ab)^3 a_y^3 a_z b_x^3 b_z = \frac{3}{2} k_x^2 k_y^2 k_z^2 (yx) - \frac{3}{20} (yx)\{i_x^2 (yz)^2 + i_y^2 (xz)^2\} + \frac{7}{20} i_z^2 (yx)^3.$$

Ersetzt man nun $z$ durch das Symbol $i$, so wird:

$$(8)\quad (ab)^3 a_y^3 b_x^3 (ai)(bi) = (yx)\left\{\frac{3}{2}(k, i)_y^2 - \frac{3}{10} i_x^2 i_y^2 + \frac{7}{20} A \cdot (yx)^2\right\},$$

eine Relation, welche mittelst der Reihenentwicklung

$$i_x^2 i_y^2 = (i^2)_y^2 + \frac{1}{3} A (yx)^2$$

übergeht in:

$$(9)\quad (ab)^3 a_y^3 b_x^3 (ai)(bi) = (yx)\left\{\frac{3}{2}(k, i)_y^2 - \frac{3}{10}(i^2)_y^2 + \frac{1}{4} A (yx)^2\right\}.$$

## § 3.

### Die Formen dritten Grades in den Coefficienten.

Jedes symbolische Product, das den Factor $(ak)^3$ besitzt, lässt sich auf solche reduciren, welche die Symbole $i$ und $r$ enthalten. Um dies zu beweisen brauchen wir nur zu zeigen (vgl. a. a. O. Seite 168 u. 169), dass die Behauptung gilt für

$$(k, f)^3, \quad (k, f)^4, \quad (k, f)^5, \quad (k, f)^6,$$

wenn nicht eine dieser Formen a priori verschwindet. Nun ist $(k, f)^5$ gerade die Form $r$, und $(k, f)^6$ verschwindet identisch; denn man hat:

$$(1) \qquad (k, f)^6 = (ab)^4 (ac)^3 (bc)^3 c_x =$$
$$= \tfrac{1}{3} (ab)^3 (ac)^3 (bc)^3 \{c_x (ab) + a_x (bc) + b_x (ca)\} = 0.$$

Die Reducibilität der beiden ersten Formen aber ergiebt sich folgendermassen. Wir entwickeln zunächst nach bekannten Methoden (v. a. a. O. Seite 88) die Producte $(ab)^4 a_y^3 b_x^3$ und $(ac)^3 a_y^4 c_x^4$ in Reihen. Ersetzen wir alsdann in der ersten Entwicklung $y$ durch $c$, in der zweiten durch $b$, so ergiebt sich unmittelbar durch Vergleichung:

$$(ab)^4 (ac)^3 b_x^3 c_x^4 = (k, f)^3 - \tfrac{9}{10} (f, i) = 2(k, f)^3 - \tfrac{4}{5} (f, i),$$

also

$$(2) \qquad (k, f)^3 = -\tfrac{1}{10} (f, i).$$

Ebenso findet man aus den Entwicklungen von $(ab)^4 a_y^3 b_x^2 b_y$ und $(ac)^3 a_y^4 c_y c_y^3$

$$(3) \qquad (k, f)^4 = -\tfrac{1}{5} (f, i)^2.$$

Es sind also in der That die oben erwähnten vier Ueberschiebungen und damit alle symbolischen Producte mit dem Factor $(ak)^3$ auf Formen mit den Symbolen $r$ oder $i$ reducibel. Wir wollen diess hier nur an den beiden Producten

$$(ak)^3 a_y^4 k_x^3, \quad (ak)^3 a_y^4 k_x^2 k_y$$

zeigen. Entwickeln wir dieselben nach bekannten Gesetzen in Reihen, so kommt:

$$(4) \quad \begin{cases} (ak)^3 a_y^4 k_x^3 = (f, k)_{y^4}^3 + \tfrac{12}{7} (f, k)_{y^3}^4 (yx) + \tfrac{6}{5} (f, k)_{y^2}^5 (yx)^2 \\ \qquad\qquad + (f, k)_y^6 (yx)^3, \\ (ak)^3 a_y^4 k_x^2 k_y = (f, k)_{y^4}^3 + \tfrac{8}{7} (f, k)_{y^3}^4 (yx) + \tfrac{4}{5} (f, k)_{y^2}^5 (yx)^2. \end{cases}$$

Unter Benützung der Relationen (1), (2), (3), so wie der Reihen:

$$(ai)\, a_y^4\, a_x^2\, i_x = (f, i)_{y^4} + \tfrac{4}{7}\,(f, i)^2_{y^3}(yx),$$

$$(ai)\, a_y^5\, a_x\, i_x = (f, i)_{y^5} + \tfrac{5}{7}\,(f, i)^2_{y^4}(yx),$$

$$(ai)^2\, a_y^3\, a_x^2 = (f, i)^2_{y^3},$$

$$(ai)^2\, a_y^4\, a_x = (f, i)^2_{y^4}$$

gehen die Relationen (4) in die folgenden über:

$$(5)\qquad (ak)^3\, a_y^4\, k_x^3 = -\tfrac{1}{10}\,(ai)\, a_y^4\, a_x^2\, i_x - \tfrac{2}{5}\,(ai)^2\, a_y^3\, a_x^2\,(yx) - \tfrac{6}{5}\, r_y^2\, r_x\,(yx)^2,$$

$$(6)\qquad (ak)^3 a_y^4 k_x^2 k_y = \tfrac{1}{10}\,(ai)\, a_y^5\, a_x\, i_x - \tfrac{3}{10}\,(ai)^2\, a_y^4\, a_x\,(yx) - \tfrac{2}{5}\, r_y^2\, r_x\,(yx)^2.$$

Hierbei ergiebt sich aus (5), wenn man auf das mittlere Glied rechts den Identitätssatz $(ai)(yx) = a_y i_x - a_x i_y$ anwendet, die Relation:

$$-6\, r_y^2 r_x (yx)^2 = 5(ak)^3 a_y^4 k_x^3 + \tfrac{3}{2}(ai) a_y^4 a_x^2 i_x - 2(ai) a_y^3 a_x^3 i_y.$$

## § 4.

## Formen vierten Grades in den Coefficienten.

Unter den Formen vierten Grades in den Coefficienten lassen sich insbesondere

$$(k, k)^2,\quad (k, k)^4 = l,\quad (k, k)^6$$

auf solche zurückführen, welche die Symbole $r$ oder $i$ enthalten. Indem wir diese Reduction ausführen, ergiebt sich auch, dass die Ueberschiebung $(f, r)^2$ die gleichfalls vierten Grades in den Coefficienten ist, auf $\frac{1}{2}(k, i)$ reducirt werden kann.

Wir gehen aus von den Reihenentwicklungen für die symbolischen Producte

$$(\alpha)\qquad (ab)^3 a_y^3 a_x b_x^4,\quad (ab)^4 a_y^3 b_x^3,\quad (ab)^4 a_y^3 b_y b_x^2,$$

$$(\beta)\qquad (ak)^3 a_y^3 a_x k_x^3,\quad (ak)^3 a_y^4 k_x,\quad (ak)^3 a_y^4 k_y k_x^2,$$

welche wir theils schon früher gegeben haben, theils aber leicht nach bekannten Methoden entwickeln können. Ersetzen wir alsdann in den Producten $(\alpha)$ $y$ durch $k$, in den Producten $(\beta)$ $y$ durch $b$, so erhalten wir hierdurch zweierlei Entwicklungen für je eines der P roducte:

$$(ab)^3 (ak)^3 a_x b_x^4 k_x^3,\quad (ab)^4 (ak)^3 b_x^3 k_x^3,\quad (ab)^4 (ak)^3 (bk) b_x^2 k_x^2.$$

Durch Vergleichung derselben ergeben sich unmittelbar die Relationen:

$$(1) \qquad (k, k)^2 = \frac{2}{5}(f, r) - \frac{1}{5}(ai)^2(ab)^2 a_x^3 b_x^5 - \frac{1}{10} ik,$$

$$(2) \qquad (f, r)^2 = \frac{1}{2}(k, i),$$

$$(3) \qquad (f, r)^3 = \frac{1}{10} i^2 - \frac{5}{2} l.$$

Hierzu kommt:

$$(4) \qquad (k, k)^6 = \frac{1}{10} A.$$

Um die Richtigkeit der letzten Formel zu erkennen, brauchen wir nur in der Gleichung (2) § 3

$$(ak)^3 a_x^4 k_x^3 = \frac{1}{10}(ai) a_x^6 i_x$$

die Variable $x$ durch das Symbol $b$ zu ersetzen.

Aus der Formel (1) lassen sich nun durch Ueberschiebung mit $i$ noch eine Reihe weiterer Formeln ableiten, deren wir später bedürfen. Wir bilden zunächst deren $2^{te}$ Polare

$$(k, k)_{y^2}^2 = \frac{2}{5}(f, r)_{y^2} - \frac{1}{5}(ai)^2(ab)^2(a_x^3 b_x^5)_{y^2} - \frac{1}{10}(i \cdot k)_{y^2}.$$

Zur Berechnung der einzelnen Terme dieses Ausdruckes bedienen wir uns der Reihenentwicklungen für

$$(kk_1)^2 k_x k_y^2 k_{1x}^4, \quad (ar) a_x^6 r_y^2, \quad (ai)^2 (ab)^2 a_y^2 a_x b_x^5$$

und erhalten unter Benützung der Formeln (2) und (3), sowie der beiden Beziehungen

$$(ab)^3 a_y^2 a_x^2 b_x^3 = k_y^5 (yx),$$

$$(ab)^4 a_y^2 a_x b_x^3 = k_{y^2} + \frac{3}{10} i(yx)^2$$

in einfacher Weise als erste Formel:

$$(kk_1)^2 k_x^2 k_y^2 k_{1x}^4 = \frac{2}{5}(ar) a_x^6 r_y^2 - \frac{1}{5}(ab)^2(ai)^2 a_y^2 a_x b_x^5 + \frac{11}{20}(k, i)_y (yx) + \left(l + \frac{2}{21}(k, i)^2\right)(yx)^2 - \frac{1}{10}(k \cdot i)_{y^2}.$$

Diese Formel schieben wir nun 2 Mal über $i_y^2$ und erhalten, wegen Formel (7) und (1) in § 1, die Gleichung:

$$(5) \quad (kk_1)^2 (ki)^2 k_x^2 k_{1x}^4 = \frac{2}{5}(f, (r, i)^2) - \frac{1}{5}(f, \varphi)^2 + \frac{i}{2}(k, i)^2 - \frac{3}{10} Ak + il.$$

Wir bilden nun von dieser Gleichung abermals die zweite Polare; ihre einzelnen Terme erhalten wir wiederum, wenn wir geeignete Glieder von den Polaren dieser Terme in Reihen entwickeln. Man hat nämlich:

$$(a\varrho)^2 a_y a_x^4 \varrho_y = (f, \varrho)_y^3 - \frac{2}{3}(f, \varrho)_y^3 (yx),$$

$$(kk_1)^2 (ki)^2 k_y^2 k_{1x}^4 = (kk_1)^2 (ki)^2 \Big\{ (k_x^2 k_{1x}^4)_{y^2} + \frac{4}{3}(kk_1)(k_x \cdot k_{1x}^3)_y (yx) + \frac{3}{5}(kk_1)^2 k_{1x}^2 (yx)^2 \Big\},$$

oder weil:

$$(kk_1)^3 k_y^2 k_x k_{1x}^3 = l_y (yx),$$

$$(kk_1)^4 k_y^2 k_{1x}^2 = l_{y^2} + \frac{1}{30} A (yx)^2,$$

so ist

$$(kk_1)^2 (ki)^2 k_y^2 k_{1x}^4 = (kk_1)^2 (ki)^2 (k_x^2 \cdot k_{1x}^4)_{y^2} + \frac{4}{3}(l, i)_y (yx) + \frac{3}{5}\Big(v + \frac{1}{30} Ai\Big)(yx)^2.$$

Hieraus folgt zunächst, indem wir nun $y$ durch $i$ ersetzen:

$$(6) \qquad ((f, \varrho)^2, i)^2 = (f, (\varrho, i))^3 + \frac{2}{3}((f, \varrho)^3, i),$$

$$(7) \qquad (kk_1)^2 (ki)^2 (k_x^2 k_{1x}^4, i)^2 = (k, u)^2 - \frac{4}{3}((l, i), i) - \frac{3}{5} i\Big(\frac{Ai}{30} + v\Big),$$

Anderntheils ist nach Formel (1) und (7) § 1

$$(8) \qquad (i \cdot (k, i)^2, i)^2 = \frac{1}{3} A \cdot (k, i)^2 + \frac{2}{5} iu,$$

$$(9) \qquad (i \cdot l, i)^2 = \frac{1}{8} A \cdot l + \frac{2}{5} iv.$$

Die zweite Ueberschiebung der Formel (5) über $i$ liefert also endlich, wenn wir noch

$$(10) \qquad (f, (\varrho, i))^3 = p$$

setzen, und berücksichtigen, dass nach § 1, (7)

$$((l, i), i) = -\frac{A}{2} l + \frac{3}{4} i \cdot (l, i)^2 = -\frac{A}{2} l + \frac{3}{4} i \cdot v$$

ist, die Relation:

$$(11) \qquad (f, i \cdot (r, i)^2)^3 = \frac{p}{2} + \Big(k, \frac{Ai}{3} + \frac{5}{2} u\Big)^2 + \frac{1}{3}((f, \varrho)^3, i) + \frac{5}{6} A \cdot l - i\Big(\frac{Ai}{20} + \frac{u}{2} + 5v\Big).$$

## § 5.

### Die Formen 5ten und 6ten Grades in den Coefficienten.

Von den Formen 5ten Grades wollen wir nur die beiden Covarianten

$$(ak)^4 (ki)^2 a_x^3, \quad (f, l)^4$$

berechnen. Um die erste derselben durch andere Formen auszudrücken

hat man nur das symbolische Product $(ak)^4 a_x^3 k_y^2$ in eine Reihe zu entwickeln und $y$ darin durch $i$ zu ersetzen; diess liefert unmittelbar:

$$(1) \qquad (ak)^4 (ki)^2 a_x^3 = -\frac{1}{5}\varrho + \frac{6}{5}(r, i).$$

Dagegen ergiebt sich der Werth von $(f, l)^4$, wenn man die Entwicklungen für die Producte $(ar)^2 a_y^5 r_x$ und $(ki) k_y^5 i_x$ vornimmt, die so erhaltenen Relationen subtrahiert und nun $y$ durch das Symbol $b$ resp. $a$ ersetzt. Hierbei hat man nur an Stelle der auftretenden Formen $(f, r)^2$, $(f, r)^3$ ihre Werthe gemäss § 4, (2), (3) einzuführen und erhält dann in Verbindung mit Formel (1) leicht:

$$(2) \qquad (f, l)^4 = \frac{2}{25}\varrho + \frac{12}{25}(r, i).$$

Von den Formen 6^ten^ Grades in den Coefficienten interessiren uns im Folgenden:

$$(k, l)^3, \quad (k, l)^4, \quad (\varrho, f)^3.$$

Aus der Theorie der Form 6^ten^ Grades (v. a. a. O. Seite 277) weiss man

$$(3) \qquad (k, l)^3 = 0.$$

Zur Berechnung der beiden andern dienen die Reihen für $(ak)^4 a_y^3 k_x^3$, $(ab)^3 a_y^4 b_x^4$; ersetzt man in der ersten $y$ durch $r$, in der zweiten aber durch $i$, so kommt unter Benützung von $(f, r)^3 = \frac{i^2}{10} - \frac{5}{2} l$ (§ 4, (3)) unmittelbar:

$$(4) \qquad \begin{aligned} (k, l)^4 &= \frac{2}{375} Ai + \frac{1}{25} u - \frac{1}{5} v + \frac{4}{25} \tau, \\ (\varrho, f)^3 &= 2(k, i^2)^3. \end{aligned}$$

Aus der letzten Relation geht, weil $((k, i^2)^3, i) = ((k, i), i^2)^3$, durch Ueberschiebung mit $i$ nach § 1, (9) die Formel

$$(5) \qquad ((\varrho, f)^3, i) = \frac{3}{2} i \cdot u - A(k, i)^2$$

hervor. Trägt man diesen Werth von $((\varrho, f)^3, i)$ in (6) und (11) des § 4 ein, so nehmen dieselben die einfachere Gestalt an:

$$(6) \qquad ((f, \varrho)^2, i)^2 = p + \frac{2}{3} A \cdot (k, i)^2 - iu,$$

$$(7) \qquad (f, i \cdot (r, i)^2)^3 = \frac{p}{2} + \left(k, \frac{2}{3} Ai + \frac{5}{2} u\right)^2 - i \cdot \left(\frac{Ai}{20} + u + 5v\right) + \frac{5}{6} Al.$$

Die Formeln (6) und (7) lassen sich mittelst des Identitätssatzes in einige andere transformiren. Es ist nämlich nach den Ueberschiebungsgesetzen:

$$(f, i\cdot(r,i)^2)^3 = (ar)\,(ai_1)^2\,(ri)^2\,a_x^4$$
$$= (ar)\,(ai_1)^2\,a_x^2\cdot\{r_x(ai) - i_x(ar)\}^2,$$

oder:

(8) $(f, i\cdot(r,i)^2)^3 = (\varrho, r) - 2a_x^2 i_x r_x (ai_1)^2(ai)(ar)^2 + i\cdot((f,r)^3, i)^2.$

Ebenso findet man:

(9) $i((f,r)^3, i)^2 = (\varrho, r) - 2a_x^3 r_x (ar)(ai_1)^2(ai)(ri) + (f, i\cdot(r,i)^2)^3.$

Anderntheils ist:

$$i\cdot(ab)^4\,(ai_1)^2\,(bi_2)^2\,a_x\,b_x$$
$$= 2(ab)^2\,(ai_1)^2\,(bi_2)^2\,a_x b_x\{(ai)^2\,b_x^2 - (ai)\,(bi)\,a_x\,b_x\},$$

also nach § 2, (4)

(10) $i\cdot\left(\frac{Ai}{5}+u\right) = 2(a\varrho)^2(ai)^2 a_x^3\varrho_x - 2(ab)^2(ai)(bi)(ai_1)^2(bi_2)^2 a_x^2 b_x^2.$

Hierin ist (nach § 4, (3) u. § 1, (1))

$$((f,r)^3, i)^2 = \frac{1}{15}Ai - \frac{5}{2}v,$$

während die Glieder

$$(ar)^2\,(ai_1)^2\,(ai)\,a_x^2\,r_x\,i_x \quad \text{und} \quad (a\varrho)^2\,(ai)^2\,a_x^2\,\varrho_x$$

sich aus den Reihen für $(ar)^2\,a_y^3\,a_x^2\,r_x$ und $(a\varrho)^2\,a_y^2\,a_x^3\,\varrho_x$ ergeben, wenn man in ihnen $y$ durch $i$ ersetzt. Man erhält:

$$(ar)^2\,(ai_1)^2\,(ai)\,a_x^2\,r_x\,i_x = \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}iu - \frac{A}{3}\cdot(k,i)^2\right\} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{i^2}{10} - \frac{5}{2}l, i^2\right)^2$$
$$= -\frac{A}{6}\cdot(k,i)^2 + i\left(\frac{Ai}{60} + \frac{u}{4} - \frac{5v}{4}\right) + \frac{5Al}{12},$$

$$(a\varrho)^2\,(ai)^2\,a_x^3\,\varrho_x = ((f,\varrho)^2, i)^2 - \tfrac{1}{3}((\varrho, f)^3, i)$$
$$= p + A\cdot(k,i)^2 - \frac{3}{2}iu.$$

Daher ist:

(11) $(\varrho, r) = \frac{p}{2} + \left(k, \frac{Ai}{3} + \frac{5u}{2}\right)^2 - i\left\{\frac{Ai}{12} + \frac{u}{2} + 5v\right\} + \frac{5}{3}Al,$

(12) $(ar)\,(ai_1)^2\,(ai)\,(ri)\,a_x^3\,r_x = \frac{p}{2} + \left(k, \frac{Ai}{3} + \frac{5u}{2}\right)^2$
$$- i\left\{\frac{Ai}{12} + \frac{3u}{4} + \frac{15v}{4}\right\} + \frac{5}{4}Al,$$

(13) $(ab)^2\,(ai_1)^2\,(bi_2)^2\,(ai)\,(bi)\,a_x^2 b_x^2 = p + A(k,i)^2 - i\cdot\left\{\frac{Ai}{10} + 2u\right\}.$

Die Formel (11) gestattet uns die Invariante

$$((r,i),\ (\varrho,i))^3 = c_2$$

durch andere Invarianten darzustellen. Zu dem Zwecke bringen wir

diese Ueberschiebung zunächst in eine andere Gestalt. Entwickelt man nämlich die Producte $(ri)\, r_y^2\, i_x$ und $(\varrho r)\, \varrho_y^2\, r_x^2$ in Reihen und ersetzt man $y$ durch $\varrho$ und $x$ durch $i_1$, resp. $y$ durch $i$ und $x$ durch $i_1$, so kommt:

$$(ri)\,(r\varrho)^2\,(ii_1)\,(\varrho i_1) = ((r,i),\ (\varrho,i))^3 - \frac{2}{3}\,(ri)^2\,(\varrho i_1)^2\,(\varrho r)$$
$$= -\frac{A}{2}\,(\varrho,r)^3,$$
$$(\varrho r)\,(\varrho i)^2\,(ri_1)^2 = ((\varrho,r),\ i^2)^4 + \frac{A}{3}\,(\varrho,i)^3.$$

Hieraus folgt:

$$c_2 = \frac{2}{3}\left\{((\varrho,r),\ i^2)^4 + \frac{A}{3}\,(\varrho,r)^3\right\} - \frac{A}{2}\,(\varrho,r)^3,$$

oder

$$c_2 = \frac{2}{3}\,((\varrho,r),\ i^2)^4 + \frac{5}{18}\,A\cdot(\varrho,r)^3, \tag{14}$$

Schieben wir also Formel (11) 4 Mal über $i^2$ und berücksichtigen, dass

$$(\varrho,r)^3 = \frac{A^2}{15} - \frac{5}{2}\,\gamma_{02} \quad (\text{vgl. § 6, (1)}),$$
$$(i\cdot g_x^2,\ i^2)^4 = \frac{2}{3}\,A\cdot(g,i)^2,$$

so erhalten wir:

$$c_2 = \frac{c_1}{3} - \frac{1}{18}\,A^3 - \frac{5}{12}\,A\gamma_{02} + \frac{5}{8}\,\gamma_{11}. \tag{15}$$

## § 6.

## Formen 8ten Grades in den Coefficienten.

Von den Formen 8ter Ordnung berechnen wir:

$$(\varrho,r)^3,\quad (l,l)^2,\quad (l,l)^4 = c.$$

Hierzu benützen wir die Formeln:

$$(f,r)^3 = \frac{i^2}{10} - \frac{5}{2}\,l, \qquad \text{vgl. § 4, (3)},$$
$$(f,l)^4 = \frac{2\varrho}{25} + \frac{12}{25}\,(r,i), \qquad \text{„ § 5, (2)},$$
$$(k,l)^4 = 0, \qquad \text{„ § 5, (3)},$$
$$(k,l)^4 = \frac{2}{375}\,Ai + \frac{u}{25} - \frac{v}{5} + \frac{4}{25}\,\tau. \qquad \text{„ § 5, (4)}.$$

Mit Hilfe der ersten dieser Formeln hat man sofort:

$$(\varrho,r)^3 = (ar)^3\,(ai)^2\,(ai_1)^2 = ((f,r)^3,\ i^2)^4$$
$$= \frac{1}{15}\,A^2 - \frac{5}{2}\,\gamma_{02}. \tag{1}$$

Ferner ist:

$$(ar)^3\,(al)^4 = ((f, r)^3, l)^4 = ((f, l)^4, r)^3$$

und demnach mit Hülfe der ersten und zweiten Formel

$$\left(\frac{i^2}{10} - \frac{5}{2}\,l, l\right)^4 = \left(\frac{2\varrho}{25} + \frac{12}{25}\,(r, i), r\right)^3,$$

also

$$(2) \qquad c = -\frac{4}{1875}\,A^2 + \frac{3}{25}\,\gamma_{02} + \frac{8}{115}\,\gamma_{03}.$$

Um endlich $(l, l)^2$ zu berechnen, berücksichtigen wir, dass wegen $(k, l)^3 = 0$ die Entwicklung gilt:

$$(kl)^3\,k_y^3\,l_x = \frac{3}{4}\,(k, l)_{y^2}^4\,(yx)$$

und dass ferner:

$$(kk_1)^3\,k_y^3\,k_{1x}^3 = \frac{3}{2}\,l_{y^3}\,(yx) + \frac{1}{40}\,A(yx)^3.$$

Ersetzen wir in beiden Reihen $y$ durch $l$ und substituiren den Werth von $(k, l)^4$, so kommt:

$$(3) \qquad (l, l)^2 = \left(k, \frac{1}{375}\,Ai + \frac{u}{50} - \frac{v}{10} + \frac{2}{25}\,\tau\right)^2 - \frac{1}{60}\,Al.$$

Schiebt man diese Formel noch 4 mal über $i^2$ und benützt die Reihe

$$(ll_1)^2\,l_y^2\,l_{1x}^2 = (l, l)_{y^2}^2 + \frac{c}{3}\,(yx)^2,$$

so erhält man hieraus noch die zwei weiteren Relationen:

$$(4) \quad \gamma_{22} = \frac{c}{3}\,A + \frac{1}{375}\,A\gamma_{01} + \frac{1}{50}\,\gamma_{11} - \frac{1}{10}\,\gamma_{12} + \frac{2}{25}\,\gamma_{13} - \frac{1}{60}\,A\gamma_{02},$$

$$(5) \quad \gamma_{13} = \frac{2}{225}\,A^3 - \frac{1}{30}\,A\gamma_{01} - \frac{7}{24}\,A\gamma_{02} - \frac{4}{15}\,A\gamma_{03} - \frac{1}{4}\,\gamma_{11} + \frac{5}{4}\,\gamma_{12} + \frac{25}{2}\,\gamma_{22}.$$

## § 7.

## Das Quadrat von $r$.

Die Form $r$ ist eine schiefe Form. Die Quadrate schiefer Formen lassen sich aber durch gerade Formen darstellen. Um diess für die Form $r$ zu bewerkstelligen, schieben wir die Relation:

$$-6r_y^2 r_x\,(yx)^2 = 5(ak)^3\,a_y^4\,k_x^3 + \frac{3}{2}(ai)\,a_y^4\,a_x^2\,i_x - 2(ai)^3\,a_y^3\,a_x^3\,i_y,$$

welche durch Reihenentwicklung aus $(ak)^3\,a_y^4\,k_x^3$ gewonnen wird, viermal in Bezug auf die Variable $y$ über sich selbst. Es wird dann

$$6r^2 = 25(ab)^4(ak)^3(bk_1)^3 k_x^3 k_{1x}^3 + 25(ab)^4(ak)^3(bi)b_x^2 k_x^3 i_x$$
$$+\frac{9}{4}(ab)^4(ai)(bi_1)a_x^2 b_x^2 i_x i_{1x} - 20(ab)^3(ak)^3(ai)(bi)b_x^3 k_x^3$$
$$-6(ab)^3(ai)(ai_1)(bi_1)a_x^2 b_x^3 i_x$$
$$+4(ai)(bi)a_x^3 b_x^3\left\{(ab)^3(ii_1) - \frac{3}{4}(ab)^2(ai)(bi_1)\right\},$$

oder:

$$(1)\qquad 6r^2 = 25G_1 - 25G_2 + \frac{9}{4}G_3 - 20G_4 - 6G_5 + 4G_6 - 3G_7.$$

Zur Berechnung der einzelnen Glieder $G_i$ bedienen wir uns wieder geeigneter Reihenentwicklungen; solche sind die folgenden (vgl. unter a. § 2):

$$(A)\quad \begin{cases} (ab)^4 a_y^3 b_x^3 = k_y^3 + \frac{9}{10} i_y \cdot (yx)^2, \\ (ab)^4 a_y^3 b_x^2 b_z = k_y^2 k_z + \frac{9}{10} i_y \left\{i_z (yx)^2 - \frac{2}{3} i_y (yx)(zx)\right\}, \\ (ab)^4 (ai)(bi) a_x^2 b_x^2 = (k,i)^2 - \frac{1}{5} i^2, \\ (ab^3)(ai)(bi) a_y^3 b_x^3 = (yx)\left\{\frac{3}{2}(k,i)k_y - \frac{3}{10} i i_y + \frac{7}{10} A \cdot (yx)^2\right\}, \\ (ab)^3 a_y^3 a_x b_x^4 = \frac{3}{2} k_y^2 (yx) + \frac{1}{5} i \cdot (yx)^3, \\ (ab)^4 a_y^2 a_x b_x^3 = k_y^2 + \frac{3}{10} i (yx)^2, \\ (kk_1)^3 k_y^3 k_{1x}^3 = \frac{3}{2} l_y^2 (yx) + \frac{1}{40} A (yx)^3. \end{cases}$$

Aus diesen Entwicklungen ergeben sich direct die vier ersten Glieder von (1). Man erhält:

$$(2)\quad \begin{cases} G_1 = \frac{3}{2}(k,l)^2 + \frac{1}{40} Ak + \frac{9}{10}\left\{(kk_1)^2 (ki)^2 k_x^2 k_{1x}^4 - \frac{1}{2} il\right\}, \\ G_2 = \frac{1}{2} i \cdot l + \frac{9}{20} Ak - \frac{3}{5} i \cdot (k,i)^2, \\ G_3 = i \cdot \left\{(k,i)^2 - \frac{1}{5} i^2\right\} - \frac{1}{2} A \cdot k, \\ G_4 = \frac{3}{2}(kk_1)^2 (ki)^2 k_x^2 k_{1x}^4 - \frac{3}{10} i \cdot (k,i)^2 + \frac{7}{20} A \cdot k. \end{cases}$$

Die weitern Glieder von (1) lassen sich mittelst des Identitätssatzes berechnen. Es ist:

$$2G_5 = i \cdot (ab)^4 (ai)(bi) a_x^2 b_x^2 = i \cdot \left\{(k,i)^2 - \frac{1}{5} i^2\right\},$$
$$G_6 = \frac{1}{2} A \cdot k,$$
$$G_7 = (ab)^2 (ai)^2 a_x b_x^3 \left\{(ai) b_x - i_x (ab)\right\}^2,$$
$$= (f,\varphi)^2 - 2(ab)^3 (ai_1)^2 (ai) a_x b_x^4 i_x + i \cdot (ab)^4 (ai)^2 a_x b_x^3.$$

Hierin haben gemäss den beiden vorletzten Relationen in (A) der zweite und dritte Term rechts die Werthe:

$$2 \cdot \left\{\tfrac{3}{2}\, i \cdot (k, i)^2 - \frac{Ak}{2} + \frac{i^3}{5}\right\}, \quad \text{resp.} \quad i \cdot \left\{(k, i)^2 + \tfrac{3}{10}\, i^2\right\}.$$

Demnach wird:

$$G_7 = (f, \varrho)^2 - 2i \cdot (k, i)^2 - \tfrac{1}{10}\, i^3 + A \cdot k.$$

Trägt man die so erhaltenen Werthe der $G_i$ in (1) ein, so kommt:

$$(3) \quad \begin{cases} r^2 = \frac{5}{4}\,(kk_1)^2\,(ki)^2\,k_x^2\,k_{1x}^4 - \frac{1}{2}\,(f, \varrho)^2 + \frac{25}{4}\,(k, l)^2 - \frac{7}{24}\,Ak, \\ \qquad\qquad - \frac{5}{8}\,il + \frac{3}{8}\,i(k, i)^2 + \frac{3}{40}\,i^3. \end{cases}$$

Durch zweimalige Ueberschiebung dieser Relation über $i$ ergiebt sich hieraus die weitere:

$$(4) \quad \begin{cases} r \cdot (r, i)^2 = -\frac{1}{2}\,p + \left(k, \frac{25}{4}\,v - \frac{5}{4}\,u - \frac{1}{2}\,Ai\right)^2 \\ \qquad\qquad - \frac{25}{24}\,A \cdot l + i \cdot \left\{\frac{Ai}{20} + \frac{u}{2} + \frac{5v}{2} - \frac{\tau}{2}\right\}. \end{cases}$$

Man hat hierbei insbesondere folgende schon früher entwickelte Formeln zu benützen:

$$(kk_1)^2\,(ki)^2\,(k_x^2 k_{1x}^4, i)^2 = (k, u)^2 - i\left(\tfrac{1}{50}\,Ai + \tfrac{8}{5}\,v\right) + \tfrac{2}{3}\,Al, \quad (\S 4, (7)\ \text{etc.})$$

$$((f, \varrho)^2, i)^2 = p - iu + \tfrac{2}{3}\,A \cdot (k, i)^2, \quad (\S 5, (6))$$

$$\left.\begin{aligned} (i \cdot l, i)^2 &= \tfrac{1}{3}\,Al + \tfrac{2}{5}\,iv, \\ (i \cdot (k, i)^2, i)^2 &= \tfrac{1}{3}\,A \cdot (k, i)^2 + \tfrac{2}{5}\,iu, \\ (i^3, i)^2 &= \tfrac{3}{5}\,Ai^2. \end{aligned}\right\} \quad (\S\ 1,\ (1)\ \text{u.}\ (3))$$

In Verbindung mit den aus den Reihen für $r_x^3 \cdot r_{1x} r_{1y}^3$ u. $(kl)^2 k_x^4 l_y^2$ sich direct ergebenden Relationen:

$$r \cdot (r, i)^2 = (r^2, i)^2 + \tfrac{1}{10}\,i\tau,$$

$$(k, v)^2 = ((k, l)^2, i)^2 + \tfrac{i}{25}\left\{\tfrac{2}{25}\,Ai + \tfrac{3}{5}\,u - 3v + \tfrac{12}{5}\,\tau\right\},$$

findet man alsdann die Relation (4) für die Form $r \cdot (r, i)^2$.

# Zweiter Theil.

## § 1.

### Relationen für eine Doppelwurzel von $f$.

Jeder Doppelfactor $a_x$ von $f$ ist gleichfalls Doppelfactor der Ausdrücke $(f, \alpha^n)^n$; insbesondere ist:

$$(1) \qquad (a\alpha)^5 a_x^2 = \lambda \alpha^2,$$

wobei $\lambda$ zwar von den $\alpha$ aber nicht von den $x$ abhängt. Aus dieser Formel lässt sich unmittelbar die andere ableiten:

$$\lambda \alpha (f, \alpha) - (a\alpha)^5 (ab)\, a_x b_x^6 = 0,$$

die mittelst der Reihenentwicklungen

$$(ab)\, a_y^5 a_x b_x^6 = \frac{5}{2} (f, f)_y^2 (yx) + \frac{5}{3} k_y^2 (yx)^3 + \frac{3}{28} i (yx)^5,$$

$$(ab)^2 a_y^4 a_x b_x^5 = (f, f)_y^2 + \frac{5}{3} k_y^2 (yx) + \frac{1}{7} i (yx)^4,$$

$$(ab)\, a_y^5 a_x b_x^6 = \frac{5}{2} (ab)^2 a_y^4 a_x b_x^5 (yx) - \frac{5}{2} k_y^2 (yx)^3 - \frac{1}{4} i (yx)^5,$$

$$(ab)(a\alpha)^5 a_x b_x^6 = \frac{5}{2} \alpha \cdot (ab)^2 (a\alpha)^4 a_x b_x^5 - \frac{5}{2} \alpha^3 \cdot (k, \alpha^2)^2 - \frac{i}{4} \cdot \alpha^3$$

in diese übergeht:

$$(2) \quad \lambda (f, \alpha) + \frac{5}{2} (ab)^2 (a\alpha)^4 a_x b_x^5 - \frac{5}{2} \alpha^2 (k, \alpha^2)^2 - \frac{1}{4} \alpha^3 i = 0.$$

Diese Formel giebt 7 Relationen zwischen den Grössen $\alpha$ und $\lambda$, in den ersteren vom 4ten Grade. Unser Bestreben wird zunächst dahin gehen, Combinationen dieser 7 Relationen zu bilden, welche $\lambda$ nicht enthalten. Um diesen Zweck zu erreichen, wollen wir einfachere Relationen zwischen $\lambda$ und $\alpha$ dadurch ableiten, dass wir (2) erst 6 mal und dann auch 5 mal über $f$ schieben.

1) Durch sechsmalige Ueberschiebung entsteht die Formel:

$$\lambda (ab)^6 (a\alpha) b_x + \frac{5}{2} (ab)^2 (ac)(bc)^5 (a\alpha^4) c_x$$

$$- \frac{5}{2} (ak)^4 (a\alpha)^2 (k\alpha)^2 k_x - \frac{1}{4} (ai)^2 (a\alpha)^4 a_x = 0.$$

Mittelst Reihenentwicklungen für

$$(ab)^6 a_y b_x, \quad (bc)^5 b_y^2 c_y c_x, \quad (ak)^4 a_y^2 k_y^2 a_x$$

geht sie über in:

$$(3) \qquad \lambda (i, \alpha) = (ai)^2 (a\alpha)^4 a_x + \alpha (r\alpha)^3.$$

Durch abermalige Ueberschiebung dieser Relation über $i$ erhält man:

$$(4) \qquad \frac{\lambda}{2} A \cdot \alpha = (ai_1)^2 (ai) (a\alpha)^4 i_x - (r\alpha)^3 \cdot (i, \alpha).$$

Dagegen erhält man durch fünfmalige Ueberschiebung von (2) über $f$ die Relation:

$$0 = 6\lambda(a\alpha)(ab)^5 a_x b_x^2 + \frac{5}{2}(ab)^2(a\alpha)^4 c_x^2 \{6 a_x (bc)^3 + 5(ab)(bc)^4 c_x\}$$
$$+ 5(k\alpha)^2 \{3(k\alpha)^4 (a\alpha)\alpha_x + (ak)^3 (k\alpha)(a\alpha) a_x\} a_x^2$$
$$+ \frac{1}{2} a_x^2 \{2(a\alpha)^2 (ai)\alpha_x + (a\alpha)^4 (ai) i_x\}.$$

Dieselbe geht mit Hülfe der Identitäten:

$$(bc)^5 b_y^2 c_x^2 = i_y (yx),$$
$$(bc)^4 b_y^3 c_x^3 = k_{y^3} + \frac{9}{10} i_y (yx)^2,$$
$$(ak)^4 a_x^2 a_y k_y^2 = -\frac{1}{5}(ai)^2 a_y^3 a_x^2 + \frac{4}{5} r_{y^2}(yx),$$
$$(ak)^3 a_x^3 a_y k_y^3 = \frac{1}{10}(ai) a_y^3 a_x^3 i_y + \frac{3}{10}(ai)^2 a_y^3 a_x^2 (yx) - \frac{3}{5} r_{y^2}(yx)^2$$
$$= \frac{1}{10}(ai) a_y^4 a_x^2 i_x + \frac{1}{5}(ai)^2 a_y^3 a_x^2 (yx) - \frac{3}{5} r_{y^3}(yx)^2,$$
$$(ak)^3 a_y^4 k_x^3 = \frac{1}{10}(ai) a_y^4 a_x^2 i_x - \frac{2}{5}(ai)^2 a_y^3 a_x^2 (yx) - \frac{6}{5} r_y^2 r_x (yx)^2,$$
$$(ab)^3 (bc)^4 (a\alpha)^4 c_x^3 = (ak)^3 (a\alpha)^4 k_x^3 + \frac{9}{10}(ai)(a\alpha)^4 a_x^2 i_x$$
$$= (ai)(a\alpha)^4 a_x^2 i_x - \frac{2}{5}\alpha(ai)^2 (a\alpha)^3 a_x^2 - \frac{6}{5}\alpha^2 (r\alpha)^2 r_x$$

in diese über:

$$0 = \begin{cases} 3\lambda\alpha i - 15(a\alpha)^4 (ai) a_x^2 i_x \\ + \frac{25}{2}\left((ai)(a\alpha)^4 a_x^2 i_x - \frac{2}{5}\alpha(ai)^2 (a\alpha)^3 a_x^2 - \frac{6}{5}\alpha^2 (r\alpha)^2 r_x\right) \\ + 15\alpha\left(-\frac{1}{5}(ai)^2 (a\alpha)^3 a_x^2 - \frac{4}{5}\alpha(r\alpha)^2 r_x\right) \\ + 10\left(\frac{1}{10}(ai)(a\alpha)^4 a_x^2 i_x + \frac{\alpha}{5}(ai)^2 (a\alpha)^3 a_x^2 - \frac{3}{5}\alpha^2 (r\alpha)^2 r_x\right) \\ + \alpha(a\alpha)^3 (ai)^2 a_x^2 + \frac{1}{2}(a\alpha)^4 (ai) a_x^2 i_x, \end{cases}$$

oder:

$$(5) \qquad \lambda\alpha i = \frac{1}{8}(a\alpha)^4 (ai) i_x a_x^2 + \frac{5}{3}\alpha(a\alpha)^3 (ai)^2 a_x^2 + 3\alpha^2 (r\alpha)^2 r_x.$$

Um diese Formel weiter zu vereinfachen, will ich sie 1 und 2 mal über $i$ schieben.

## § 2.

### Ueberschiebung von $\lambda i\alpha$ über $i$.

1) Durch Polarenbildung und einmalige Ueberschiebung von $i$ über (5), § 1 entstehen die Formeln: (vgl. auch § 1, (3))

$$\lambda(2\alpha_x i_x i_y + i\alpha_y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(ai)(a\alpha)^4(3a_x^2 i_y + 2(ai)a_x(yx)) \\ + \frac{5}{3}(ai)^2(a\alpha)^3(3a_x a_y \alpha_x - (a\alpha)a_x(yx)) \\ + 3(r\alpha)^2(3r_y\alpha_x^2 - 2(r\alpha)\alpha_x(yx)), \end{cases}$$

$$0 = \begin{cases} ((ai)^2(a\alpha)^4 a_x + \alpha(r\alpha)^3)i \\ + \frac{1}{3}(ai)(a\alpha)^4 i_{1,x}(3a_x^2(ii_1) + 2(ai)a_x i_{1,x}) \\ + \frac{5}{3}(ai_1)^2(a\alpha)^3 i_x(3a_x(ai)\alpha - (a\alpha)a_x i_x) \\ + 3(r\alpha)^2(3(ri)\alpha^2 i_x - 2i(r\alpha)\alpha), \end{cases}$$

oder:

$$0 = -5i(r\alpha)^3\alpha - \frac{A}{2}(a\alpha)^4 a_x^3 + 5(ai_1)^2(ai)(a\alpha)^3 a_x i_x \alpha + 9\alpha^2(r\alpha)^2(ri)i_x,$$

oder:

(1) $$A(a\alpha)^4 a_x^3 = (10(ai_1)^2(ai)(a\alpha)^3 a_x i_x - 10i(r\alpha)^3 + 18\alpha(r\alpha)^2(ri)i_x)\alpha.$$

Durch diese Formel ist die im § 1 ausgesprochene Absicht erreicht, sie liefert 4 Relationen $4^{\text{ten}}$ Grades für die $\alpha$.

2) Bildet man nun die zweite Polare von Formel (5), § 1 und überschiebt sie zweimal über $i_y^2$ hinsichtlich $y$, so kommt:

$$\lambda(\alpha i_y^2 + 2\alpha_y i_y i_x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(a\alpha)^4(ai)(a_y^2 i_x + 2a_x a_y i_y) \\ + \frac{5}{3}(a\alpha)^3(ai)^2(3a_y^2\alpha_x - 2(a\alpha)a_y(yx)) \\ + 3(r\alpha)^2(3\alpha_y r_y \alpha_x - (r\alpha)\alpha_y(yx)), \end{cases}$$

$$\lambda(A\alpha - 2(ii_1)(i_1\alpha)i_x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(a\alpha)^4(ai)((ai_1)^2 i_x + 2a_x(ai_1)(ii_1)) \\ + \frac{5}{3}(a\alpha)^3(ai_1)^2(3\alpha(ai)^2 - 2(a\alpha)(ai)i_x) \\ + 3(r\alpha)^2(-3\alpha(ri)(i\alpha) + (r\alpha)(i\alpha)i_x). \end{cases}$$

Hierzu addire ich die Formel: (§ 1, (4))

(2) $$\frac{3}{2}\lambda A\alpha = 3(ai_1)^2(ai)(a\alpha)^4 i_x - 3(r\alpha)^3(i,\alpha)$$

und erhalte, wenn ich mit $\alpha$ dividire:

(3) $$\frac{7}{2}\lambda A = (5\varrho - 9(r,i),\alpha^3)^3.$$

Aus den Formeln (2) und (3) ergiebt sich diese:

$$\frac{9}{2}\lambda A\alpha = (10\varrho - 18(r,i),\ \alpha^3)^3\alpha - 5((ai_1)^2(ai)(a\alpha)^4 i_x - (r\alpha)^3(i,\alpha))$$
$$= \Big(\alpha(10(ai_1)^2(a\alpha)^3(ai)a_x + 18(r\alpha)^2(ri)\alpha_x - 10(r\alpha)^3 i_x),\ i_x\Big)$$

und demnach, wenn man die Polare von (1) dieses Paragraphen bildet:

(4) $$A(a\alpha)^4 a_x^2 a_y =$$
$$= \alpha\Big(i_y(10(ai_1)^2(ai)(a\alpha)^3 a_x + 10(ra)^2(ri)\alpha - 10(r\alpha)^3 i_x) + 3\lambda A(yx)\Big).$$

## § 3.

## Die Form $m_y^3 n_x^2$.

Einige der von uns aufgestellten Formeln schreiben sich einfacher, wenn man neue Symbole einführt. Ich wähle als solche die der Form:

(1) $$m_y^3 n_x^2 = 5(ai)^2 a_y^3 a_x^2 + 9 r_y^2 r_x (yx).$$

Zunächst ersetze ich die $x$ durch die Symbole $i$ und erhalte:

(2) $$m_y^3 (ni)^2 = 5\varrho_y^3 - 9(ri) r_y^2 i_y$$

und nach § 2, (3):

(3) $$(m\alpha)^3 (ni)^2 = \frac{7}{2}\lambda A.$$

Bildet man ferner die Polare von (1), so wird:

(4) $$m_y^3 n_x n_z = 5(ai)^2 a_y^3 a_x a_z + 9 r_y^2 r_z (yx) - \frac{9}{2} r_y^3 (zx).$$

Hieraus lässt sich die Formel ableiten:

(5) $$m_y^3 n_x (ni) i_z = 5(ai_1)^2 a_y^3 (ai) a_x i_z + 9 r_y^2 (ri)(yx) i_z - \frac{9}{2} r_y^3 i_y i_z$$

und wenn man $y$ durch $\alpha$ ersetzt:

(6) $$(m\alpha)^3 (ni) n_x i_z = 5(ai_1)^2 (ai)(a\alpha)^3 a_x i_z + 9\alpha(r\alpha)^2 (ri) i_z - \frac{9}{2}(r\alpha)^3 i_x i_z.$$

Die von uns entwickelten Formeln:

$$\frac{\lambda}{2} A\alpha = (ai_1)^2 (ai)(a\alpha)^4 i_x - (r\alpha)^3 (i,\alpha), \qquad \S\,1,\ (4)$$

$$A(a\alpha)^4 a_x^3 = \alpha(10(ai_1)^2(ai)(a\alpha)^3 a_x i_x + 18\alpha(r\alpha)^2(ri) i_x - 10(r\alpha)^3 i), \quad \S 2,\ (1)$$

$$A(a\alpha)^4 a_x^2 a_y = \alpha\Big(i_y(10(ai_1)^2(ai)(a\alpha)^3 a_x + 18\alpha(r\alpha)^2(ri)$$
$$- 10(r\alpha)^3 i_x) + 3\lambda A(yx)\Big)$$

nehmen in der neuen Bezeichnung nach (3) und (6) dieses Paragraphen die Form an:

(7) $$\frac{2}{7}(m\alpha)^3 (ni)^2 \alpha + (m\alpha)^3 (ni)(i\alpha) n_x - \frac{1}{2}(r\alpha)^3 (i,\alpha) = 0,$$

$$(8)\quad A(a\alpha)^4 a_x^3 = \alpha\big(2(m\alpha)^3(ni)n_x i_x - ;\ (r\alpha)^3\big),$$

$$(9)\quad A(a\alpha)^4 a_x^2 a_y = \alpha\Big(i_y\big(2(m\alpha)^3(ni)n_x - i_x(r\alpha)^3\big) + \tfrac{6}{7}(m\alpha)^3(ni)^2(yx)\Big).$$

Hierin ist insbesondere in (8) eine biquadratische Relation für $\alpha$ gegeben.

## § 4.

## Cubische Relationen für die Doppelwurzel $\alpha$.

Aus der Formel (8) § 3 erhalten wir cubische Relationen, wenn wir sie einmal über $f$ schieben.

Aus (9) § 6 folgt diese:

$$A(a\alpha)^4 a_x^2(ab)b_x^6 +$$
$$+\alpha\Big((fi)\big(2(m\alpha)^3(ni)n_x - i_x(r\alpha)^3\big) - \tfrac{6}{7}(m\alpha)^3(ni)^2 f\Big) = 0.$$

Zur Umformung benutzen wir die Identitäten:

$$(ab)a_y^4 a_x^2 b_x^6 = 2(f,f)^2_{y^2}(yx) + \tfrac{2}{3}k_y(yx)^3,$$
$$(ab)^2 a_y^3 a_x^2 b_x^5 = (f,f)^2_{y^2} + \tfrac{5}{6}k_y(yx)^2,$$
$$(ab)a_y^4 a_x^2 b_x^5 = 2(ab)^2 a_y^3 a_x^2 b_x^5(yx) - k_y(yx)^3,$$
$$(ab)(a\alpha)^4 a_x^2 b_x^5 = 2\alpha(ab)^2(a\alpha)^3 a_x^2 b_x^5 - \alpha^3(k,\alpha),$$

dividiren mit $\alpha$ und ersetzen $x$ durch $y$; es wird dann:

$$(1)\quad 0 = -\tfrac{6}{7}(m\alpha)^3(ni)^2 a_y^7 - (r\alpha)^3(ai)a_y^6 i_y + 2(m\alpha)^3(ai)(ni)a_y^6 n_y$$
$$+ A\{2(ab)^2(a\alpha)^3 a_y^5 b_y^2 - (k\alpha)k_y^5\alpha_y^2\};$$

Diese Formel liefert 8 cubische Relationen zwischen den $\alpha$. Setzt man:

$$(2)\quad -\tfrac{6}{7}(m\alpha)^3(ni)^2 a_y^7 - (r\alpha)^3(ai)a_y^6 i_y + 2(m\alpha)^3(ai)(ni)a_y^6 i_y = F_1,$$
$$(3)\quad 2(ab)^2(b\alpha)^3 a_y^5 b_y^2 - (k\alpha)k_y^5\alpha_y^2 = F_2$$

so wird aus Formel (1):

$$(4)\quad F_1 + AF_2 = 0.$$

Wir werden diese Formel später über mehrere Formen schieben; um diess leichter ausführen zu können, wollen wir die 1ten und 2ten Polaren einiger ihrer Glieder bilden. Es ist:

$$7\big((ai)a_y^6 i_y\big)_z = (ai)(a_y^6 i_z + 6a_y^5 a_z i_y),$$
$$7\big((m\alpha)^3(ni)(ai)a_y^6 n_y\big)_z = (m\alpha)^3(ai)(ni)(6a_y^5 a_z n_y + a_y^6 n_z),$$
$$(7)\quad 7\big((ab)^2(b\alpha)^3 a_y^5 b_y^2\big)_z = (ab)^2(b\alpha)^3(5a_y^4 a_z b_y^2 + 2a_y^5 b_y b_z),$$
$$7\big((k\alpha)k_y^5\alpha_y^2\big)_z = (ka)(5k_y^4 k_z\alpha_y^2 + 2k_y^5\alpha_y\alpha_z)$$
$$= (ka)(7k_y^5\alpha_y\alpha_z + 5k_y^4(k\alpha)(sy)\alpha_y),$$

$$21\,((ab)^2(b\alpha)^3a_y^5b_y^2)_{z^2} = (ab)^2(b\alpha)^3(a_y^5b_y^2+10a_y^4a_zb_yb_z+10a_y^3a_z^2b_y^2)$$
$$= (ab)^2(b\alpha)^3\Big(a_y^5b_z^2+10\big(a_y^4b_za_yb_z+(ab)(zy)\big)$$
$$+10a_y^3(a_yb_z+(ab)(zy))\Big)^2$$

(8)
$$7\,((ab)^2(b\alpha)^2a_y^5b_{y^2})_{z^2} = (ab)^2(b\alpha)^3\Big(7a_y^5b_z^2+10a_y^4b_z(ab)(zy)$$
$$+\tfrac{10}{3}a_y^3(ab)^2(zy)^2\Big),$$
$$7\,((k\alpha)k_y^5\alpha_{y^2})_{z^2} = (k\alpha)\Big(7k_y^5\alpha_z^2+10(k\alpha)k_y^4\alpha_z(zy)$$
$$+\tfrac{10}{3}(k\alpha)^2k_y^3(zy)^2\Big).$$

Die 8 Relationen der $\alpha$, welche in der Formel:

$$F_1 + AF_2 = 0$$

enthalten sind, sind nicht von einander unabhängig; es giebt 4 Combinationen von ihnen, welche für alle Werthe von $\alpha$ identisch erfüllt sind. Dies folgt aus den beiden Relationen

(9)
$$\begin{cases}(F_1+AF_2, f)^7 = 0,\\ (F_1+AF_2, f)^6 = 0,\end{cases}$$

deren Richtigkeit wir in den beiden folgenden Paragraphen beweisen wollen.

## § 5.

### Die $6^{te}$ und $7^{te}$ Ueberschiebung von $F_1 + AF_2$ über $f$.

1) *Berechnung von* $(F_1, f)^7$ *und* $(F_2, f)^7$. Die Ueberschiebungen $(F_1, f)^7$ und $(F_2, f)^7$ haben die Werthe:

$$(F_1, f)^7 = -\tfrac{6}{7}(m\alpha)^3(ni)^2(ab)^7 - (r\alpha)^3(ai)(ab)^6(ib)$$
$$+2(m\alpha)^3(ni)(ai)(ab)^6(nb)$$
$$= -(r\alpha)^3(i_1i)(ii_1)+2(m\alpha)^3(ni)(i_1i)(ni_1),$$
$$(F_1, f)^7 = A(r\alpha)^3, \qquad (1)$$
$$(F_2, f)^7 = 2(ab)^2(b\alpha)^3(ac)^5(bc)^2 - (k\alpha)(ka)^5(a\alpha)^2 = -(r\alpha)^3$$

mithin ist die erste der Formeln (9) § 4

$$(F_1+AF_2, f)^7 = 0$$

bewiesen.

2) *Berechnung von* $(F_1, f)^6$ *und* $(F_2, f)^6$. Die Ueberschiebung $(F_1, f)^6$ hat den Werth:

$$7(F_1, f)^6 = \begin{cases}-6(m\alpha)^3(ni)^2(ab)^6a_yb_y-(r\alpha)^3(ai)b_y\big((ab)^6i_y+6(ab)^5(ib)a_y\big)\\ +2(m\alpha)^3(ni)(ai)b_y\big((ab)^6n_y+6(ab)^5(nb)a_y\big)\end{cases}$$
$$= \begin{cases}-6i_y^2(m\alpha)^3(ni)^2-(r\alpha)^3(i_1i)i_{1,y}i_y+2(m\alpha)^3(ni)(i_1i)i_{1,y}n_y\\ +6(m\alpha)^3(ni)^2(ab)^6a_yb_y,\end{cases}$$
$$7(F_1, f)^6 = A(m\alpha)^3n_y^2. \qquad (2)$$

Hieraus folgt die Formel

$$(3) \qquad 7(F_1 a)^6 F_{1,y} a_x = A(m\alpha)^3 n_y n_x + \frac{7}{2} A(r\alpha)^3 (yx).$$

Die Ueberschiebung $(F_2, f)^6$ hat den Werth:

$$7(F_2, f)^6 = 2(ab)^2(b\alpha)^3 c_y (2(ac)^5(bc) b_y + 5(ac)^4(bc)^2 a_y) - (k\alpha) a_y (7(ka)^5(\alpha a) a_y - 5(ka)^4(\alpha a)^2 (k\alpha) a_y).$$

Um ihn zu reduciren bedienen wir uns der Formeln:

$$(ac)^4 a_y c_y a_x^2 c_x^2 = k_y^2 - \frac{i}{5}(yx)^2,$$

$$(ka)^4 k_y^2 a_x^3 = -\frac{1}{5}(ai)^2 a_y^2 a_x^3 + \frac{6}{5} r_y (yx),$$

$$(ak)^4 a_x a_y^2 k_x^2 = -\frac{1}{5}(ai)^2 a_y^2 a_x^3 - \frac{4}{5} r_y (yx),$$

$$(ac)^4 (ab)^2 (bc)^2 a_y c_y (b\alpha)^3 = \left((bk)^4 k_y^2 - \frac{1}{5}(bi)^2 b_y^2\right)(b\alpha)^3 = -\frac{2}{5}(ai)^2 (a\alpha)^3 a_y^2 - \frac{6}{5}(r\alpha)^2 r_y \alpha_y.$$

Es wird dann:

$$7(F_2, f)^7 = \begin{cases} -2(a\alpha)^3 (ai)^2 a_y^3 + 10\left(-\frac{2}{5}(ai)^2 (a\alpha)^3 a_y^2 - \frac{6}{5}(r\alpha)^2 r_y \alpha_y\right) \\ +7(r\alpha)^2 r_y \alpha_y - 5\left(-\frac{1}{5}(ai)^2 (a\alpha)^3 a_y^2 + \frac{4}{5}(r\alpha)^2 r_y \alpha_y\right) \end{cases}$$

$$= -5(\alpha i)^2 (a\alpha)^3 a_y^2 - 9\alpha_y (r\alpha)^2 r_y$$

also nach § 6 Formel (1):

$$7(F_2, f)^7 = -(m\alpha)^3 n_y^2$$

wodurch auch die 2te der Formeln (9) § 4 bewiesen ist.

## § 6.

## Weitere Ueberschiebungen von $F_1 + AF_2$.

Es giebt Combinationen der in (4) § 4 enthaltenen cubischen Relationen der $\alpha$, welche auf quadratische reducibel sind.

Ersetzt man nämlich in $F_1$ und $F_2$ die $\alpha$ durch $x$, so erhält man die Ausdrücke:

$$(1) \qquad G_1 = -\frac{6}{7} m_x^3 (ni)^2 a_y^7 - r(ai) a_y^6 i_y + 2 m_x^3 (ni)(ai) a_y^6 n_y,$$

$$(2) \qquad G_2 = 2(ab)^2 b_x^3 b_y^2 a_y^5 - k_y^5 k_x (yx)^2.$$

Die Formel:

$$(3) \qquad (F_1 + AF_2,\ G_1 + AG_2)^7 = 0$$

hat den Factor $\alpha_x$ liefert also quadratische Relationen.

Um sie umzuformen bemerke ich, dass nach (9) § 4

$$(F_1 + AF_2,\ G_1)^7 = 0,$$
$$(F_1,\ G_1 + AG_2)^7 = 0,$$

ist; ich ziehe diese Formeln von Formel (3) ab und erhalte:

(4) $$-(F_1, G_1)^7 + A^2(F_2, G_2)^7 = 0.$$

Es sind jetzt diese beiden Ueberschiebungen zu berechnen.

## § 7.

## Berechnung von $(F_1, G_1)^7$.

Die Ueberschiebung $(F_1, G_1)^7$ hat den Werth:

$$(F_1, G_1)^7 = \frac{6}{7} m_x^3 \cdot (ni)^2 \cdot (F_1 a)^7 - r \cdot (ai)(F_1 a)^6 (F_1 i)$$
$$+ 2 m_x^3 (ni)(ai)(F_1 a)^6 (F_1 n).$$

Ich transformire ihn mittelst der Formeln (1), (2), (3) § 5 nämlich:

$$(F_1 a)^7 = A(r\alpha)^3,$$
$$7(F_1 a)^6 a_y F_{1,y} = A(m\alpha)^3 n_y^2,$$
$$7(F_1 a)^6 a_z F_{1,y} = A\left((m\alpha)^3 n_y n_z + \frac{7}{2}(r\alpha)^3 (zy)\right)$$

und erhalte:

$$7(F_1, G_1)^7 = A\left\{-6(r\alpha)^3 m_x^3 (ni)^2 - r(m\alpha)^3 (ni)^2\right.$$
$$\left. + 2 m_x^3 (ni)\left((m_1\alpha)^3 (in_1)(nn_1) + \frac{7}{2}(r\alpha)^3 (ni)\right)\right\}$$
$$= A\left\{(ni)^2\left((r\alpha)^3 m_x^3 - r_x^3 (m\alpha)^3\right) + 2(m\alpha)^3 m_{1,x}^3 (nn_1)(ni)(n_1 i)\right\}$$

und wenn ich die Elementarcovarianten:

(1) $$(mr)(ni)^2 m_x^2 r_x^2 - (m m_1)(nn_1)(ni)(n_1 i) m_x^2 m_{1,x}^2 = q,$$

(2) $$(mr)^3 (ni)^2 - (m m_1)^3 (nn_1)(ni)(n_1 i) = J$$

setze, dann kommt:

(3) $$7(F_1, G_1)^7 = -A\alpha\left(3(q, \alpha^2)^2 + \frac{1}{2} J\alpha^2\right).$$

## § 8.

## Berechnung von $(F_2, G_2)^7$.

Die Ueberschiebung der Formen:

$$F_2 = 2(ab)^2 (b\alpha)^3 a_y^5 b_y^2 - k_y^5 (k\alpha)\alpha_y^2,$$
$$G_2 = 2(ab)^2 b_x^3 a_y^5 b_y^2 - k_x k_y^5 (yx)^2$$

besteht aus 4 Gliedern, die ich durch $A_{ix}$ bezeichnen will:

(1) $$7(F_2, G_2)^7 = 4A_{11} - 2A_{12} - 2A_{21} + A_{22}.$$

Durch Vertauschung von $\alpha$ mit $x$ und Aenderung des Vorzeichens geht $A_{12}$ in $A_{21}$ über. Die $A_{ix}$ haben (vgl. § 4, (8)) die Werthe:

$$(2)\begin{cases} A_{11} = (ab)^2(cd)^2(b\alpha)^3 d_x^3 \big(7(ac)^5(bd)^2 \\ \quad -10(ac)^4(bd)(ab)(cd) + \frac{10}{3}(ac)^3(ab)^2(cd)^2\big), \\ A_{12} = (ab)^2(b\alpha)^3 k_x \big(7(ak)^5 b_x^2 \\ \quad -10(ak)^4(ab)b_x k_x + \frac{10}{3}(ak)^3(ab)^2 k_x^2\big), \\ A_{22} = (k\alpha)k_{1,x}\big(7(kk_1)^5\alpha_x^2 - 10(kk_1)^4(k\alpha)k_{1,x}\alpha_x + \frac{10}{3}(kk_1)^3(k\alpha)^2 k_{1,x}^2\big). \end{cases}$$

Wir wollen dieselben mittelst dieser Hülfsformeln auf einfachere Ausdrücke reduciren:

$$(ab)^5 a_y^2 b_x^2 = i_y(yx),$$

$$(ab)^4 a_y^3 b_x^3 = k_{y^3} + \frac{9}{10} i_y(yx)^2,$$

$$(ab)^4 a_y^2 a_z b_x^3 = k_{y^2z} + \frac{9}{10} i_z(yx)^2 - \frac{3}{5} i(yz)(yx),$$

$$(ab)^4 a_y^3 b_x^2 b_z = k_{y^2z} + \frac{9}{10} i_y i_z (yx)^2 - \frac{3}{5} i_y^2 (yx)(zx),$$

$$(ab)^3 a_y^4 b_x^4 = 2k_{y^3}(yx) + \frac{4}{5} i_y(yx)^3,$$

$$(ab)^3(ai)(bi)a_y^3 b_x^3 = (yx)\Big(\frac{3}{2}\Big((k,i)^2 - \frac{i^2}{5}\Big)_{y^3} + \frac{A}{4}(yx)^2\Big).$$

$$(ax)^4 a_y^3 k_x^2 = -\frac{1}{5}(ai)^2 a_y^3 a_x^2 - \frac{6}{5} r_{y^2}(yx),$$

$$(ax)^3 a_y^4 k_x^3 = \frac{1}{10}(ai)a_y^4 a_x^2 i_x - \frac{2}{5}(ai)^2 a_y^3 a_x^2 (yx) - \frac{6}{5} r_{y^3}(yx)^2,$$

$$(ax)^3 a_y^3 a_x k_x^3 = \frac{1}{10}(ai)a_y^3 a_x^3 i_x - \frac{3}{10}(ai)^2 a_y^2 a_x^3 (yx) - \frac{3}{5} r_y (yx)^2.$$

$$(ar)^2 a_y^2 r_y a_x^3 = \frac{1}{2}(k,i)_{y^3} + \frac{1}{2}\Big(\frac{5}{2} l - \frac{i^2}{10}\Big)_{y^2}(yx),$$

$$(ki)k_x^3 k_y^2 i_y = (k,i)_{y^3} - \frac{1}{2}(k,i)_{y^2}^2 (yx),$$

$$(ar)^2 a_y^2 r_y a_x^3 = \frac{1}{2}(ki)k_x^3 k_y^2 i_y + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(k,i)^2 + \frac{5}{2} l - \frac{i^2}{10}\Big)_{y^2}(yx),$$

$$(ar)^2 a_y^3 a_x^2 r_x = \frac{1}{2}(ki)k_x^2 k_y^3 i_x - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(k,i)^2 + \frac{5}{2} l - \frac{i^2}{10}\Big)_{y^2}(yx),$$

$$(ki)k_y^3 k_x^2 i_x = (k,i)_{y^3} + \frac{1}{2}(k,i)_{y^2}^2 (yx).$$

$$(kk_1)^4 k_y^2 k_{1,x}^2 = l_{y^3} + \frac{1}{30} A(yx)^2,$$

$$(kk_1)^3 k_y^3 k_{1,x}^2 = l_{y^3}(yx) + \frac{1}{40} A(yx)^3.$$

In dieser Weise gelangen wir zu den Werthen der $A_{ix}$:

$$A_{11}=(b\alpha)^3 d_x{}^3\begin{cases}7(bd)^2(bi)(di)-10(bd)\left((bk)^3(dk)^3+\frac{9}{10}(bd)^2(bi)(di)\right)\\ +\frac{10}{3}\left(2(bd)(bk)^3(dk)^3+\frac{4}{5}(bd)^3(bi)(di)\right)\end{cases}$$

$$=(a\alpha)^3 b_x{}^3\left(\frac{10}{3}(ab)(ak)^3(kb)^3+\frac{2}{3}(ab)^3(ai)(bi)\right)$$

$$=b_x{}^3\begin{cases}\frac{10}{3}\left(-\frac{1}{10}(ai)(a\alpha)^3(bi)(ab)^3+\frac{3}{10}(ai)^2(a\alpha)^2(ab)^3(b\alpha)\right)\\ +\frac{2}{3}(ab)^3(ak)^3(ai)(bi)-\frac{1}{2}(r\alpha)(br)^2(b\alpha)^2\end{cases}$$

oder:

$$A_{11}=b_x{}^3\Big(\frac{1}{3}(ab)^3(a\alpha)^3(ai)(bi)+(ai)(a\alpha)^2(ab)^3((a\alpha)(bi)+(ab)(ia))$$
$$-2(r\alpha)(br)^2(b\alpha)^2\Big)$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{3}\alpha\left(\frac{3}{2}\left((k,i)^2-\frac{i^2}{5},\alpha^2\right)^2+\frac{1}{4}A\alpha^2\right)\\ +(k\alpha)^2(ki)k_x{}^3(i\alpha)+\frac{9\alpha^2}{10}(i\alpha)i_1 i)i_{1,x}\\ +\frac{3}{5}(i\alpha)^2 i\alpha-(k\alpha)^2(ki)(i\alpha)k_x{}^3-\alpha\left(\frac{1}{2}(k,i)^2+\frac{5}{2}l-\frac{i^2}{10},\alpha^2\right)^2,\end{cases}$$

oder endlich:

$$A_{11}=\alpha\left\{\left(\frac{3}{2}(k,i)^2-\frac{5}{2}l+\frac{3}{10}i^2,\alpha^2\right)^2+\frac{A}{12}\alpha^2\right\},\qquad(3\,a)$$

$$A_{12}=(b\alpha)^3\begin{cases}-7(br)^2 b_x{}^3 r_x+2(ai)^2(ab)^3 a_x{}^2 b_x+12(br)^2 b_x{}^2 r_x\\ +\frac{1}{3}(ab)^4(ai)a_x{}^2 i_x-\frac{4}{3}(ai)^2(ab)^3 a_x{}^2 b_x-4(br)^2 b_x{}^2 r_x\end{cases}$$

$$=(b\alpha)^3\Big((br)^2 b_x{}^2 r_x+\frac{2}{3}(ai)(ab)^3 a_x{}^2(a_x(bi)+i_x(ab))$$
$$+\frac{1}{3}(ab)^4(ai)a_x{}^2 i_x\Big)$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{2}(ki)(k\alpha)^3 a_x{}^2 i_x-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2}(k,i)^2+\frac{5}{2}l-\frac{i^2}{10},\alpha^2\right)^2\\ -\frac{2}{3}\alpha\left(\frac{3}{2}\left((k,i)^2-\frac{i^2}{5},\alpha^2\right)^2+\frac{A}{4}\alpha^2\right)\\ +\frac{9}{10}\alpha^2(i\alpha)(ii_1)i_{1,x}-\frac{3}{5}(i\alpha)^2 i\alpha\end{cases}$$

$$=\left(\frac{3}{2}((k,i),\alpha^3)^3+\frac{\alpha}{2}(k,i)^2,\alpha^2\right)^2-\alpha\left(\frac{5}{4}(k,i)^2+\frac{5}{4}l+\frac{7}{20}i^2,\alpha^2\right)^2+\frac{A}{12}\alpha^3,$$

oder endlich:

$$A_{12}=\frac{3}{2}((k,i),\alpha^3)^3-\frac{\alpha}{2}\left((k,i)^2+\frac{5}{2}l+\frac{7}{10}i^2,\alpha^2\right)^2+\frac{A}{12}\alpha^3,\qquad(3\,b)$$

(3c) $A_{21} = -\frac{3}{2}((k,i),\alpha^3)^3 - \frac{\alpha}{2}\left((k,i)^2 + \frac{5}{2}l + \frac{7}{10}i^2, \alpha^2\right)^2 + \frac{A}{12}\alpha^3.$

$$A_{22} = \frac{7}{20}A\alpha^3 - 10\alpha\left((l,\alpha^2)^2 + \frac{A}{30}\alpha^2\right) + \frac{10}{3}\alpha\left(\frac{3}{2}(l,\alpha^2)^2 + \frac{A}{40}\alpha^2\right),$$

(3d) $$A_{22} = \alpha\left(-5(l,\alpha^2)^2 + \frac{A}{10}\alpha^2\right).$$

Trägt man die Werthe der $A_{ix}$ aus (3) in (1) ein, so wird:

$$7(F_2, G_2)^7 = \alpha\left(8(k,i)^2 - 10l + \frac{13}{5}i^2, \alpha^2\right)^2 + \frac{A}{10}\alpha^3$$

und, wenn man:

(4) $$8(k,i)^2 - 10l + \frac{13}{5}i^2 = h$$

setzt:

(5) $$7(F_2, G_2)^7 = \alpha\left((h,\alpha^2)^2 + \frac{A}{10}\alpha^2\right).$$

## § 9.

## Bedingungen für die Doppelwurzel.

Wir hatten in den letzten Untersuchungen erhalten:

$$7(F_1, G_1)^7 = -A\alpha\left\{3(g,\alpha^2)^2 + \frac{1}{2}J\alpha^2\right\}, \qquad \text{§ 7, (3)}$$

$$7(F_2, G_2)^7 = \alpha\left\{(h,\alpha^2)^2 + \frac{A}{10}\alpha\right\}. \qquad \text{§ 8, (5)}$$

Tragen wir diese Werthe in die Formel (4), § 6 ein, so kommt:

(1) $$(3q + Ah, \alpha^2)^2 + \alpha^2 \cdot \left\{\frac{J}{2} + \frac{A^2}{10}\right\} = 0.$$

Vergleichen wir diese Relation mit der Relation

(2) $$(a_x^4, \alpha^2)^2 + \alpha^2 \cdot \varrho = 0,$$

welche unter der Bedingung besteht, dass die biquadratische Form $f = a_x^4$ eine Doppelwurzel $\alpha$ besitzt (vergl. a. a. O. Bd. II, Seite 191, (2)), so gewinnen wir folgende Methode zur Elimination von $\alpha$ aus Gleichung (1). In der Theorie der biquadratischen Form wurden aus der Relation (2) die Beziehungen abgeleitet:

$$\frac{i^2}{6} = -\varrho j, \quad j = -i\varrho \qquad \text{(vgl. S. 192 a. a. O.)}$$

oder

$$i - 6\varrho^2 = 0.$$

Analog erhalten wir demnach hier die Bedingung

(3) $$(3q + Ah,\ 3q + Ah)^4 - 6\left\{\frac{J}{2} + \frac{A^2}{10}\right\}^2 = 0$$

welche wie dort ausdrückt, dass $f = a_x^7$ eine Doppelwurzel besitzt.

Wir stellen uns die Aufgabe die linke Seite zu vereinfachen und durch die im § 1 des 1. Theiles gegebenen Fundamentalinvarianten auszudrücken.

## § 10.

## Berechnung von $J$.

Führt man die Bezeichnungen ein:

(1) $$(mr)^3 n_x^2 = s,$$

(2) $$(mm_1)^3 (nn_1) n_x n_{1,x} = t,$$

(3) $$(s, i)^2 = c_4,$$

(4) $$(t, i)^2 = c_5$$

so ist nach § 7, (2)

(5) $$J = c_4 - c_5.$$

Wir wollen mit Hülfe der Formel (1), § 3

(6) $$m_y^3 n_x^2 = 5(ai)^2 a_y^3 a_x^2 + 9 r_y^2 r_x (yx)$$

diese Grössen durch einfachere Symbole darstellen.

Zunächst ist:

$$s = 5(ai)^2 (ar)^3 a_x^2 + 9(rr_1)^2 r_x r_{1,x} = 5\left(\frac{i^2}{10} - \frac{5}{2} l, i\right)^2 + 3\tau,$$

(7) $$s = \frac{A}{3} i - \frac{25}{2} v + 3\tau.$$

Schiebt man ferner Formel (6) dreimal in Bezug auf $y$ über die Identität

$$m_y^3 n_\xi^2 = 5(ai)^2 a_y^3 a_\xi^2 + 9 r_y^2 r_\xi (y\xi),$$

so wird:

$$(mm_1)^3 n_x^2 n_{1,\xi}^2 = \begin{cases} 25(ai)^2 (bi_1)^2 (ab)^3 a_x^2 b_\xi^2 - 45(ar)^2 (ai)^2 (a_x^2 a_\xi r_\xi - a_\xi^2 a_x r_x) \\ +27 r_x r_{1,\xi} ((rr_1)^2 (x\xi) - 2(rr_1) r_\xi r_{1,x}) \end{cases}$$

$$= 25(ai)^2 (bi_1)^2 (ab)^3 a_x^2 b_\xi^2 - 45(ar)^3 (ai)^2 a_x a_\xi (x\xi) + 9\tau_x \tau_\xi (x\xi).$$

Vergleicht man auf beiden Seiten die 1te Elementarcovariante, so wird: (vgl. 1. Th. § 2, Formel (4)):

$$t = 25(ai)^2 (bi_1)^2 (ab)^3 a_x b_x - 45\left(\frac{i^2}{10} - \frac{5}{2} l, i\right)^2 + 9\tau$$

$$= 25\left(u + \frac{A}{5} i\right) - 3Ai + \frac{225}{2} v + 9\tau,$$

(8) $$t = 2Ai + 25u + \frac{225}{2} v + 9\tau.$$

Schiebt man endlich die Formeln (7), (8) zwei Mal über $i$ und über einander, so wird:

$$c_4 = \tfrac{1}{3} A^2 - \tfrac{25}{2}\gamma_{02} + 3\gamma_{03},$$

$$c_5 = 2A^2 + 25\gamma_{01} + \tfrac{225}{2}\gamma_{02} + 9\gamma_{03},$$

$$J = -\tfrac{5}{3} A^2 - 25\gamma_{01} - 125\gamma_{02} - 6\gamma_{03}, \tag{9}$$

$$(st)^2 = \begin{cases} \tfrac{2}{3} A^3 + \tfrac{25}{3} A\gamma_{01} + \tfrac{25}{2} A\gamma_{02} + 9A\gamma_{03} \\ -\tfrac{625}{2}\gamma_{12} + 75\gamma_{13} - \tfrac{5625}{4}\gamma_{22} + 225\gamma_{23} + 27\gamma_{33}. \end{cases} \tag{10}$$

## § 11.

## Berechnung von $(q, q)^4$.

Setzt man:

$$(ni)^2(m_y^3 r_x^3 - m_x^3 r_y^3) + 2 m_y^3 m_{1,x}^3 (nn_1)(ni)(n_1 i) = A_y^3 B_x^3 \tag{1}$$

so ist nach § 7:

$$A_y^3 B_x^3 = 3 q_x^2 q_y^2 (yx) + \tfrac{J}{2}(yx)^3.$$

Schiebt man diese Formel in Bezug auf $y$ dreimal über die Identität:

$$A_y^3 B_\xi^3 = 3 q_y^2 q_\xi^2 (y\xi) + \tfrac{J}{2}(y\xi)^3,$$

so wird:

$$\begin{aligned}(AA_1)^3 B_x^3 B_{1,\xi}^3 &= 3 q_x^2 q_{1,\xi}^2 \{(qq_1)^2 (x\xi) - 2 q_\xi q_{1,x} (qq_1)\} \\ &\quad + 3J q_x^2 q_\xi^2 (x\xi) + \tfrac{J^2}{4}(x\xi)^3 \\ &= 9 q_x^2 q_{1,\xi}^2 \Big((qq_1)^2 (x\xi) - \tfrac{2}{3}(qq_1) q_\xi q_{1,\xi}\Big) + 3J q_\xi^2 (x\xi) + \tfrac{J^2}{4}(x\xi)^3\end{aligned}$$

und wenn man die Elementarinvarianten auf beiden Seiten vergleicht:

$$(AA_1)^3 (BB_1)^3 = 6(q, q)^4 + J^2.$$

Bildet man andrerseits diesen Ausdruck aus (1), so erhält man drei Glieder, die ich mit

$$2A_{11}, \quad -8A_{12}, \quad 4A_{22}$$

bezeichnen will. Es ist also:

$$6(q, q)^4 = -J^2 + 2A_{11} - 8A_{12} + 4A_{22}. \tag{2}$$

Hierbei wird:

$$A_{11} = (ni)^2 (n_1 i_1)^2 (mr_1)^3 (m_1 r)^3 = c_4^2, \tag{3c}$$

(3 b) $$A_{12} = (m m_2)^3 (m_1 r)^3 (n n_1)(n i)(n_1 i)(n_2 i_1)^2$$
$$= (m m_1)^3 (n s)(n i)(s i)(n_1 i_1)^2$$
$$= (m m_1)^3 (n s)(s i)(n_1 i_1)((n n_1)(i i_1) + (n i_1)(n_1 i))$$
$$= -\frac{A}{2}(m m_1)^3 (n s)(n_1 s)(n n_1) + \frac{1}{2}(m m_1)^3 (s i)^2 (n i_1)(n_1 i_1)(n n_1)$$
$$= -\frac{A}{2}(s t)^2 + \frac{1}{2} c_4 c_5,$$

(3 c) $$A_{22} = (m m_2)^3 (m_1 m_3)^3 (n n_1)(n_2 n_3)(n i)(n_1 i)(n_2 i_1)(n_3 i_1)$$
$$= (m m_2)^3 (m_1 m_3)^3 (n n_1)(n_2 n_3)(n_1 i)(n_2 i_1)((n n_3)(i i_1) + (n i_1)(n_3 i))$$
$$= (m m_2)^3 (m_1 m_3)^3 \left\{\frac{A}{2}(n n_1)(n_2 n_3)(n_1 n_2)(n n_3)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(n i_1)(n_2 i_1)(n n_2)(n_1 n_3)(n_1 i)(n_3 i)\right\} = \frac{1}{2} c_5^2.$$

Trägt man für die $A_{ix}$ ihre Werthe aus (3) in (2) ein, so wird:

(4) $$(q, q)^4 = \frac{1}{6} J^2 + \frac{2}{3} A (s, t)^2.$$

## § 12.

## Berechnung von $q$.

Die Form $q$ hat nach § 7 den Werth:

(1) $$q = (m r)(n i)^2 m_x^2 r_x^2 - (m m_1)(n n_1)(n i)(n_1 i) m_x^2 m_{1,x}^2$$

besteht also aus zwei symbolischen Producten, welche wir nach einander berechnen wollen.

Aus der Formel (2) § 3

$$m_x^3 (n i)^2 = 5 \varrho_x^3 - 9 (r i) r_x^2 i_x$$

folgt:

(2) $$(m r)(n i)^2 m_x^2 r_x^2 = 5 (\varrho, r) - 9 (r i)\left((r r_1) r_x i_x - \frac{1}{3}(r i) r_x r_{1,x}\right) r_{1,x}^2$$
$$= 5 (\varrho r) - \frac{3}{2} i \tau + 3 r \cdot (r, i)^2.$$

Schiebt man ferner die beiden Formeln (2) und (5) § 3:

$$m_x^3 n_y^2 = 5 (a i)^2 a_x^3 a_y^2 - 9 r_y r_x^2 (y x),$$
$$m_\xi^3 (n i) n_y i_y = 5 (a i_1)^2 (a i) a_\xi^3 a_y i_y - 9 (r i) r_\xi^2 i_y (y \xi) - \frac{9}{2} r_\xi^3 i_y^2$$

in Bezug auf $y$ 2 mal über einander, so wird:

$$m_x^3 m_{1,\xi}^3 (n_1 i)(n n_1)(n i)$$
$$= \begin{cases} 5 (a i_2)^2 a_x \left\{5 (b i_1)^2 (b i) b_\xi^3 (a b)(a i) + 9 (r i) r_\xi^2 (a i) a_\xi - \frac{9}{2} r_\xi^3 (a i)^2\right\} \\ - 9 r_x^2 5 (a i_1)^2 (a i) a_\xi^3 \left((r i) a_x - \frac{1}{2} r_x (a i)\right) \\ + 81 r_x^2 (r, i) r_{1,\xi}^2 \left\{\left((r i)(x \xi) - \frac{1}{2} r_x i_\xi\right) - \frac{9}{2} r_\xi^3 \cdot (r i) i_x\right\} \end{cases}$$

und wenn man die beiderseitigen $1^{ten}$ Elementarcovarianten mit einander vergleicht

$$(mm_1)(nn_1)(ni)(n_1i)m_x^2m_{1,x}^2 =$$

$$= \begin{cases} 25(ab)^2(ai)(bi)(ai_1)^2(bi_2)^2a_x^2b_x^2 + 60(ar)(ai_1)^2(ai)(ri)a_x^3r_x \\ -45(\varrho,r)+54(ri)(r_1i)r_x^2r_{1,x}^2+27r_{1,x}^2(ri)(3(rr_1)r_xi_x-(ri)r_xr_{1,x}) \end{cases}$$

(3)

$$= \begin{cases} 25(ab)^2(ai)(bi)(ai_1)^2(bi_2)^2a_x^2b_x^2+60(ar)(ai_1)^2(ai)(ri)a_x^3r_x-45(\varrho,r) \\ +27r\cdot(r,i)^2+\frac{9}{2}i\tau. \end{cases}$$

Trägt man die Werthe aus (2) und (3) in (1) ein, so erhalten wir für $q$ den Werth:

$$(4)\quad q = \begin{cases} -25(ab)^2(ai)(bi)(ai_1)^2(bi_2)^2a_x^2b_x^2-60(ar)(ai_1)^2(ai)(ri)a_x^3r_x \\ +50(\varrho,r)-24r(r,i)^2-6i\tau. \end{cases}$$

Um dieselben weiter zu transformiren, benutze ich die Formeln (11), (12), (13) § 5, 1. Thl. und (4) § 7, 1. Thl. nämlich:

$$(ab)^2(ai)(bi)(ai_1)^2(bi_2)^2a_x^2b_x^2 = p + A(k,i)^2 - i\left(\frac{A}{10}i+2u\right),$$

$$(ar)(ai_1)^2(ai)(ri)a_x^3r_x = \frac{1}{2}p+\frac{1}{2}(k,Ai+5u)^2 - i\left(\frac{A}{10}i+\frac{3}{4}u+\frac{15}{4}v\right)+\frac{5}{4}Al,$$

$$(\varrho,r) = \frac{1}{2}p+\left(k,\frac{A}{3}i+\frac{5}{2}u\right)^2 - i\left(\frac{A}{12}i+\frac{1}{2}u+5v\right)+\frac{5}{3}Al,$$

$$r\cdot(r,i)^2 = \begin{cases} -\frac{1}{2}p+\left(k,-\frac{1}{2}Ai-\frac{5}{4}u+\frac{25}{4}v\right)^2 \\ +i\left(\frac{1}{20}A+\frac{1}{2}u+\frac{5}{2}v-\frac{1}{2}\tau\right)-\frac{25}{24}Al. \end{cases}$$

Hierdurch wird:

$$(5)\qquad q = \begin{cases} -18p+\left(k,-\frac{79}{3}Ai+5u-150v\right)^2 \\ +i\left(\frac{47}{15}i+58u-85v+6\tau\right)+\frac{100}{3}Al. \end{cases}$$

## § 13.

## Reduction von Formel (3) § 9.

Im § 13, (3) haben wir die Formel:

$$(3q + Ah,\ 3q + Ah)^4 - 6\left(\frac{J}{2} + \frac{A^2}{10}\right)^2 = 0$$

als Bedingung aufgestellt, dass $f$ eine Doppelwurzel hat. Diese Formel lässt sich nun mittelst der inzwischen gefundenen Identitäten bedeutend vereinfachen.

Trägt man nämlich für $(qq)^4$ seinen Werth:

$$\frac{J^2}{6} + \frac{2}{3} A(st)^2$$

aus § 11, (4) ein, so lässt sie sich durch $A$ dividiren. Es wird dann:

$$(1) \qquad (6q + Ah, h)^4 + 6(st)^2 - \frac{3}{5} AJ - \frac{3}{50} A^3 = 0.$$

Nun ist nach § 8, (4) und § 12, (5)

$$(2) \qquad h = 8(k, i)^2 - 10l + \frac{13}{5} i^2,$$

$$q = \begin{cases} -18p + \left(k, -\frac{79}{3} Ai + 5u - 150v\right)^2 \\ + i\left(\frac{47}{15} Ai + 58u - 85v + 6\tau\right) + \frac{100}{3} Al \end{cases}$$

also:

$$6q + Ah = \begin{cases} -108p + (k, -150Ai + 30u - 900v)^2 \\ + i\left(\frac{107}{5} Ai + 348u - 510v + 36\tau\right) + 190Al, \end{cases}$$

und demnach wird aus Formel (1):

$$(3)\ 0 = \begin{cases} -108(p,h)^4 + ((k,h)^4 - 150Ai + 30u - 900v)^2 \\ + \left((h,i)^2, \frac{107}{5} Ai + 348u - 510v + 36\tau\right) + 190A(h, l)^4 \\ + 6(st)^2 - \frac{3}{5} AJ - \frac{3}{50} A^3. \end{cases}$$

Diese Formel enthält ausser bereits berechneten Formen nur noch die Ueberschiebungen über $h$. Es sollen diese nunmehr berechnet werden.

## § 14.

### Ueberschiebungen über $h$.

Wir wollen die Covariante:

$$h = 8(k, i)^2 - 10l + \frac{13}{5} i^2$$

der Reihe nach über $i$, $f$, $p = (f, (\varrho, i))^3$, $k$ und $l$ schieben.

Es wird:

$$(h, i)^2 = \frac{26}{15} Ai + 8u - 10v, \tag{1}$$

ferner in Folge der Formeln (1) und (2) § 5, 1. Theil, nämlich

$$(ak)^4 (ki)^2 a_x^3 = -\frac{1}{5} \varrho + \frac{6}{5} (r, i),$$

$$(f, l)^4 = \frac{2}{25} \varrho + \frac{12}{25} (r, i),$$

$$(f, h)^4 = \frac{1}{5} \varrho + \frac{24}{5} (r, i), \tag{2}$$

$$(p, h)^4 = \frac{1}{5} c_1 + \frac{24}{5} c_2. \tag{3}$$

Für $(k, h)^4$ erhalten wir den Werth:

$$(k, h)^4 = 8(kk_1)^4 (ki)^2 k_{1,x}^2 - 10(k, l)^4 + \frac{13}{5} \gamma_{01},$$

welcher mittelst der Reihenentwicklung

$$(kk_1)^4 k_y^2 k_{1,x}^2 = l_{y^2} + \frac{1}{30} A(yx)^2$$

und der Formel:

$$(k, l)^4 = \frac{2}{375} Ai + \frac{1}{25} u - \frac{1}{5} v + \frac{4}{25} \tau, \qquad \text{(vgl. § 5, (4))}$$

in diesen übergeht:

$$(k, h)^4 = \frac{16}{75} Ai + \frac{11}{5} u + 10v - \frac{8}{5} \tau. \tag{4}$$

Die Ueberschiebung $(h, l)^4$ endlich hat den Werth:

$$(h, l)^4 = 8((k, l)^4, i)^2 - 10c + \frac{13}{5} \gamma_{02} \tag{5}$$

$$= \frac{8}{125} A^2 + \frac{8}{25} \gamma_{01} - \frac{1}{5} \gamma_{02} + \frac{16}{25} \gamma_{03}$$

da nach § 6, (2) erster Theil

$$c = -\frac{4}{1875} A^2 + \frac{3}{25} \gamma_{02} + \frac{8}{125} \gamma_{03}.$$

## § 15.

## Die Discriminante Δ.

Trägt man für die Ueberschiebungen von $h$ aus § 14 und für $(s, t)^2$ und $J$ aus § 10 ihre Werthe in (3) § 14 ein, so wird:

$$0 = \begin{cases} -108\left(\frac{1}{5}c_1 + \frac{24}{5}c_2\right) + \frac{3}{5}A\left(\frac{5}{3}A^2 + 25\gamma_{01} + 125\gamma_{02} + 6\gamma_{03}\right) \\ +\left(\frac{16}{75}Ai + \frac{11}{5}u + 10v - \frac{8}{5}\tau,\ -150Ai + 30u - 900v\right)^2 \\ +\left(\frac{26}{15}Ai + 8u - 10v,\ \frac{107}{5}Ai + 348u - 510v + 36\tau\right)^2 \\ +190\left(\frac{8}{125}A^2 + \frac{8}{75}\gamma_{01} - \frac{1}{5}\gamma_{02} + \frac{16}{25}\gamma_{03}\right)A - \frac{3}{50}A^3 \\ +6\left(\frac{2}{3}A^3 + \frac{25}{3}A\gamma_{01} + \frac{25}{2}A\gamma_{02} + 9A\gamma_{03} - \frac{625}{2}\gamma_{12} + 75\gamma_{13}\right) \\ \qquad -\frac{5625}{4}\gamma_{22} + 225\gamma_{23} + 27\gamma_{33} \end{cases}$$

oder, wenn man zusammenzieht:

$$0 = \begin{cases} -\frac{108}{5}(c_1 + 24c_2) + \frac{3329}{150}A^3 + \frac{2883}{5}A\gamma_{01} - 2678A\gamma_{02} \\ +\frac{2408}{5}A\gamma_{03} + 2850\gamma_{11} - 11115\gamma_{12} - \frac{24675}{2}\gamma_{22} \\ +690\gamma_{13} + 2430\gamma_{23} + 162\gamma_{33}. \end{cases}$$

Nun ist nach § 5, (15) und § 6, (5) erster Theil

$$c_2 = \frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{18}A^3 - \frac{5}{12}A\gamma_2 + \frac{5}{3}\gamma_{11},$$

$$\gamma_{13} = \frac{2}{225}A^3 - A\left(\frac{1}{30}\gamma_1 + \frac{7}{24}\gamma_2 + \frac{4}{15}\gamma_3\right) - \frac{1}{4}\gamma_{11} + \frac{5}{4}\gamma_{12} + \frac{25}{2}\gamma_{22};$$

mithin wird:

$$(1)\quad 0 = \begin{cases} -\frac{972}{5}c_1 + A\left(\frac{8569}{150}A^2 + \frac{2768}{5}\gamma_{01} - \frac{10653}{4}\gamma_{02} + \frac{1488}{5}\gamma_{03}\right) \\ +\frac{3627}{2}\gamma_{11} - \frac{20505}{2}\gamma_{12} - \frac{7425}{2}\gamma_{22} + 2430\gamma_{23} + 162\gamma_{33}. \end{cases}$$

Diese Bedingung ist für die Existenz einer Doppelwurzel von $f$ zunächst nothwendig. Sie ist aber auch hinreichend; denn erstens ist

sie vom Grade 12 in den Coefficienten und zweitens ist sie keine Identität, da sie nicht für die in der Einleitung erwähnte Form gilt. Für diese verschwindet nämlich $i$ also $c_1$ und alle $\gamma_{i\varkappa}$ ausser $\gamma_{33}$, das nicht verschwindet.

Aus diesen Gründen ist die rechte Seite von (1) die Discriminante von $f$.

Erlangen, im Januar 1888.

# Ueber zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

Herr G. Cantor hat gezeigt*), dass wenn man von einer Grösse $\zeta$ annimmt, sie sei kleiner als jede absolute reelle Zahl und es seien sowohl die Vielfachen derselben $\zeta \cdot n$, wo $n$ jede natürliche Zahl, als auch die Producte $\zeta \cdot \nu$, wo $\nu$ jede transfinite Ordnungszahl sein darf, erklärt, dann auch *jedes der letzteren Producte kleiner als jede noch so kleine absolute reelle Zahl sein muss.* Demnach geht es nicht an, unendlich kleine Elemente der linearen Zahlgrössen anzunehmen.

Mit diesem Satze steht die Theorie der hisher aufgestellten zwei Arten von unendlich kleinen Grössen**) keineswegs in Widerspruch. Die erste Art sind *die Momente eines Functionensystems.* Man denke sich ein System von Functionen $f(x)$, $g(x)$ einer reellen Veränderlichen $x$, welche bei einem und demselben Grenzübergange von $x$ z. B. $\lim x = +\infty$ verschwinden und deren jede sodann für alle Werthe von $x$, die einen bestimmten überschreiten, positiv bleibt (kurz ausgedrückt: jede solche Function $f(x)$ hat bei $\lim x = +\infty$ den Grenzwerth $+0$), so zusammengestellt, dass dazu auch jede rationale Function einiger der Functionen $f(x)$ gehört, welche bei $\lim x = +\infty$ den Grenzwerth $+0$ besitzt. Zugleich werde angenommen, dass jede rationale Function einer endlichen Anzahl von Functionen $f(x)$ bei $\lim x = +\infty$ einen endlichen oder unendlichen Grenzwerth hat. Ordnet man nun einer jeden Function $f(x)$ ein Ding zu, so lassen

*) Vgl. Zeitschrift f. Philosophie v. Fichte 91. Bd., p. 121.

**) Ihre Theorien sind entwickelt in des Verfassers Vorlesungen über allg. Arithmetik. I. Th., p. 205—214.

sich diese Dinge unter einander vergleichen*) und daher, wie ich mich ausdrücke, als Grössen im allgemeinsten Sinne des Wortes bezeichnen. Man kann ferner eine Addition und eine Multiplication dieser Grössen so definiren, dass, einige Additionsungleichungen und Sätze der Subtraction abgerechnet, die nämlichen Regeln wie für die absoluten Zahlen gelten. Ich nenne die der Function $f(x)$ zugeordnete Grösse das *Moment* derselben und bezeichne sie mit $\mathfrak{u}(f)$. Indem die Division der Momente nicht immer möglich ist, so kann man formale Quotienten $\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g)$ als neue Grössen einführen, welche die bis jetzt nicht lösbaren Gleichungen

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(f)$$

erfüllen sollen. Ueber sie lassen sich die folgenden Festsetzungen treffen**):

1) Es sei

$$\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(f_1) : \mathfrak{u}(g_1)$$

dann und nur dann, wenn

$$\lim \cdot (fg_1 : gf_1) = 1$$

ist, woraus u. A. sich ergiebt, dass wenn

$$\lim \cdot (f : g) = +\infty$$

ist, die neue Grösse $\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g)$ grösser ist als jede Grösse $\mathfrak{u}(f_1) : \mathfrak{u}(g_1)$, $\lim \cdot (f_1 : g_1)$ als endlich vorausgesetzt.

2) Ein Moment ist kleiner als jede der neuen Grössen.

3) Jede der letzteren wird durch Addition eines Momentes ebensowenig geändert, als die zuletzt erwähnte (unendliche) Grösse $\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g)$ durch Addition einer endlichen Grösse $\mathfrak{u}(f_1) : \mathfrak{u}(g_1)$.

Aus der ersten Annahme folgt, dass die allen Paaren von Functionen $f(x)$, $g(x)$, deren Quotient bei $\lim x = +\infty$ einen und denselben endlichen positiven Grenzwerth $\lambda$ besitzt, entsprechenden Grössen einander gleich sind und somit eine jede von ihnen ohne Unterschied in der Rechnung durch das *Zeichen* $\lambda$ dargestellt werden kann. Wir dürfen demnach die neuen Grössen in dem soeben erwähnten Falle mit den absoluten reellen Zahlen zusammenfallen lassen. Nunmehr besteht die Gleichung

$$\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g) = \lim \cdot (f : g) = \lambda;$$

*es erscheint also der Grenzwerth $\lambda$ als Quotient zweier unendlich kleinen Grössen.*

*) $\mathfrak{u}(f)$ heisst gleich, grösser oder kleiner als $\mathfrak{u}(g)$, jenachdem $\lim \cdot \{f(x) : g(x)\}$ gleich, grösser oder kleiner als 1 ist.

**) Man gelangt zu diesen Annahmen auf völlig methodischem Wege.

Das aus den Momenten der Functionen $f(x)$ und den später hinzugefügten Grössen gebildete System enthält demnach neben den absoluten reellen Zahlen unendlich kleine Grössen (d. i. solche, die kleiner sind als eine jede absolute Zahl), nämlich die Momente $u(f)$ selbst, und unendlich grosse Grössen (d. i. solche, die grösser sind als jede absolute Zahl), nämlich diejenigen Quotienten $u(f) : u(g)$, worin $\lim \cdot (f:g) = +\infty$ ist. Allerdings sind die Momente nur *formal* unendlich klein d. h. für die Rechnung oder, wenn man will, auf dem Papier, indem die absoluten Zahlen ja anders definirt sind, als die obigen formalen Quotienten.

Das $n$-fache von $u(f)$ ist $u(nf)$. Da $nf(x)$ bei unendlichem Wachsen der natürlichen Zahl $n$ im Allgemeinen keinen endlichen Grenzwerth hat, so lässt sich nicht einmal das Product $u(f) \cdot \omega$ definiren, worin $\omega$ die erste Zahl der zweiten Zahlenclasse bedeutet. Für die Momente der Functionen giebt es also keine Producte $u(f) \cdot \nu$, so dass man natürlich auch sie nicht als Elemente der absoluten reellen Zahlen, bezw. der diese darstellenden Strecken betrachten kann.

Ich bin weit davon entfernt, dem soeben geschilderten Grössensysteme einen andern als formalen Werth beizulegen. Schon der den Functionen $f(x)$ auferlegten Beschränkungen wegen bleibt es hinsichtlich seiner praktischen Verwendbarkeit hinter anderen, auf ähnliche Weise geschaffenen Grössensystemen z. B. den Euclid'schen Verhältnissen zurück. Die Momente eines Functionensystemes scheinen mir gleichwohl die möglichste Annäherung an das Ideal, welches den Anhängern actual unendlich kleiner Grössen vorschwebt, darzustellen.

Unendlich kleine Grössen kommen noch vor in dem Systeme der „*Nullen*" von passend ausgewählten Functionen $f(x)$, welches zuerst von Hrn. P. du Bois-Reymond untersucht worden ist. Daneben finden sich auch unendlich grosse Grössen. Bezeichnet man die Null der Function $1 : x^{\mu} (\mu > 0)$ und die ihr gleicher mit $\mu$*), so ist die Null einer Function $f(x)$ unendlich klein oder gross, je nachdem

$$\lim_{x=+\infty} x^{\nu} f(x)$$

für jeden positiven Werth von $\nu$ unendlich ist oder verschwindet**). Unter den Vielfachen $u(f) \cdot n$ wird nunmehr die Grösse $u(f^n)$ verstanden, woraus ersichtlich ist, dass auch in diesem Falle schon das Product $u(f) \cdot \omega$ nicht erklärt werden kann.

---

*) Die *Null* $u(f)$ heisst gleich, grösser oder kleiner als die *Null* $u(g)$, je nachdem $\lim \cdot \{f(x) : g(x)\}$ eine positive endliche Zahl, 0 oder $+\infty$ ist.

**) Die Addition und Subtraction der Nullen von Functionen gehorchen denselben Regeln, wie die der natürlichen Zahlen. Eine Multiplication dieser Grössen unter einander ist bisher nicht aufgestellt worden.

Für keines der beiden im Vorstehenden betrachteten Grössensysteme gilt derjenige Satz, den ich kurz als das Axiom des Archimedes bezeichne, unbedingt. Dass derselbe für jedes System von *stetigen* Grössen, also auch für die geradlinigen Strecken von selbst erfüllt ist, habe ich unter Zugrundelegung der Dedekind'schen Definition der Stetigkeit dargethan.*)

Innsbruck, 2. Jänner 1888.

*) Vgl. diese Annalen Bd. 22, p. 510 und a. a. O. p. 82.

## Beneke'sche philosophische Preisaufgabe.

**Für das Jahr 1891 stellt die philosophische Facultät der Universität Göttingen folgende Aufgabe:**

„Die fundamentale Bedeutung des Entropie-Gesetzes für die Theorie aller derjenigen physikalischen und chemischen Erscheinungen, welche mit einer Production oder Absorption von Wärme verbunden sind, ist in den letzten Jahrzehnten mehr und mehr hervorgetreten; es ist insbesondere auch bei den Bearbeitungen des Energiegesetzes, welche durch die Beneke'sche Preisaufgabe von 1884 veranlasst worden sind, zur Geltung gekommen, dass das Energiegesetz des Entropiegesetzes als wesentlicher Ergänzung bedarf. Gleichzeitig sind die Arbeiten, welche die Begründung des Entropiegesetzes durch die allgemeinen Principien der Mechanik zum Ziele haben, in neuester Zeit wesentlich fortgeschritten. *Eine zusammenfassende Darstellung der sämmtlichen mit dem Entropiegesetz zusammenhängenden Fragen* erscheint daher zur Zeit besonders wünschenswerth.

Eine solche Darstellung würde einmal die Entwicklung der empirischen Beweise des Entropiegesetzes zu geben haben, im Anschlusse an eine eingehende Reproduction und Würdigung der Carnot'schen Arbeiten; sie würde ferner die Untersuchungen, die sich auf den Zusammenhang des Entropiegesetzes mit den allgemeinen Principien der Mechanik beziehen, nicht nur historisch, sondern auch kritisch besprechen müssen; sie sollte endlich einen umfassenden Bericht über die sämmtlichen Anwendungen enthalten, welche das Entropiegesetz bisher auf die Theorie physikalischer und chemischer Processe gefunden hat."

Bewerbungsschriften sind in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache mit einem versiegelten Brief, der den Namen, Stand und Wohnort des Verfassers enthält und durch den gleichen Spruch wie die Bewerbungsschrift bezeichnet ist,

bis zum 31. August 1890

an die philosophische Facultät zu Göttingen einzusenden.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1891, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Facultät.

Der erste Preis beträgt 1700 Mark, der zweite 680 Mark.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Das Titelblatt einer Bewerbungsschrift muss auch die Bezeichnung der Adresse enthalten, an welche die Schrift, falls sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften **bis zum 31. August 1888** und **bis zum 31. August 1889** einzusenden sind, finden sich bezw. im Jahrgang 1886 Nr. 8 und 1887 Nr. 5 der Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Göttingen, 1. April 1888.

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

NOV 17 1961